K-théorie algébrique

Le groupe de Grothendieck K_0

I/ Introduction et rappels

Notations : . Anneau = anneau associatif avec unité et tel que $1 \neq 0$

. Si R est un anneau, un R-module sera un module à droite.

. Notion de base pour un R-module M : s'il existe une famille $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ d'éléments de M telle que tout élément $m \in M$ s'écrive de manière unique sous la forme $m = \sum_{i=1}^{n} e_i r_i$, $r_i \in R$.

. Si M admet une base, on dit que M est libre. Le rang de M désigne alors le cardinal de la base.

Définition (IBP) : Soit R un anneau. On dit que R est IBP (Invariant Basis Property) si, pour $m, n \in \mathbb{N}$,

$$m \neq n \Rightarrow R^m \ncong R^n$$

Si R est IPB, le rang d'un R-module libre est un invariant, indépendant du choix de la base de M.

Notion de module projectif : R anneau, P un R-module. On a deux formulations équivalentes :

(1) P est projectif s'il existe un R-module Q tel que $P \oplus Q$ soit libre.

(2) P est <u>projectif</u> si, lorsqu'il existe deux R-modules M, N tels que

(i) $\exists$ une flèche $f : M \to N$ surjective

(ii) $\exists$ une flèche $g : P \to N$

Alors il existe $h : P \to M$ telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\exists h"'] \arrow[d, "g"] \arrow[dl, phantom, shift left=3, "\circlearrowleft"] & \\ M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

On note $P(R)$ la catégorie des R-moduls projectifs de type fini, avec pour flèches les homomorphismes de R-modules.

<u>Remarque</u>: La somme directe de deux R-moduls projectifs est projective.
Ainsi, la catégorie $P(R)$ est additive (voir la définition plus loin).

II/ <u>K_0 pour un anneau</u>

1. <u>Symétrisé</u>

<u>Définition</u> (monoïde abélien)

- Un <u>monoïde abélien</u> est un ensemble $(M, +)$; $+$ étant une loi associative interne, commutative et admettant un neutre 0_M.

- Les <u>morphismes de monoïdes</u> sont les $f : M \to N$ tels que
  - $f(m+m') = f(m) + f(m')$
  - $f(0_M) = 0_N$

<u>Exemples</u> :
* $(\mathbb{N}, +)$
* si $(A, +)$ est un groupe abélien, tout sous-ensemble de A contenant 0.

On aimerait "compléter" un monoïde M en un groupe en "rajoutant" les inverses qui manquent.

Définition (symétrisé) Soit M un monoïde abélien.

Son symétrisé est un groupe abélien noté $M^{-1}M$ équipé d'un morphisme de monoïdes $[\cdot]: M \longrightarrow M^{-1}M$ universel au sens suivant :

Si A est un groupe abélien avec un morphisme de monoïde $\alpha: M \to A$, alors il existe un unique $\tilde{\alpha}: M^{-1}M \longrightarrow A$ tel que $\tilde{\alpha}([m]) = \alpha(m)$, $\forall m \in M$.

$$\begin{tikzcd} A & & M^{-1}M \arrow[ll, "\exists! \tilde{\alpha}"'] \\ & M \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "{[\cdot]}"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowright"] & \end{tikzcd}$$

On a unicité au sens suivant : si $(G, [\cdot]_G : M \to G)$ est un autre couple ayant les mêmes propriétés que $(M^{-1}M, [\cdot])$, alors il existe $\varphi: M^{-1}M \to G$ tel que

$$[\cdot]_G = \varphi \circ [\cdot]$$

Remarques :
- "symétrisé" en VF $\Leftrightarrow$ "group completion" en anglais
- $[\cdot]: M \to M^{-1}M$ est injectif ssi M est un monoïde d'annulation, c'est-à-dire $(k+m = k+n) \Rightarrow (m=n)$ pour $k, m, n \in M$.

Existence et construction du symétrisé

- tout monoïde abélien M admet un symétrisé.
- on le construit de la manière suivante : pour $m \in M$, on construit le groupe abélien libre sur les symboles $[m]$, que l'on note $F(M)$.

On définit ensuite

$$R(M) := \{ [m+n] - [m] - [n], \quad m,n \in M \}.$$

On pose alors $M^{-1}M := F(M) / R(M)$.

Pour comprendre que $F(M)/R(M)$ vérifie bien la propriété universelle, soit A un groupe abélien et $\alpha : M \to A$ un morphisme de monoïdes.

On construit
$$\left.\begin{array}{rcl} \tilde{\alpha} : F(M) & \longrightarrow & A \\ \sum_i \varepsilon_i [m_i] & \longmapsto & \sum_i \varepsilon_i \alpha(m_i) \end{array}\right| \quad \varepsilon_i = \text{signe}(m_i), \quad m_i \in M$$

Alors $R(M) \subset \mathrm{Ker}(\tilde{\alpha})$. Ainsi il existe $\tilde{\tilde{\alpha}} : F(M)/R(M) \longrightarrow A$ tel que le diagramme commute :

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A \\ F(M)/R(M) \arrow[ur, "\exists! \tilde{\tilde{\alpha}}"'] & \end{tikzcd}$$

En particulier, on a bien $\tilde{\tilde{\alpha}}([m]) = \alpha(m)$ pour $m \in M$.

<u>Exemples</u> :

- A groupe abélien $\Rightarrow A^{-1}A = A$.
- Le symétrisé de $\mathbb{N}$ est $\mathbb{Z}$.

  En effet $\mathbb{N}^{-1}\mathbb{N} = F(\mathbb{N}) / R(\mathbb{N})$; et là-dedans on a

  $$[k] - [n] = [k-n], \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

On peut donc poser un isomorphisme
$$\left.\begin{array}{rcl} \mathbb{N}^{-1}\mathbb{N} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z} \\ [k-0] & \longmapsto & k \\ [0-k] & \longmapsto & -k \end{array}\right| \quad , \; k \in \mathbb{N}$$

Remarques : • si $f : M \to N$ morphisme de monoïdes, alors f s'étend naturellement en un homomorphisme de groupes $M^{-1}M \to N^{-1}N$.

On a donc un foncteur de symétrisation

$$\begin{tikzcd} S : \mathrm{MAb} \arrow[r] & \mathrm{Ab} \\ M \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & M^{-1}M \arrow[d] \\ N \arrow[r, mapsto] & N^{-1}N \end{tikzcd}$$

Ab = catégorie des groupes abéliens

MAb = catégorie des monoïdes abéliens.

• S est adjoint à gauche au foncteur oubli $\mathrm{Ab} \xrightarrow{U} \mathrm{MAb}$, car on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{MAb}}(M, UA) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(M^{-1}M, A)$$

Proposition : Soit M un monoïde abélien.

(1) tout élément de $M^{-1}M$ est de la forme $[m]-[n]$, pour $m, n \in M$.

(2) $[m] = [n]$ dans $M^{-1}M \iff \exists\, p \in M,\ m+p = n+p$

(3) $\begin{array}{l} M \times M \to M^{-1}M \\ (m,n) \mapsto [m]-[n] \end{array}$ vue comme morphisme de monoïdes, est surjective.

(4) On peut définir $M^{-1}M := M \times M /_{\sim}$, avec $(m,n) \sim (m+p, n+p)$

Preuve :

Rappelons que tout élément d'un groupe abélien libre peut s'écrire comme différence de générateurs.

Dans $F(M)/_{R(M)}$, on a $[m_1] + \dots + [m_k] = [m_1 + \dots + m_k]$, $m_i \in M$.

Tout élément de $M^{-1}M = F(M)/_{R(M)}$ s'écrit donc comme différence de générateurs, ce qui montre (1) et (3).

Pour (2), supposons que $[m] - [n] = 0$ dans $M^{-1}M$. Montrons qu'il existe $p \in M$ tel que

$$m + p = n + p.$$

$$[m] - [n] = 0 \in F(M)/_{R(M)} \implies [m] - [n] \in R(M) \subset F(M).$$

Ainsi l'élément $[m] - [n]$ s'écrit comme une différence de générateurs, celle-ci appartenant à $R(M)$:

$$[m] - [n] = \sum_i [a_i + b_i] - [a_i] - [b_i] - \sum_j [c_j + d_j] - [c_j] - [d_j]$$

$$\Leftrightarrow \quad [m] + \sum_i [a_i] + [b_i] + \sum_j [c_j + d_j] = [n] + \sum_i [a_i + b_i] + \sum_j [c_j] + [d_j].$$

On a donc une égalité de type $\sum_i x_i = \sum_j y_j$, avec x_i, y_j générateurs (de $F(M)$). Ainsi, les x_i et les y_j sont en même nombre et il existe une permutation σ telle que $x_i = y_{\sigma(i)}$. Dans M, on a donc l'égalité :

$$m + \sum_i (a_i + b_i) + \sum_j (c_j + d_j) = n + \sum_i (a_i + b_i) + \sum_j (c_j + d_j).$$

En posant $p := \sum_i (a_i + b_i) + \sum_j (c_j + d_j)$, on obtient bien ce qu'on veut.
(La réciproque est immédiate)

(4) découle directement de (1) et (2).

Définition : Soit M un monoïde

- **monoïde d'annulation :** M est un monoïde d'annulation si

$$m+p = n+p \Rightarrow m=n \quad \forall\, m,n,p \in M$$

- **monoïde cofinal :** M monoïde abélien, $L \subset M$ sous-monoïde. L est dit cofinal si : $\forall\, m \in M,\ \exists\, m' \in M,\ m+m' \in L$.

Corollaires de la proposition :

1.) M s'injecte dans $M^{-1}M \Leftrightarrow M$ monoïde d'annulation

2.) Soit $L \subset M$ un sous-monoïde cofinal.

(a) $L^{-1}L$ est un sous-groupe de $M^{-1}M$

(b) tout élément de $M^{-1}M$ est de la forme $[m]-[l]$, $m \in M$, $l \in L$;

(c) si $[m]=[m']$ dans $M^{-1}M$, alors il existe $l \in L$ tel que $m+l = m'+l$.

Remarque : Un monoïde abélien $(M,+)$ équipé d'une loi $*$ distributive par rapport à $+$, associative et ayant une unité 1 est un demi-anneau. (Ex : $\mathbb{N}$)

Le symétrisé d'un demi-anneau est un anneau. On obtient également un foncteur $SemiRng \to Rng$.

Exemple : G groupe fini.

$$Rep_{\mathbb{C}}(G) = \{\text{représentations } \rho : G \to GL_n(\mathbb{C}) \text{ de dim finie}\} / \cong$$

$Rep_{\mathbb{C}}(G)$ est un monoïde abélien muni de l'opération $\oplus$ (somme directe).

On sait que $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G) \cong \mathbb{N}^{r}$ $(*)$, avec r le nombre de classes de conjugaison dans G.

On a donc $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G)^{-1}\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G) \cong \mathbb{Z}^{r}$ (iso de groupes).

Muni du produit tensoriel $\otimes$, $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}}(G)$ devient un demi-anneau. Son symétrisé est donc un anneau commutatif.

$(*)$ en effet, on a $\# \{\text{rep de dim finie irréductibles}\}/_{\cong} = \# \{\text{classes de conjugaison}\}$.

Puis Maschke $\Rightarrow$ toute rep se décompose en somme directe de rep. irréductibles.

2. K_0 pour un anneau

Soit R un anneau. On note $P(R) = \left\{\begin{array}{c}\text{classes d'isomorphismes des } R\text{-modules} \\ \text{projectifs de type fini}\end{array}\right\}$

Alors, $(P(R), \oplus, 0)$ est un monoïde abélien. On peut donc construire son symétrisé, noté $P^{-1}P$.

Définition ($K_0(R)$) : Le groupe de Grothendieck $K_0(R)$ est défini par $K_0(R) := P^{-1}P$.

Exemple : (Rosenberg)

$R = \mathbb{K}$ (corps). Dans ce cas, un R-module projectif de type fini est simplement un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Or, si V est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, on a $V \cong \mathbb{K}^n$. La dimension est donc un invariant, et $P(R) \cong \mathbb{N}$.

Ainsi, $K_0(\mathbb{K}) = \mathbb{N}^{-1}\mathbb{N} = \mathbb{Z}$.

(Ça marche aussi si R est un anneau à division.)

Remarque : K_0 est un foncteur $\mathrm{Rings} \longrightarrow \mathrm{Ab}$.

Remarque : cet exemple montre pourquoi on utilise des moduls projectifs de type fini pour définir K_0 : pour $R = \mathbb{K}$ un corps, on a

$$\{\text{classes d'iso de moduls à base dénombrable}\} \cong \mathbb{N} \cup \{+\infty\},$$

avec la règle $n + \infty = \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Mais alors, par le point (2) de la proposition, $[m] = [0]$ dans $M^{-1}M$ pour tout $m \in M$, donc $P(R)$ est trivial.

Lemme : Le morphisme de monoïdes $\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & P(R) \\ n & \longmapsto & R^n \end{array}$ induit un homomorphisme de groupes

$$\mathbb{Z} \longrightarrow K_0(R).$$

On a

(1) $\mathbb{Z} \longrightarrow K_0(R)$ injectif $\iff$ R est IPB

(2) supposons que R est IPB. Alors :

$K_0(R) \cong \mathbb{Z} \iff$ pour tout R-module projectif de type fini M, il existe F, G des R-moduls libres de type fini tels que $M \oplus F = G$. "stably free".

III / K_0 pour des catégories

Définition : (catégorie) Une *catégorie* $\mathcal{C}$ consiste en la donnée :

- d'une collection d'objets $Ob(\mathcal{C})$;
- pour tous $c, d \in Ob(\mathcal{C})$, d'une collection $Hom_{\mathcal{C}}(c,d)$ ou $\mathcal{C}(c,d)$ de flèches ;
- pour tout $c \in Ob(\mathcal{C})$, une flèche identité $1_c \in Hom_{\mathcal{C}}(c,c)$
- pour tous $c, d, e \in Ob(\mathcal{C})$, une fonction de composition

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{C}}(d,e) \times Hom_{\mathcal{C}}(c,d) &\longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(c,e) \\ (g, f) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

devant satisfaire les axiomes :

(1) pour toutes flèches composables f, g, h, on a $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

(2) pour toute flèche $f \in Hom_{\mathcal{C}}(c,d)$, $f \circ 1_c = 1_d \circ f = f$.

L'idée de symétrisation (group completion) peut être appliquée plus généralement, dès que l'on dispose d'un produit tel que les classes d'isomorphismes d'objets forment un monoïde abélien.

1. Catégories monoïdales symétriques

Définition : (catégorie monoïdale symétrique)

Il s'agit d'une catégorie S équipée :

- d'un foncteur $\square : S \times S \longrightarrow S$
- d'un objet distingué e
- de 4 isomorph. naturels :

$s, t \in Ob(S)$

$$\left.\begin{array}{l} * \ e \square s \cong s \\ * \ s \square e \cong s \end{array}\right\} \text{“neutre”}$$

$* \ s \square (t \square u) \cong (s \square t) \square u$ “associativité”

$* \ s \square t \cong t \square s$ “commutativité”

Normalement, ces isomorphismes satisfont des théorèmes de cohérence, qui permettent d'écrire des expressions de type $s_1 \square \cdots \square s_n$ sans parenthèses. Voir McLane.

Exemples :

- R anneau, $P(R)$ muni d'une somme directe $\oplus$
- toute catégorie admettant des coproduits finis, avec $\square = \amalg$
- ———————— produits ——, avec $\square = \Pi$

On rappelle que le squelette d'une catégorie est la classe des classes d'isomorphismes d'objets de la catégorie. (On garde un seul représentant par chaque classe d'isomorphismes).

Soit S une catégorie monoïdale symétrique telle que son squelette soit un ensemble, noté S^{iso}. Alors S^{iso} est un monoïde abélien, muni de $\square$ et e.

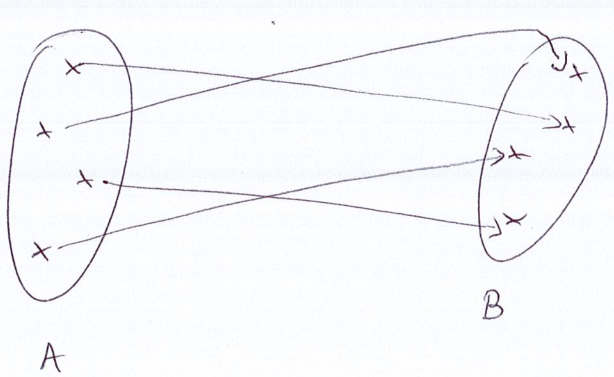
Définition : Le groupe de Grothendieck $K_0^\square(S)$ de S est défini comme étant le symétrisé de S^{iso}.

Les résultats de la première partie s'adaptent :

- $K_0^\square(S)$ est présenté avec un générateur $[s]$ par classe, avec les relations $[s \square t] = [s] + [t]$.
- les éléments de $K_0^\square(S)$ peuvent s'écrire $[s] - [t]$ pour $s, t \in Ob(S)$.

Exemple : On note Finset la catégorie des ensembles finis, équipée du coproduit $\amalg$ (somme disjointe).

Remarquons que pour $A, B \in$ Finset tels que $\#A = \#B$, on peut toujours faire une bijection $A \longrightarrow B$, en assignant une image à chaque élément de A de telle sorte à ce que chaque élément B n'ait qu'un unique antécédent.



Ainsi, l'ensemble des classes d'isomorphismes de Finset est $\mathbb{N}$.

On déduit $K_0^{\amalg}(\text{Finset}) = \mathbb{N}^{-1}\mathbb{N} = \mathbb{Z}$.

En revanche, Finset équipé du produit cartésien $\times$ n'admet pas le même K_0.
En effet, l'ensemble vide $\emptyset$ vérifie $A \times \emptyset = \emptyset$, pour tout $A \in \text{Ob}(\text{Finset})$.
Par le point (2) de la proposition, $[A] = [\emptyset]$ $\forall A \in \text{Ob}(\text{Finset})$, donc $K_0^{\times}(\text{Finset})$ trivial.

Si on prend $\text{Finset}^* := \text{Finset} \setminus \{\emptyset\}$, on a $\{\text{classes d'isos}\} \cong \{\mathbb{N}^*, \times\}$

multiplication des entiers.

On obtient alors $K_0^{\times}(\text{Finset}^*) = (\mathbb{Q}_{>0}, \times)$.

2. K_0 pour une catégorie abélienne

Pour éviter les problèmes de théorie des ensembles, on se place dans le contexte des catégories abéliennes ayant un squelette petit, c'est-à-dire dont le squelette est un ensemble.

Définition (catégorie additive) Une catégorie $\mathcal{C}$ est additive si :

- elle contient un objet nul (initial et terminal)
- elle contient tous les produits $A \times B$, $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ est un groupe abélien pour tous $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$
- la composition est bilinéaire, ie

$$(g+g') \circ (f+f') = g \circ f + g \circ f' + g' \circ f + g' \circ f'$$

pour toutes f, f', g, g' composables.

Remarque : dans ce contexte (catégories additives), le produit se confond avec le coproduit et on le note $\oplus$.

Quelques rappels :

- $f : B \to C$ est un | monomorphisme si $\forall\, e_1, e_2 : A \to B$, $e_1 \neq e_2 \Rightarrow f \circ e_1 \neq f \circ e_2$
  | épimorphisme si $\forall\, g_1, g_2 : C \to D$, $g_1 \neq g_2$, $g_1 \circ f \neq g_2 \circ f$.

- $k : K \to C$ est un noyau (de f) si

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, "f"] & \\
 & K \arrow[u, "k"] \arrow[r, "0"] & C \\
K' \arrow[ur, dashed, "\exists ! u"] \arrow[uur, bend left, "k'"] \arrow[urr, bend right, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

ie si $f \circ k = 0$, et

si (K', k') est un autre couple ayant les mêmes propriétés, alors $\exists !\, u : K' \to K$ tel que $k \circ u = k'$.

- $q : C \to Q$ est un conoyau (de f) si

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[d, "q"] \arrow[ddr, "q'"] & \\
B \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "0"] \arrow[drr, "0"'] & Q \arrow[dr, dashed, "\exists ! u"] & \\
 & & Q'
\end{tikzcd}$$

Définition : (catégorie abélienne) Une catégorie abélienne est une catégorie additive $\mathcal{A}$ dans laquelle :

(i) tout morphisme $B \to C$ possède un noyau et un conoyau.

(ii) tout monomorphisme est un noyau, tout épimorphisme est un conoyau.

Dans une catégorie abélienne, on a la notion de suite exacte courte :

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0, \quad \text{avec } f \text{ mono, } g \text{ épi et } \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g),$$

$$\mathrm{Im}(f) := \mathrm{Ker}(B \to \mathrm{coker}(f)).$$

Exemple : l'exemple typique de catégorie abélienne est la catégorie Rmod des R-moduls, pour R un anneau unitaire.

On a d'ailleurs le théorème de plongement de Freyd-Mitchell.

Théorème : Si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne petite ($\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ est un ensemble), il existe un anneau unitaire R et un foncteur exact, pleinement fidèle $\mathcal{A} \hookrightarrow R\text{-Mod}$ qui plonge $\mathcal{A}$ comme sous-catégorie pleine de RMod.

(Ref : Freyd, Abelian Categories, an introduction to the theory of functors, Harper, 1964)

Définition : $\mathcal{A}$ catégorie abélienne. On peut construire son groupe de Grothendieck $K_0(\mathcal{A})$. C'est le groupe abélien ayant la présentation :

- générateurs : symboles $[A]$ pour $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$
- relations : $[A] = [A'] + [A'']$ dès qu'il existe une suite exacte courte $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$.

Proposition : Les identités suivantes sont valables dans $K_0(\mathcal{A})$:

(1) $[0] = 0$;

(2) si $A \cong A'$ comme objets de $\mathcal{A}$, alors $[A] = [A']$;

(3) $[A' \oplus A''] = [A'] + [A'']$, pour A', A'' objets de $\mathcal{A}$.

Preuve :

(1) En prenant $A = A'$, on a une s.e.c $0 \to A \to A \to 0$, donc $[A] = [A] + [0]$, d'où $[0]$ est neutre.

(2) si dans la sec $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$, $A'' = 0$, alors $A \cong A'$ et donc $[A] = [A'] + [0]$, d'où $[A] = [A']$, puisque $[0]$ est neutre.

(3) si $A = A' \oplus A''$, alors on a la sec $0 \to A' \to A' \oplus A'' \to A'' \to 0$, donc

$[A' \oplus A''] = [A'] + [A'']$.

■

<u>Propriété universelle</u> :

Soient $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne et Γ un groupe abélien.

Une fonction additive $f : \mathcal{A} \to \Gamma$ est une fonction prenant les objets de $\mathcal{A}$ et telle que $f(A) = f(A') + f(A'')$ dès que l'on a une s.e.c $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$.

<u>Exemple</u> : $[\cdot] : A \mapsto [A]$ est une fonction additive de $\mathcal{A}$ vers $K_0(\mathcal{A})$.

Toute fonction additive $\mathcal{A} \to \Gamma$ induit un homomorphisme de groupes

$$\tilde{f} : K_0(\mathcal{A}) \to \Gamma, \quad \text{avec } \tilde{f}([A]) = f(A) \text{ pour } A \in Ob(\mathcal{A}).$$

→ La somme directe $\oplus \mathcal{A}_i$ de catégories abéliennes est abélienne, et $K_0(\oplus \mathcal{A}_i) = \bigoplus_i K_0(\mathcal{A}_i)$.

<u>Rappels</u> :

- un <u>foncteur additif</u> entre deux catégories $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un foncteur tel que $\mathrm{Hom}(A, A') \to \mathrm{Hom}(FA, FA')$ est un homomorphisme de groupes
- un <u>foncteur exact</u> $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un foncteur tel que

$$\left(\begin{array}{c} 0 \to A' \to A \to A'' \to 0 \\ \text{exacte dans } \mathcal{A} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c} 0 \to FA' \to FA \to FA'' \to 0 \\ \text{exacte dans } \mathcal{B} \end{array} \right)$$

Tous les foncteurs additifs n'induisent pas forcément d'homomorphisme $K_0(\mathcal{A}) \to K_0(\mathcal{B})$.
En revanche, c'est vrai pour les foncteurs exacts : si F exact, $\begin{array}{l} K_0(\mathcal{A}) \to K_0(\mathcal{B}) \\ [A] \mapsto [FA] \end{array}$ est un homomorphisme de groupes.

Définition : soit R un anneau noethérien. $M(R)$ désigne la sous-catégorie pleine de $\mathrm{mod}\, R$ dont les objets sont les R-modules de type fini.

$M(R)$ est abélienne.

On note alors $G_0(R) := K_0(M(R))$.

Exemple : si $R = \mathbb{K}$ est un corps, toute suite exacte dans $M(\mathbb{K})$ splits et on a alors $G_0(\mathbb{K}) = K_0(\mathbb{K}) = \mathbb{Z}$.

En particulier, si R est un anneau intègre et F est son corps de fractions, on a une flèche
$$\begin{array}{rcl} G_0(R) & \longrightarrow & G_0(F) = \mathbb{Z}, \\ [M] & \longmapsto & \dim_F(M \otimes_R F) \end{array}.$$

Exemple : $R = \mathbb{Z}$. On va montrer que $K_0(\mathbb{Z}) \cong G_0(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Pour chaque n, on a des s.e.c $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$.

Ainsi, $[\mathbb{Z}] = [\mathbb{Z}] + [\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$ dans $G_0(\mathbb{Z})$, d'où $[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}] = 0$.

Puis, le théorème de structure des groupes abéliens de type fini assure que tout g.a.t.f. est somme finie de copies de $\mathbb{Z}$ et des $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \geq 2$.

$G_0(\mathbb{Z})$ est donc engendré par $[\mathbb{Z}]$.

$\mathbb{Q}$ est le corps de fractions de $\mathbb{Z}$. On a en particulier $G_0(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}$.

On a donc une flèche
$$\begin{array}{rrcl} r : & G_0(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & [M] & \longmapsto & \dim_{\mathbb{Q}}(M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \end{array}$$

$r(\mathbb{Z}) = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = \dim(\mathbb{Q}) = 1$, donc le générateur de $G_0(\mathbb{Z})$ est envoyé sur celui de $\mathbb{Z}$, donc r est un isomorphisme, d'où $\underline{G_0(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}}$.

On termine par deux résultats :

Théorème de dévissage : (6.3 Weibel)

Soient $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ des petites catégories abéliennes. On suppose que

(1) $\mathcal{B}$ est une sous-catégorie exacte de $\mathcal{A}$, telle que les sous-objets et quotients d'objets de $\mathcal{B}$ restent dans $\mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ fermée par "prendre des sous-objets" et "quotienter")

(2) Tout objet A de $\mathcal{A}$ admet une filtration finie

$$A = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n = 0 \quad \text{telle que} \quad A_i / A_{i+1} \in \mathcal{B}.$$

Alors $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}$ est exact et $K_0(\mathcal{B}) \cong K_0(\mathcal{A})$.

Théorème (Théorème fondamental de la G_0-théorie des anneaux) (6.5 Weibel)

Soit R un anneau noethérien.

On a les inclusions $R \overset{i}{\hookrightarrow} R[t] \overset{j}{\hookrightarrow} R[t, t^{-1}]$.

Ces inclusions induisent des isomorphismes

$$G_0(R) \cong G_0(R[t]) \cong G_0(R[t,t^{-1}]).$$

Références :

- Weibel, The K-Book, an introduction to algebraic K-theory
- Rosenberg, Algebraic K-theory and its applications
- Riehl, Category theory in Context
- McLane, Categories for the Working Mathematician
- Freyd, Abelian Categories, an introduction to the theory of functors