# Déformations d'algèbres de Lie

Quentin EHRET

Séminaire doctorants, IRMA Strasbourg

24 février 2022

IRIMAS UNIVERSITÉ HAUTE-ALSACE
Institut de Recherche en Informatique, Mathématiques, Automatique et Signal
Département de Mathématiques

# Introduction et références

La notion de déformation apparaît dans les domaines suivants:

## Introduction et références

La notion de déformation apparaît dans les domaines suivants:

- Variétés complexes (Kodaira & Spencer; Kuranski):

# Introduction et références

La notion de déformation apparaît dans les domaines suivants:

- Variétés complexes (Kodaira & Spencer; Kuranski):
- Variétés algébriques (Artin, Schlessinger);

# Introduction et références

La notion de déformation apparaît dans les domaines suivants:

- Variétés complexes (Kodaira & Spencer; Kuranski):
- Variétés algébriques (Artin, Schlessinger);
- Algèbres de Lie (Nijenhuis & Richardson);

# Introduction et références

La notion de déformation apparaît dans les domaines suivants:

- Variétés complexes (Kodaira & Spencer; Kuranski):
- Variétés algébriques (Artin, Schlessinger);
- Algèbres de Lie (Nijenhuis & Richardson);
- Anneaux et algèbres associatives (Gerstenhaber).

# Introduction et références

La notion de déformation apparaît dans les domaines suivants:

- Variétés complexes (Kodaira & Spencer; Kuranski):
- Variétés algébriques (Artin, Schlessinger);
- Algèbres de Lie (Nijenhuis & Richardson);
- Anneaux et algèbres associatives (Gerstenhaber).

Applications:

- Quantification (Bayen et al., Kontsevitch $\Rightarrow$ médaille Fields, 1998);

# Introduction et références

La notion de déformation apparaît dans les domaines suivants:

- Variétés complexes (Kodaira & Spencer; Kuranski):
- Variétés algébriques (Artin, Schlessinger);
- Algèbres de Lie (Nijenhuis & Richardson);
- Anneaux et algèbres associatives (Gerstenhaber).

Applications:

- Quantification (Bayen et al., Kontsevitch $\Rightarrow$ médaille Fields, 1998);
- Classification.

Quelques références:

- Makhlouf, *A comparison of deformations and geometric study of varieties of associatives algebras* (overview);
- Nijenhuis, Richardson, *Cohomology and deformations in graded Lie algebras* (algèbres de Lie);
- Gerstenhaber, *On the deformations of rings and algebras* (algèbres associatives);
- Bayen, Flato, Fronsdal, Lichernerowicz, Steinhamer (Quantification);
- Bordemann, Makhlouf, Petit, *Deformation par quantification et rigidité des algèbres enveloppantes* (quantification);
- Evans, Fuchs, *A complex for the cohomology of restricted Lie algebras* (Lie en caractéristique $p > 0$).

# Caractéristique 0 - Généralités sur les algèbres de Lie

$\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos, de caractéristique 0.

## Définition

*Soit $L$ un $\mathbb{K}$-ev. Un* **crochet de Lie** *sur $L$ est une application bilinéaire $[\cdot,\cdot] : L \times L \longrightarrow L$ vérifiant, pour $x, y, z \in L$,*

1. $[x, y] = -[y, x]$ *(antisymétrie)*
2. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ *(Jacobi).*

*Si $L$ est équipé d'un tel crochet, on appelle le couple $(L, [\cdot,\cdot])$ une* **algèbre de Lie**.

# Caractéristique 0 - Généralités sur les algèbres de Lie

**Exemples:**

- $[x, y] = 0 \; \forall x, y \in L$ (algèbre abélienne);

# Caractéristique 0 - Généralités sur les algèbres de Lie

**Exemples:**

- $[x, y] = 0 \ \forall x, y \in L$ (algèbre abélienne);
- Si $\mu : L \times L \longrightarrow L$ est une loi d'algèbre associative (multiplication), alors

$$[x, y] := \mu(x, y) - \mu(y, x)$$

est un crochet de Lie sur $L$ appelé **commutateur**.

## Caractéristique 0 - Généralités sur les algèbres de Lie

**Exemples:**

- $[x, y] = 0 \ \forall x, y \in L$ (algèbre abélienne);
- Si $\mu : L \times L \longrightarrow L$ est une loi d'algèbre associative (multiplication), alors

$$[x, y] := \mu(x, y) - \mu(y, x)$$

est un crochet de Lie sur $L$ appelé **commutateur**.

**Conséquence importante:** $M_n(\mathbb{K})$ munie du commutateur est une algèbre de Lie.

# Caractéristique 0 - Généralités sur les algèbres de Lie

- Si $L = \mathbb{C}^2$, toute application bilinéaire antisymétrique est un crochet de Lie.

# Caractéristique 0 - Généralités sur les algèbres de Lie

- Si $L = \mathbb{C}^2$, toute application bilinéaire antisymétrique est un crochet de Lie.
- $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \{M \in M_n(\mathbb{C}),\ \ Tr(M) = 0\}$ munie du commutateur est une algèbre de Lie.

# Caractéristique 0 - Généralités sur les algèbres de Lie

**Définition**

*Une application linéaire* $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ *est un* **morphisme d'algèbres de Lie** *si* $\varphi([x,y]_1) = [\varphi(x),\varphi(y)]_2 \ \forall x,y \in L_1$.

# Caractéristique 0 - Généralités sur les algèbres de Lie

## Définition

*Une application linéaire* $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ *est un* **morphisme d'algèbres de Lie** *si* $\varphi([x,y]_1) = [\varphi(x), \varphi(y)]_2 \ \forall x, y \in L_1$.

## Définition

*Une représentation* $\rho : L \longrightarrow End(V)$ *est une* **représentation d'algèbres de Lie** *si* $\rho$ *est un morphisme d'algèbres de Lie, c'est-à-dire si* $\rho([x,y]) = \rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x)$.

**Remarque:** On dit aussi que $V$ est un $L$-module.

# Caractéristique 0 - Généralités sur les algèbres de Lie

**Exemple essentiel:** La représentation adjointe

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} : L &\longrightarrow \mathrm{End}(L) \\ x &\longmapsto \mathrm{ad}_x : y \longmapsto [x, y]. \end{aligned}$$

# Caractéristique 0 - Généralités sur les algèbres de Lie

**Exemple essentiel:** La représentation adjointe

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} : L &\longrightarrow \mathrm{End}(L) \\ x &\longmapsto \mathrm{ad}_x : y \longmapsto [x, y]. \end{aligned}$$

**Théorème (Ado)**

*Toute algèbre de Lie de dimension finie est une sous-algèbre de $End(V)$ muni du commutateur, pour un $V$ convenable.*

# Caractéristique 0 - Généralités sur les algèbres de Lie

## Proposition

*Prenons* $L = \mathbb{C}^2$. *A isomorphisme près, il n'existe que deux structures de Lie sur* $L$, *qui sont, en notant* $\{e_1, e_2\}$ *la base canonique de* $\mathbb{C}^2$*:*

- *l'algèbre abélienne;*
- $[e_1, e_2] = e_2$.

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

On souhaite construire un **complexe de cochaînes** associé à $L$:

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2 \xrightarrow{d^2} C^3 \xrightarrow{d^3} \ldots$$

Les $C_i$ étant des $L$-modules et les $d^j$ des applications linéaires vérifiant

$$d^{j+1} \circ d^j = 0.$$

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

Soit $L$ une algèbre de Lie et $M$ un $L$-module. On pose pour $q \geq 0$:

$$C^q_{CE}(L, M) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\wedge^q L, M\right).$$

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

Soit $L$ une algèbre de Lie et $M$ un $L$-module. On pose pour $q \geq 0$:

$$C_{CE}^{q}(L, M) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\wedge^{q} L, M\right).$$

Ce sont les applications $\varphi : L^{\times q} \longrightarrow M$, $q$-linéaires et antisymétriques.

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

Soit $L$ une algèbre de Lie et $M$ un $L$-module. On pose pour $q \geq 0$:

$$C^q_{CE}(L, M) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\wedge^q L, M\right).$$

Ce sont les applications $\varphi : L^{\times q} \longrightarrow M$, $q$-linéaires et antisymétriques.

En particulier, elles vérifient

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_q,\ \ \varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(q)}) = \mathrm{sign}(\sigma)\varphi(x_1, \dots, x_q).$$

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

Soit $L$ une algèbre de Lie et $M$ un $L$-module. On pose pour $q \geq 0$:

$$C^q_{CE}(L, M) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\wedge^q L, M\right).$$

Ce sont les applications $\varphi : L^{\times q} \longrightarrow M$, $q$-linéaires et antisymétriques.

En particulier, elles vérifient

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_q, \; \varphi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(q)}) = \mathrm{sign}(\sigma)\varphi(x_1, \ldots, x_q).$$

**Remarque:** si $(L, [\cdot, \cdot])$ est une algèbre de Lie, alors le crochet $[\cdot, \cdot]$ est un élément de $C^2_{CE}(L, L)$.

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

On souhaite ensuite équiper ce complexe $C^*_{CE}(L, M)$ d'applications particulières, appelées **différentielles**:

$$d^q_{CE} : C^q_{CE}(L, M) \longrightarrow C^{q+1}_{CE}(L, M),$$

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

On souhaite ensuite équiper ce complexe $C^*_{CE}(L, M)$ d'applications particulières, appelées **différentielles**:

$$d^q_{CE} : C^q_{CE}(L, M) \longrightarrow C^{q+1}_{CE}(L, M),$$

données par

$$\begin{aligned} d^q_{CE}\varphi(x_1, \ldots, x_{q+1}) = & \sum_{1\leq i<j\leq q+1} (-1)^{i+j-1}\varphi\left([x_i, x_j], x_1, \ldots\hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{q+1}\right) \\ & + \sum_{1\leq i}^{q+1}(-1)^i x_i \cdot \varphi\left(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{q+1}\right). \end{aligned}$$

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

**Lemme**

*Ces applications vérifient* $d_{CE}^{q+1} \circ d_{CE}^{q} = 0, \quad \forall q \geq 0.$

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

**Lemme**

*Ces applications vérifient* $d_{CE}^{q+1} \circ d_{CE}^{q} = 0, \quad \forall q \geq 0.$

1. $\left(C_{CE}^{q}(L, M), d_{CE}^{q}\right)_{q \leq 0}$ est un **complexe de cochaînes**.

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

**Lemme**

*Ces applications vérifient* $d_{CE}^{q+1} \circ d_{CE}^{q} = 0, \quad \forall q \geq 0.$

1. $\left(C_{CE}^{q}(L, M), d_{CE}^{q}\right)_{q \leq 0}$ est un **complexe de cochaînes**.
2. On note $Z_{CE}^{q}(L, M) = \ker(d_{CE}^{q})$ (**q-cocycles**).

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

## Lemme

*Ces applications vérifient* $d_{CE}^{q+1} \circ d_{CE}^{q} = 0, \quad \forall q \geq 0.$

1. $(C_{CE}^{q}(L, M), d_{CE}^{q})_{q \leq 0}$ est un **complexe de cochaînes**.
2. On note $Z_{CE}^{q}(L, M) = \ker(d_{CE}^{q})$ (**q-cocycles**).
3. On note $B_{CE}^{q}(L, M) = \mathrm{im}(d_{CE}^{q-1})$ (**q-cobords**).

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

**Lemme**

*Ces applications vérifient* $d_{CE}^{q+1} \circ d_{CE}^{q} = 0, \quad \forall q \geq 0.$

1. $\left(C_{CE}^{q}(L,M), d_{CE}^{q}\right)_{q\leq 0}$ est un **complexe de cochaînes**.
2. On note $Z_{CE}^{q}(L,M) = \ker(d_{CE}^{q})$ (**q-cocycles**).
3. On note $B_{CE}^{q}(L,M) = \mathrm{im}(d_{CE}^{q-1})$ (**q-cobords**).
4. Grâce au lemme, on a $B_{CE}^{q}(L,M) \subset Z_{CE}^{q}(L,M)$. On peut donc considérer l'espace vectoriel quotient

$$H_{CE}^{q}(L,M) := Z_{CE}^{q}(L,M)/B_{CE}^{q}(L,M).$$

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

**Lemme**

*Ces applications vérifient* $d_{CE}^{q+1} \circ d_{CE}^{q} = 0, \quad \forall q \geq 0.$

1. $\left(C_{CE}^{q}(L, M), d_{CE}^{q}\right)_{q \leq 0}$ est un **complexe de cochaînes**.
2. On note $Z_{CE}^{q}(L, M) = \ker(d_{CE}^{q})$ (**q-cocycles**).
3. On note $B_{CE}^{q}(L, M) = \mathrm{im}(d_{CE}^{q-1})$ (**q-cobords**).
4. Grâce au lemme, on a $B_{CE}^{q}(L, M) \subset Z_{CE}^{q}(L, M)$. On peut donc considérer l'espace vectoriel quotient

$$H_{CE}^{q}(L, M) := Z_{CE}^{q}(L, M)/B_{CE}^{q}(L, M).$$

C'est le **q**$^{eme}$ **groupe de cohomologie de Chevalley-Eilenberg de L**.

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

**Point de vue de Nijenhuis-Richardson.**

Soient $\varphi \in \mathrm{Hom}(\wedge^n L, L)$ et $\psi \in \mathrm{Hom}(\wedge^q L, L)$, on définit $\varphi \odot \psi \in \mathrm{Hom}(\wedge^{n+q-1} L, L)$ par

$$\varphi \odot \psi(x_1, \dots, x_{n+q-1}) = \sum_{\sigma \in Sh(n,q)} \varphi\left(\psi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(q)}), x_{\sigma(q+1)}, \dots, x_{\sigma(n+q-1)}\right),$$

avec

$$Sh(n,q) = \{\sigma \in \mathfrak{S},\ \sigma(1) < \dots < \sigma(q) \text{ et } \sigma(q+1) < \dots < \sigma(n+q-1)\}.$$

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

**Point de vue de Nijenhuis-Richardson.**

Soient $\varphi \in \mathrm{Hom}(\wedge^n L, L)$ et $\psi \in \mathrm{Hom}(\wedge^q L, L)$, on définit $\varphi \odot \psi \in \mathrm{Hom}(\wedge^{n+q-1} L, L)$ par

$$\varphi \odot \psi(x_1, \ldots, x_{n+q-1}) = \sum_{\sigma \in Sh(n,q)} \varphi\left(\psi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(q)}), x_{\sigma(q+1)}, \ldots, x_{\sigma(n+q-1)}\right),$$

avec

$$Sh(n,q) = \{\sigma \in \mathfrak{S},\ \sigma(1) < \ldots < \sigma(q) \text{ et } \sigma(q+1) < \ldots < \sigma(n+q-1)\}.$$

On a ainsi le **crochet de Nijenhuis-Richardson**, donné par

$$[\varphi, \psi]_{NR} = \varphi \odot \psi - (-1)^{(n-1)(q-1)} \psi \odot \varphi.$$

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

Avec ce crochet, $(\mathrm{Hom}(\wedge^q L, L))_{q \geq 0}$ devient une **algèbre de Lie graduée**: le crochet vérifie l'identité de Jacobi graduée

$$[\varphi, [\psi, \theta]] = [[\varphi, \psi], \theta] + (-1)^{(n-1)(q-1)}[\psi, [\varphi, \theta]],$$

pour $\varphi \in \mathrm{Hom}(\wedge^n L, L)$, $\psi \in \mathrm{Hom}(\wedge^q L, L)$, $\theta \in \mathrm{Hom}(\wedge^m L, L)$.

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

Avec ce crochet, $(\mathrm{Hom}(\wedge^q L, L))_{q\geq 0}$ devient une **algèbre de Lie graduée**: le crochet vérifie l'identité de Jacobi graduée

$$[\varphi,[\psi,\theta]] = [[\varphi,\psi],\theta] + (-1)^{(n-1)(q-1)}[\psi,[\varphi,\theta]],$$

pour $\varphi \in \mathrm{Hom}(\wedge^n L, L)$, $\psi \in \mathrm{Hom}(\wedge^q L, L)$, $\theta \in \mathrm{Hom}(\wedge^m L, L)$.

## Proposition

*Soit $(L,[\cdot,\cdot])$ une algèbre de Lie. Avec ce formalisme, on a*

$$d^q_{CE}\varphi = [[\cdot,\cdot],\varphi]_{NR}\,.$$

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

**Séries formelles et déformations.**

- Si $V$ est un $\mathbb{K}$-ev, on note $V[[t]]$ l'espace des séries formelles à coefficients dans $V$, de la forme

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i, \quad a_i \in V.$$

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

**Séries formelles et déformations.**

- Si $V$ est un $\mathbb{K}$-ev, on note $V[[t]]$ l'espace des séries formelles à coefficients dans $V$, de la forme

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i, \quad a_i \in V.$$

- Si $V \equiv \mathbb{K}$, $\mathbb{K}[[t]]$ est un anneau pour l'addition terme à terme et pour le produit de Cauchy:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j\right) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right).$$

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

- $V[[t]]$ est un $\mathbb{K}[[t]]$-module pour l'action donnée par ce même produit de Cauchy:

$$\mathbb{K}[[t]] \times V[[t]] \longrightarrow V[[t]]$$
$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i, \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j\right) \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} t^k \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right).$$

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

## Définition

*Soit* $(L, [\cdot,\cdot])$ *une algèbre de Lie. Une* **déformation formelle** *de* $L$ *est la donnée d'une application* $\mathbb{K}[[t]]$*-bilinéaire*

$$\mu_t : L[[t]] \times L[[t]] \longrightarrow L[[t]],$$

*que l'on définit sur* $L \times L$ *par*

$$\mu_t(x,y) = \sum_{i \geq 0} t^i \mu_i(x,y),$$

*avec* $\mu_0 = [\cdot,\cdot]$ *et* $\mu_i : L \longrightarrow L$ *bilinéaires antisymétriques telles que*

$$\mu_t(x, \mu_t(y,z)) + \mu_t(y, \mu_t(z,x)) + \mu_t(z, \mu_t(x,y)) = 0, \ \forall x,y,z \in L.$$

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

$$\mu_t(x, \mu_t(y, z)) + \mu_t(y, \mu_t(z, x)) + \mu_t(z, \mu_t(x, y)) = 0, \ \forall x, y, z \in L.$$

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

$$\mu_t(x, \mu_t(y, z)) + \mu_t(y, \mu_t(z, x)) + \mu_t(z, \mu_t(x, y)) = 0, \ \forall x, y, z \in L.$$

Cette équation s'appelle **équation de déformation**. Elle induit un système infini. En la développant et en prenant chaque puissance de $t$, on obtient, pour $q \geq 0$:

## Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

$$\mu_t(x, \mu_t(y, z)) + \mu_t(y, \mu_t(z, x)) + \mu_t(z, \mu_t(x, y)) = 0, \ \forall x, y, z \in L.$$

Cette équation s'appelle **équation de déformation**. Elle induit un système infini. En la développant et en prenant chaque puissance de $t$, on obtient, pour $q \geq 0$:

$$\sum_{i=0}^{q} (\mu_i(x, \mu_{q-i}(y, z)) + \mu_i(y, \mu_{q-i}(z, x)) + \mu_i(z, \mu_{q-i}(x, y))) = 0$$

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

$$\mu_t(x, \mu_t(y, z)) + \mu_t(y, \mu_t(z, x)) + \mu_t(z, \mu_t(x, y)) = 0, \ \forall x, y, z \in L.$$

Cette équation s'appelle **équation de déformation**. Elle induit un système infini. En la développant et en prenant chaque puissance de $t$, on obtient, pour $q \geq 0$:

$$\sum_{i=0}^{q} (\mu_i(x, \mu_{q-i}(y, z)) + \mu_i(y, \mu_{q-i}(z, x)) + \mu_i(z, \mu_{q-i}(x, y))) = 0$$

**Remarque:** pour $q = 0$, on retrouve l'identité de Jacobi usuelle.

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

En prenant $q = 1$ dans l'équation précédente, on a le résultat suivant:

**Proposition**

*Soit* $(L, [\cdot, \cdot])$ *une algèbre de Lie, et* $\mu_t = \sum \mu_i t^i$ *une déformation formelle de* $L$. *Alors* $\mu_1 \in Z^2_{CE}(L, L)$.

## Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

En prenant $q = 1$ dans l'équation précédente, on a le résultat suivant:

**Proposition**

*Soit $(L, [\cdot, \cdot])$ une algèbre de Lie, et $\mu_t = \sum \mu_i t^i$ une déformation formelle de L. Alors $\mu_1 \in Z^2_{CE}(L, L)$.*

**Remarques:**

1. $L$ est vu comme un $L$-module via l'action adjointe.

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

En prenant $q = 1$ dans l'équation précédente, on a le résultat suivant:

**Proposition**

*Soit $(L, [\cdot,\cdot])$ une algèbre de Lie, et $\mu_t = \sum \mu_i t^i$ une déformation formelle de $L$. Alors $\mu_1 \in Z^2_{CE}(L, L)$.*

**Remarques:**

1. $L$ est vu comme un $L$-module via l'action adjointe.
2. si $\mu_1 = ... = \mu_{q-1} = 0$, alors $\mu_q \in Z^2_{CE}(L, L)$.

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

En prenant $q = 1$ dans l'équation précédente, on a le résultat suivant:

**Proposition**

*Soit $(L, [\cdot, \cdot])$ une algèbre de Lie, et $\mu_t = \sum \mu_i t^i$ une déformation formelle de $L$. Alors $\mu_1 \in Z^2_{CE}(L, L)$.*

**Remarques:**

1. $L$ est vu comme un $L$-module via l'action adjointe.
2. si $\mu_1 = ... = \mu_{q-1} = 0$, alors $\mu_q \in Z^2_{CE}(L, L)$.
3. De manière générale, le premier terme non nul de la déformation ($\mu_q$ ci-dessus) est appelé **élément infinitésimal** de la déformation.

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

**Obstructions.**

L'étude de la réciproque de ce théorème conduit à l'étude des obstructions.

**Définition**

*Soit $\varphi \in Z^2_{CE}(L, L)$ un 2-cocycle. $\varphi$ est dit* **intégrable** *si il existe une déformation formelle de $L$ admettant $\varphi$ comme élément infinitésimal.*

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

**Obstructions.**

L'étude de la réciproque de ce théorème conduit à l'étude des obstructions.

**Définition**

*Soit $\varphi \in Z^2_{CE}(L, L)$ un 2-cocycle. $\varphi$ est dit* **intégrable** *si il existe une déformation formelle de $L$ admettant $\varphi$ comme élément infinitésimal.*

**Définition**

*Une déformation de $L$ d'ordre $n$ est une déformation de la forme*

$$\mu_t^n = \sum_{i=0}^{n} t^i \mu_i.$$

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

## Définition

*Soit $\mu_t^n$ une déformation d'ordre $n$ de $L$. On définit pour $x, y, z \in L$:*

$$obs_{n+1}(x,y,z) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x, \mu_{n+1-i}(y,z)) + \mu_i(y, \mu_{n+1-i}(z,x)) + \mu_i(z, \mu_{n+1-i}(x,y)).$$

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

**Proposition**

*Soit* $\mu_t^n$ *une déformation d'ordre n de L. Si on pose* $\mu_t^{n+1} = \mu_t^n + t^{n+1}\mu_{n+1}$, *pour* $\mu_{n+1} \in C^2_{CE}$, *alors*

$$\mu_t^{n+1} \text{ est une déformation de } L \text{ d'ordre } n{+}1 \iff obs_{n+1} = d^2_{CE}\mu_{n+1}.$$

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

**Proposition**

*Soit $\mu_t^n$ une déformation d'ordre n de L. Si on pose $\mu_t^{n+1} = \mu_t^n + t^{n+1}\mu_{n+1}$, pour $\mu_{n+1} \in C^2_{CE}$, alors*

$$\mu_t^{n+1} \text{ est une déformation de } L \text{ d'ordre } n+1 \iff obs_{n+1} = d^2_{CE}\mu_{n+1}.$$

**Proposition**

*Soit $\mu_t^n$ une déformation d'ordre n de L. Alors $obs_{n+1} \in Z^3_{CE}(L, L)$.*

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

**Théorème**

1. *Si* $H^3_{CE}(L, L) = 0$, *tout 2-cocycle est intégrable.*
2. *Une déformation d'ordre n s'étend en une déformation d'ordre* $n+1$ *si et seulement si la classe de cohomologie de* $obs_{n+1}$ *est nulle.*

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

**Equivalence de déformations formelles.**
Si $V$ est un espace vectoriel, un **automorphisme formel** $\phi_t : V[[t]] \longrightarrow V[[t]]$ est la donnée d'une famille $\phi_i : L \longrightarrow L$ d'applications telles que $\phi_t = \sum_{i \geq 0} t^i \phi_i$, avec $\phi_0 = id$.

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

**Equivalence de déformations formelles.**
Si $V$ est un espace vectoriel, un **automorphisme formel** $\phi_t : V[[t]] \longrightarrow V[[t]]$ est la donnée d'une famille $\phi_i : L \longrightarrow L$ d'applications telles que $\phi_t = \sum_{i \geq 0} t^i \phi_i$, avec $\phi_0 = id$.

## Définition

*Soient $\mu_t$ et $\nu_t$ deux déformations formelles d'une algèbre de Lie $L$. On dit qu'elles sont* **équivalentes** *s'il existe un automorphisme formel $\phi_t$ tel que, pour $x, y \in L$,*

$$\phi_t(\mu_t(x, y)) = \nu_t(\phi_t(x), \phi_t(y)).$$

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

En développant la relation $\phi_t(\mu_t(x,y)) = \nu_t(\phi_t(x), \phi_t(y))$, on obtient facilement que

$$\nu_1(x,y) = \mu_1(x,y) + d^1_{CE}\phi_1(x,y).$$

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

En développant la relation $\phi_t(\mu_t(x, y)) = \nu_t(\phi_t(x), \phi_t(y))$, on obtient facilement que

$$\nu_1(x, y) = \mu_1(x, y) + d^1_{CE}\phi_1(x, y).$$

**Proposition**

*Si $\mu_t$ et $\nu_t$ sont deux déformations de L équivalentes, alors leurs éléments infinitésimaux sont dans la même classe de cohomologie.*

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

## Définition

1. *on appelle* **déformation triviale** *la déformation donnée par* $\mu_t^0 := [\cdot, \cdot]$.
2. *Si toute déformation de $L$ est équivalente à la déformation triviale, on dit que $L$ est* **formellement rigide**.
3. *Si $H^2_{CE}(L, L) = 0$, $L$ est dite* **algébriquement rigide**.

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

## Définition

1. *on appelle* **déformation triviale** *la déformation donnée par* $\mu_t^0 := [\cdot, \cdot]$.
2. *Si toute déformation de $L$ est équivalente à la déformation triviale, on dit que $L$ est* **formellement rigide**.
3. *Si $H^2_{CE}(L, L) = 0$, $L$ est dite* **algébriquement rigide**.

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

## Théorème

1. *Toute déformation formelle de L est équivalente à une déformation de la forme*

$$\mu_t = \sum_{i \geq q} t^i \mu_i, \quad \mu_q \in Z^2_{CE}(L, L) \setminus B^2_{CE}(L, L).$$

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

## Théorème

1. *Toute déformation formelle de L est équivalente à une déformation de la forme*

$$\mu_t = \sum_{i \geq q} t^i \mu_i, \quad \mu_q \in Z^2_{CE}(L, L) \setminus B^2_{CE}(L, L).$$

2. *SI $H^2_{CE}(L, L) = 0$, toute déformation de L est triviale.*

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

## Théorème

1. *Toute déformation formelle de $L$ est équivalente à une déformation de la forme*

$$\mu_t = \sum_{i \geq q} t^i \mu_i, \quad \mu_q \in Z^2_{CE}(L, L) \setminus B^2_{CE}(L, L).$$

2. *SI $H^2_{CE}(L, L) = 0$, toute déformation de $L$ est triviale.*

**Remarques**:

1. rigidité algébrique $\Longrightarrow$ rigidité formelle, réciproque fausse.

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

**Théorème**

1. *Toute déformation formelle de $L$ est équivalente à une déformation de la forme*

$$\mu_t = \sum_{i \geq q} t^i \mu_i, \quad \mu_q \in Z^2_{CE}(L,L) \setminus B^2_{CE}(L,L).$$

2. *SI $H^2_{CE}(L,L) = 0$, toute déformation de $L$ est triviale.*

**Remarques**:

1. rigidité algébrique $\Longrightarrow$ rigidité formelle, réciproque fausse.
2. il y a une correspondance bijective entre les éléments de $H^2_{CE}(L,L)$ et les éléments infinitésimaux de déformations non-équivalentes. Ainsi, $H^2_{CE}(L,L)$ classifie entièrement les déformations infinitésimales de la forme $\mu_t = [\cdot,\cdot] + t\mu_1$.

## Caractéristique $p$ - Algèbres de Lie restreintes

Soit $\mathbb{F}$ un corps de caractéristique $p > 3$ et $A$ une $\mathbb{F}$-algèbre associative. Munie du commutateur, c'est une algèbre de Lie. La représentation adjointe est alors donnée par

$$\mathrm{ad}_x(y) = xy - yx.$$

# Caractéristique $p$ - Algèbres de Lie restreintes

Soit $\mathbb{F}$ un corps de caractéristique $p > 3$ et $A$ une $\mathbb{F}$-algèbre associative. Munie du commutateur, c'est une algèbre de Lie. La représentation adjointe est alors donnée par

$$\mathrm{ad}_x(y) = xy - yx.$$

Si $m > 0$, un rapide calcul donne

$$\mathrm{ad}_x^m(y) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{m-j} x^j y x^{m-j}.$$

# Caractéristique $p$ - Algèbres de Lie restreintes

Soit $\mathbb{F}$ un corps de caractéristique $p > 3$ et $A$ une $\mathbb{F}$-algèbre associative. Munie du commutateur, c'est une algèbre de Lie. La représentation adjointe est alors donnée par

$$\mathrm{ad}_x(y) = xy - yx.$$

Si $m > 0$, un rapide calcul donne

$$\mathrm{ad}_x^m(y) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{m-j} x^j y x^{m-j}.$$

Ainsi, si $m = p$, on a la relation

$$\mathrm{ad}_x^p(y) = x^p y - y x^p = \mathrm{ad}_{x^p}(y).$$

# Caractéristique $p$ - Algèbres de Lie restreintes

1. On a donc une sympathique relation entre le commutateur et le morphisme de Frobenius $x \longmapsto x^p$.
2. A-t-on une relation entre la loi additive et le morphisme de Frobenius?

# Caractéristique $p$ - Algèbres de Lie restreintes

1. On a donc une sympathique relation entre le commutateur et le morphisme de Frobenius $x \longmapsto x^p$.
2. A-t-on une relation entre la loi additive et le morphisme de Frobenius?

**Lemme**

*Soit $A$ associative et $a, b \in A$. Alors*

$$(a+b)^p = a^p + b^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(a,b),$$

*avec $is_i(a,b)$ le coefficient de $X^{i-1}$ dans l'expression $\mathrm{ad}^{p-1}_{aX+b}(a)$.*

# Caractéristique $p$ - Algèbres de Lie restreintes

1. On a donc une sympathique relation entre le commutateur et le morphisme de Frobenius $x \longmapsto x^p$.
2. A-t-on une relation entre la loi additive et le morphisme de Frobenius?

**Lemme**

*Soit $A$ associative et $a, b \in A$. Alors*

$$(a+b)^p = a^p + b^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(a,b),$$

*avec $is_i(a,b)$ le coefficient de $X^{i-1}$ dans l'expression $\mathrm{ad}_{aX+b}^{p-1}(a)$.*

$\rightsquigarrow$ c'est beaucoup moins sympathique.

# Caractéristique $p$ - Les $p$-mappings

L'exemple précédent motive la définition suivante.

## Définition

*Une* **algèbre de Lie restreinte** *est une algèbre de Lie $L$ équipée d'une application $(\cdot)^{[p]} : L \longrightarrow L$ telle que*

1. $(\lambda x)^{[p]} = \lambda^p x^{[p]}$, $x \in L$, $\lambda \in \mathbb{F}$;

# Caractéristique $p$ - Les $p$-mappings

L'exemple précédent motive la définition suivante.

## Définition

*Une* **algèbre de Lie restreinte** *est une algèbre de Lie $L$ équipée d'une application $(\cdot)^{[p]} : L \longrightarrow L$ telle que*

1. $(\lambda x)^{[p]} = \lambda^p x^{[p]}$, $x \in L$, $\lambda \in \mathbb{F}$;
2. $\left[x, y^{[p]}\right] = [[...[x, \overbrace{y], y], ..., y}^{p \text{ terms}}]$;

# Caractéristique $p$ - Les $p$-mappings

L'exemple précédent motive la définition suivante.

## Définition

*Une* **algèbre de Lie restreinte** *est une algèbre de Lie $L$ équipée d'une application $(\cdot)^{[p]} : L \longrightarrow L$ telle que*

1. $(\lambda x)^{[p]} = \lambda^p x^{[p]}$, $x \in L$, $\lambda \in \mathbb{F}$;
2. $\left[x, y^{[p]}\right] = [[...[x, \overbrace{y], y], ..., y}^{p \text{ terms}}]$;
3. $(x+y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(x,y)$,

*avec* $is_i(x,y)$ *le coefficient of* $Z^{i-1}$ *in* $\mathrm{ad}^{p-1}_{Zx+y}(x)$. *une telle application* $(-)^{[p]} : L \longrightarrow L$ *est appelée p-map.*

# Caractéristique $p$ - Les $p$-mappings

**Remarques:**

1. Toutes les algèbres associatives peuvent être vues comme algèbres de Lie restreintes avec morphisme de Frobenius $x \longmapsto x^p$.

# Caractéristique $p$ - Les $p$-mappings

**Remarques:**

1. Toutes les algèbres associatives peuvent être vues comme algèbres de Lie restreintes avec morphisme de Frobenius $x \longmapsto x^p$.
2. Si $L$ est abélienne, n'importe quelle application $p$-semilinéaire (telle que $\varphi(\lambda x + y) = \lambda^p \varphi(x) + \varphi(y), \ \lambda \in \mathbb{F}, \ x, y \in L$) est une $p$-map.

# Caractéristique $p$ - Les $p$-mappings

**Remarques:**

1. Toutes les algèbres associatives peuvent être vues comme algèbres de Lie restreintes avec morphisme de Frobenius $x \longmapsto x^p$.
2. Si $L$ est abélienne, n'importe quelle application $p$-semilinéaire (telle que $\varphi(\lambda x + y) = \lambda^p \varphi(x) + \varphi(y), \ \lambda \in \mathbb{F}, \ x, y \in L$) est une $p$-map.
3. Expression pratique:

$$\sum_{i=1}^{p-1} s_i(x,y) = \sum_{\substack{x_i = x \text{ or } y \\ x_p = x, \ x_{p-1} = y}} \frac{1}{\sharp\{x\}} [x_1, [x_2, [\ldots, [x_{p-1}, x_p] \ldots],$$

# Caractéristique $p$ - Les $p$-mappings

**Définition**

*Si $L$ est une algèbre de Lie, son centre est défini par*

$$C(L) = \{x \in L,\ [x, y] = 0\ \forall y \in L\}.$$

# Caractéristique $p$ - Les $p$-mappings

## Définition

*Si L est une algèbre de Lie, son centre est défini par*

$$C(L) = \{x \in L,\ [x,y] = 0\ \forall y \in L\}.$$

## Proposition

*Soit L une algèbre de Lie. Alors toutes les p-maps sur L sont égales modulo un élément central:*

$$(\cdot)^{[p]_1},\ (\cdot)^{[p]_2}\ p\text{-maps} \iff \exists\ f : L \longrightarrow C(L),\ (\cdot)^{[p]_1} = (\cdot)^{[p]_2} + f.$$

**Conséquence:** si $L$ est simple, alors la $p$-map est unique.

# Caractéristique $p$ - Un peu de cohomologie restreinte

**Historique:**

- En 1954, dans son article *Cohomology of Restricted Lie Algebras*, Hochschild donne une construction complète de la cohomologie des algèbres de Lie restreintes.

# Caractéristique $p$ - Un peu de cohomologie restreinte

**Historique:**

- En 1954, dans son article *Cohomology of Restricted Lie Algebras*, Hochschild donne une construction complète de la cohomologie des algèbres de Lie restreintes.
- Mais sa construction ne permet de faire presque aucun calcul concret.

# Caractéristique $p$ - Un peu de cohomologie restreinte

**Historique:**

- En 1954, dans son article *Cohomology of Restricted Lie Algebras*, Hochschild donne une construction complète de la cohomologie des algèbres de Lie restreintes.
- Mais sa construction ne permet de faire presque aucun calcul concret.
- En 2000, D. Fuchs et T. J. Evans proposent une construction plus adaptée aux calculs dans la thèse de ce dernier.

# Caractéristique $p$ - Un peu de cohomologie restreinte

**Historique:**

- En 1954, dans son article *Cohomology of Restricted Lie Algebras*, Hochschild donne une construction complète de la cohomologie des algèbres de Lie restreintes.
- Mais sa construction ne permet de faire presque aucun calcul concret.
- En 2000, D. Fuchs et T. J. Evans proposent une construction plus adaptée aux calculs dans la thèse de ce dernier.
- Mais cela reste très incomplet...

# Caractéristique $p$ - Un peu de cohomologie restreinte

**Le cas abélien:**
Si $L$ est une algèbre de Lie restreinte **abélienne** et $M$ un $L$-module (restreint), on note

$$\mathrm{Hom}(\bar{L}, M) = \{\varphi : L \longrightarrow M, \varphi(\lambda x + y) = \lambda^p \varphi(x) + \varphi(y)\}.$$

# Caractéristique $p$ - Un peu de cohomologie restreinte

**Le cas abélien:**

Si $L$ est une algèbre de Lie restreinte **abélienne** et $M$ un $L$-module (restreint), on note

$$\mathrm{Hom}(\overline{L}, M) = \{\varphi : L \longrightarrow M, \varphi(\lambda x + y) = \lambda^p \varphi(x) + \varphi(y)\}\,.$$

On construit un nouveau complexe:

$$C^k_{ab}(L, M) = \bigoplus_{2t+s=k} \mathrm{Hom}\left(S^t \overline{L} \otimes \wedge^s L, M\right), \quad 0 \leq k < p.$$

# Caractéristique $p$ - Un peu de cohomologie restreinte

On définit de nouvelles différentielles sur $C^k_{ab}(L, M)$:

$$\begin{aligned} d^k_{ab} : C^k_{ab}(L, M) &\longrightarrow C^{k+1}_{ab}(L, M) \\ \{\gamma_t\}_{0 \leq t \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor} &\longmapsto \{\beta_t\}_{0 \leq t \leq \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}, \end{aligned}$$

# Caractéristique $p$ - Un peu de cohomologie restreinte

On définit de nouvelles différentielles sur $C^k_{ab}(L, M)$:

$$\begin{aligned} d^k_{ab} : C^k_{ab}(L, M) &\longrightarrow C^{k+1}_{ab}(L, M) \\ \{\gamma_t\}_{0\leq t\leq \lfloor \frac{k}{2}\rfloor} &\longmapsto \{\beta_t\}_{0\leq t\leq \lfloor \frac{k+1}{2}\rfloor}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \beta_t(x_1, \dots, x_t; y_1, \dots, y_s) = &\sum_{j=1}^{s} (-1)^j y_j \cdot \gamma_t(x_1, \dots, x_t; y_1, \dots, \hat{y}_j, \dots, y_s) \\ &+ \sum_{i=1}^{t} \gamma_{t-1}(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_t; x_i^{[p]}, y_1, \dots, y_s) \\ &+ \sum_{i=1}^{t} x_i^{p-1} \cdot \gamma_{t-1}(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_t; x_i, y_1, \dots, y_s). \end{aligned}$$

# Caractéristique $p$ - Un peu de cohomologie restreinte

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & \mathrm{Hom}(L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\wedge^2 L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\wedge^3 L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\wedge^4 L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\wedge^5 L,M) \ \ldots \\
 & & & \bigoplus & \bigoplus & \bigoplus & \bigoplus \\
 & & & \mathrm{Hom}(\bar{L},M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\bar{L}\otimes L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\bar{L}\otimes \wedge^2 L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\bar{L}\otimes \wedge^3 L,M) \ \ldots \\
 & & & & & \bigoplus & \bigoplus \\
 & & & & & \mathrm{Hom}(S^2\bar{L},M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(S^2\bar{L}\otimes L,M) \ \ldots
\end{tikzcd}
$$

# Caractéristique $p$ - Un peu de cohomologie restreinte

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & \mathrm{Hom}(L,M) \arrow[r] \arrow[drr] & \mathrm{Hom}(\wedge^2 L,M) \arrow[r] \arrow[drr] & \mathrm{Hom}(\wedge^3 L,M) \arrow[r] \arrow[drr] & \mathrm{Hom}(\wedge^4 L,M) \arrow[r] \arrow[drr] & \mathrm{Hom}(\wedge^5 L,M) \ldots \\
 & & & \bigoplus & \bigoplus & \bigoplus & \bigoplus \\
 & & & \mathrm{Hom}(\bar{L},M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\bar{L}\otimes L,M) \arrow[r] \arrow[drr] & \mathrm{Hom}(\bar{L}\otimes\wedge^2 L,M) \arrow[r] \arrow[drr] & \mathrm{Hom}(\bar{L}\otimes\wedge^3 L,M) \ldots \\
 & & & & & \bigoplus & \bigoplus \\
 & & & & & \mathrm{Hom}(S^2\bar{L},M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(S^2\bar{L}\otimes L,M) \ldots
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
d^1_{ab} : \mathrm{Hom}(L,M) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(\wedge^2 L,M) \oplus \mathrm{Hom}(\bar{L},M) \\
\gamma_0 &\longmapsto \{\beta_0,\beta_1\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_0(y_1,y_2) &= y_2\gamma_0(y_1) - y_1\gamma_0(y_2); \\
\beta_1(x) &= \gamma_0(x^{[p]}) + x^{p-1}\gamma_0(x).
\end{aligned}
$$

# Caractéristique $p$ - Un peu de cohomologie restreinte

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & \mathrm{Hom}(L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\wedge^2 L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\wedge^3 L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\wedge^4 L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\wedge^5 L,M) \ \dots \\
 & & & \bigoplus & \bigoplus & \bigoplus & \bigoplus \\
 & & & \mathrm{Hom}(\bar{L},M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\bar{L}\otimes L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\bar{L}\otimes \wedge^2 L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\bar{L}\otimes \wedge^3 L,M) \ \dots \\
 & & & & & \bigoplus & \bigoplus \\
 & & & & & \mathrm{Hom}(S^2\bar{L},M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(S^2\bar{L}\otimes L,M) \ \dots
\end{tikzcd}
$$

# Caractéristique $p$ - Un peu de cohomologie restreinte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & \mathrm{Hom}(L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\wedge^2 L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\wedge^3 L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\wedge^4 L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\wedge^5 L,M) \dots \\
 & & & \bigoplus & \bigoplus & \bigoplus & \bigoplus \\
 & & & \mathrm{Hom}(\bar{L},M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\bar{L}\otimes L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\bar{L}\otimes\wedge^2 L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\bar{L}\otimes\wedge^3 L,M) \dots \\
 & & & & & \bigoplus & \bigoplus \\
 & & & & & \mathrm{Hom}(S^2\bar{L},M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(S^2\bar{L}\otimes L,M) \dots
\end{tikzcd}$$

$$d^2_{ab} : \mathrm{Hom}(\wedge^2 L, M) \oplus \mathrm{Hom}(\bar{L}, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\wedge^3 L, M) \oplus \mathrm{Hom}(\bar{L} \otimes L, M)$$
$$\{\gamma_0, \gamma_1\} \longmapsto \{\beta_0, \beta_1\},$$

$$\beta_0(y_1, y_2, y_3) = -y_1\gamma_0(y_2, y_3) + y_2\gamma_0(y_1, y_3) - y_3\gamma_0(y_1, y_2);$$
$$\beta_1(x, y) = -y\gamma_1(x) + \gamma_0(x^{[p]}, y) + x^{p-1}\gamma_0(x, y).$$

# Caractéristique $p$ - Un peu de cohomologie restreinte

Si $L$ n'est pas abélienne, on ne connaît explicitement la cohomologie restreinte que pour les ordres 0, 1 et 2.

**Remarque:** Dans son article de 1954, Hochschild définit la cohomologie restreinte par

$$H^q_{res}(L, M) := \mathrm{Ext}^q_{U(L)}(\mathbb{F}, M).$$

# Caractéristique $p$ - Un peu de cohomologie restreinte

Si $L$ n'est pas abélienne, on ne connaît explicitement la cohomologie restreinte que pour les ordres 0, 1 et 2.

**Remarque:** Dans son article de 1954, Hochschild définit la cohomologie restreinte par

$$H^q_{res}(L, M) := \mathrm{Ext}^q_{U(L)}(\mathbb{F}, M).$$

$\rightsquigarrow$ Jusqu'à présent, cette description n'a pas permis d'aboutir à une théorie des déformations formelles complète.