# Cohomologie et déformations d'algèbres de Lie restreintes sur des corps de caractéristique positive

Quentin EHRET

Séminaire de Mathématiques, IRIMAS Mulhouse

17 mars 2022

IRIMAS UNIVERSITÉ HAUTE-ALSACE
Institut de Recherche en Informatique, Mathématiques, Automatique et Signal
Département de Mathématiques

# Introduction

**Contexte:**

- Etude des (super)algèbres de Lie-Rinehart en caractéristique $p > 0$.

# Introduction

**Contexte:**

- Etude des (super)algèbres de Lie-Rinehart en caractéristique $p > 0$.
- Déjà fait: classification et déformations en caractéristique 0;

# Introduction

**Contexte:**

- Etude des (super)algèbres de Lie-Rinehart en caractéristique $p > 0$.
- Déjà fait: classification et déformations en caractéristique 0;
- En caractéristique $p$, de nouveaux phénomènes apparaissent;

# Introduction

**Contexte:**

- Etude des (super)algèbres de Lie-Rinehart en caractéristique $p > 0$.
- Déjà fait: classification et déformations en caractéristique 0;
- En caractéristique $p$, de nouveaux phénomènes apparaissent;

$\rightsquigarrow$ Il est d'abord nécessaire de comprendre les **(super)algèbres de Lie restreintes** en caractéristique $p$.

# Caractéristique 0 - Généralités sur les algèbres de Lie

$\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos, de caractéristique 0.

## Définition

*Soit $L$ un $\mathbb{K}$-ev. Un* **crochet de Lie** *sur $L$ est une application bilinéaire $[\cdot,\cdot] : L \times L \longrightarrow L$ vérifiant, pour $x, y, z \in L$,*

1. $[x, y] = -[y, x]$ *(antisymétrie)*
2. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ *(Jacobi).*

*Si $L$ est équipé d'un tel crochet, on appelle le couple $(L, [\cdot,\cdot])$ une* **algèbre de Lie***.*

# Caractéristique 0 - Généralités sur les algèbres de Lie

**Exemples:**

- $[x, y] = 0 \ \forall x, y \in L$ (algèbre abélienne);

## Caractéristique 0 - Généralités sur les algèbres de Lie

**Exemples:**

- $[x, y] = 0 \ \forall x, y \in L$ (algèbre abélienne);
- Si $\mu : L \times L \longrightarrow L$ est une loi d'algèbre associative (multiplication), alors

$$[x, y] := \mu(x, y) - \mu(y, x)$$

est un crochet de Lie sur $L$ appelé **commutateur**.

# Caractéristique 0 - Généralités sur les algèbres de Lie

**Exemples:**

- $[x, y] = 0 \ \forall x, y \in L$ (algèbre abélienne);
- Si $\mu : L \times L \longrightarrow L$ est une loi d'algèbre associative (multiplication), alors

$$[x, y] := \mu(x, y) - \mu(y, x)$$

est un crochet de Lie sur $L$ appelé **commutateur**.

**Conséquence importante:** $M_n(\mathbb{K})$ munie du commutateur est une algèbre de Lie.

# Caractéristique 0 - Généralités sur les algèbres de Lie

## Définition

*Une application linéaire* $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ *est un* **morphisme d'algèbres de Lie** *si* $\varphi\left([x,y]_1\right) = [\varphi(x), \varphi(y)]_2 \ \ \forall x, y \in L_1$.

# Caractéristique 0 - Généralités sur les algèbres de Lie

**Définition**

*Une application linéaire* $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ *est un* **morphisme d'algèbres de Lie** *si* $\varphi([x,y]_1) = [\varphi(x), \varphi(y)]_2 \ \forall x, y \in L_1$.

**Définition**

*Une représentation* $\rho : L \longrightarrow End(V)$ *est une* **représentation d'algèbres de Lie** *si* $\rho$ *est un morphisme d'algèbres de Lie, c'est-à-dire si* $\rho([x,y]) = \rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x)$.

**Remarque:** On dit aussi que $V$ est un $L$-module.

## Caractéristique 0 - Généralités sur les algèbres de Lie

**Exemple essentiel:** La représentation adjointe

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} : L &\longrightarrow \mathrm{End}(L) \\ x &\longmapsto \mathrm{ad}_x : y \longmapsto [x, y]. \end{aligned}$$

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

On souhaite construire un **complexe de cochaînes** associé à $L$:

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2 \xrightarrow{d^2} C^3 \xrightarrow{d^3} \dots$$

Les $C_i$ étant des $L$-modules et les $d^j$ des applications linéaires vérifiant

$$d^{j+1} \circ d^j = 0.$$

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

Soit $L$ une algèbre de Lie et $M$ un $L$-module. On pose pour $q \geq 0$:

$$C^q_{CE}(L, M) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\wedge^q L, M\right).$$

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

Soit $L$ une algèbre de Lie et $M$ un $L$-module. On pose pour $q \geq 0$:

$$C^q_{CE}(L, M) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\wedge^q L, M\right).$$

Ce sont les applications $\varphi : L^{\times q} \longrightarrow M$, $q$-linéaires et antisymétriques.

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

Soit $L$ une algèbre de Lie et $M$ un $L$-module. On pose pour $q \geq 0$:

$$C^q_{CE}(L, M) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\wedge^q L, M\right).$$

Ce sont les applications $\varphi : L^{\times q} \longrightarrow M$, $q$-linéaires et antisymétriques.

En particulier, elles vérifient

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_q,\ \ \varphi(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(q)}) = \mathrm{sign}(\sigma)\varphi(x_1, ..., x_q).$$

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

Soit $L$ une algèbre de Lie et $M$ un $L$-module. On pose pour $q \geq 0$:

$$C^q_{CE}(L, M) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}\left(\wedge^q L, M\right).$$

Ce sont les applications $\varphi : L^{\times q} \longrightarrow M$, $q$-linéaires et antisymétriques.

En particulier, elles vérifient

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_q,\ \ \varphi(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(q)}) = \mathrm{sign}(\sigma)\varphi(x_1, ..., x_q).$$

**Remarque:** si $(L, [\cdot, \cdot])$ est une algèbre de Lie, alors le crochet $[\cdot, \cdot]$ est un élément de $C^2_{CE}(L, L)$.

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

On souhaite ensuite équiper ce complexe $C^*_{CE}(L, M)$ d'applications particulières, appelées **différentielles**:

$$d^q_{CE} : C^q_{CE}(L, M) \longrightarrow C^{q+1}_{CE}(L, M),$$

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

On souhaite ensuite équiper ce complexe $C^*_{CE}(L,M)$ d'applications particulières, appelées **différentielles**:

$$d^q_{CE} : C^q_{CE}(L,M) \longrightarrow C^{q+1}_{CE}(L,M),$$

données par

$$d^q_{CE}\varphi(x_1,...,x_{q+1}) =$$

$$\sum_{1\leq i<j\leq q+1} (-1)^{i+j-1}\varphi\left([x_i,x_j],x_1,...\hat{x}_i,...,\hat{x}_j,...,x_{q+1}\right)$$
$$+\sum_{1\leq i}^{q+1}(-1)^i x_i\cdot\varphi\left(x_1,...,\hat{x}_i,...,x_{q+1}\right).$$

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

**Lemme**

*Ces applications vérifient* $d_{CE}^{q+1} \circ d_{CE}^{q} = 0, \quad \forall q \geq 0.$

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

## Lemme

*Ces applications vérifient* $d_{CE}^{q+1} \circ d_{CE}^{q} = 0, \quad \forall q \geq 0.$

1. $\left(C_{CE}^{q}(L,M), d_{CE}^{q}\right)_{q\leq 0}$ est un **complexe de cochaînes**.

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

**Lemme**

*Ces applications vérifient* $d_{CE}^{q+1} \circ d_{CE}^{q} = 0, \quad \forall q \geq 0.$

1. $\left(C_{CE}^{q}(L, M), d_{CE}^{q}\right)_{q \leq 0}$ est un **complexe de cochaînes**.
2. On note $Z_{CE}^{q}(L, M) = \ker(d_{CE}^{q})$ (**q-cocycles**).

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

**Lemme**

*Ces applications vérifient* $d_{CE}^{q+1} \circ d_{CE}^{q} = 0, \quad \forall q \geq 0.$

1. $\left(C_{CE}^{q}(L, M), d_{CE}^{q}\right)_{q \leq 0}$ est un **complexe de cochaînes**.
2. On note $Z_{CE}^{q}(L, M) = \ker(d_{CE}^{q})$ (**q-cocycles**).
3. On note $B_{CE}^{q}(L, M) = \operatorname{im}(d_{CE}^{q-1})$ (**q-cobords**).

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

**Lemme**

*Ces applications vérifient* $d_{CE}^{q+1} \circ d_{CE}^{q} = 0, \quad \forall q \geq 0.$

1. $\left(C_{CE}^{q}(L, M), d_{CE}^{q}\right)_{q \leq 0}$ est un **complexe de cochaînes**.
2. On note $Z_{CE}^{q}(L, M) = \ker(d_{CE}^{q})$ (**q-cocycles**).
3. On note $B_{CE}^{q}(L, M) = \operatorname{im}(d_{CE}^{q-1})$ (**q-cobords**).
4. Grâce au lemme, on a $B_{CE}^{q}(L, M) \subset Z_{CE}^{q}(L, M)$. On peut donc considérer l'espace vectoriel quotient

$$H_{CE}^{q}(L, M) := Z_{CE}^{q}(L, M) / B_{CE}^{q}(L, M).$$

# Caractéristique 0 - Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

**Lemme**

*Ces applications vérifient* $d_{CE}^{q+1} \circ d_{CE}^{q} = 0, \quad \forall q \geq 0.$

1. $\left(C_{CE}^{q}(L, M), d_{CE}^{q}\right)_{q \leq 0}$ est un **complexe de cochaînes**.
2. On note $Z_{CE}^{q}(L, M) = \ker(d_{CE}^{q})$ (**q-cocycles**).
3. On note $B_{CE}^{q}(L, M) = \mathrm{im}(d_{CE}^{q-1})$ (**q-cobords**).
4. Grâce au lemme, on a $B_{CE}^{q}(L, M) \subset Z_{CE}^{q}(L, M)$. On peut donc considérer l'espace vectoriel quotient

$$H_{CE}^{q}(L, M) := Z_{CE}^{q}(L, M) / B_{CE}^{q}(L, M).$$

C'est le $\mathbf{q}^{eme}$ **groupe de cohomologie de Chevalley-Eilenberg de L**.

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

## Définition

*Soit* $(L, [\cdot,\cdot])$ *une algèbre de Lie. Une* **déformation formelle** *de* $L$ *est la donnée d'une application* $\mathbb{K}[[t]]$*-bilinéaire*

$$\mu_t : L[[t]] \times L[[t]] \longrightarrow L[[t]],$$

*que l'on définit sur* $L \times L$ *par*

$$\mu_t(x,y) = [x,y] + \sum_{i \geq 1} t^i \mu_i(x,y),$$

*avec* $\mu_i : L \longrightarrow L$ *bilinéaires antisymétriques telles que*

$$\mu_t(x, \mu_t(y,z)) + \mu_t(y, \mu_t(z,x)) + \mu_t(z, \mu_t(x,y)) = 0, \ \forall x,y,z \in L.$$

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

$$\mu_t(x,\mu_t(y,z))+\mu_t(y,\mu_t(z,x))+\mu_t(z,\mu_t(x,y))=0,\ \forall x,y,z\in L.$$

En développant, on obtient pour $q\geq 0$:

$$\sum_{i=0}^{q}\left(\mu_i(x,\mu_{q-i}(y,z))+\mu_i(y,\mu_{q-i}(z,x))+\mu_i(z,\mu_{q-i}(x,y))\right)=0$$

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

$$\mu_t(x,\mu_t(y,z))+\mu_t(y,\mu_t(z,x))+\mu_t(z,\mu_t(x,y))=0,\ \forall x,y,z\in L.$$

En développant, on obtient pour $q\geq 0$:

$$\sum_{i=0}^{q}\left(\mu_i(x,\mu_{q-i}(y,z))+\mu_i(y,\mu_{q-i}(z,x))+\mu_i(z,\mu_{q-i}(x,y))\right)=0$$

- Pour $q=0$, on retrouve l'identité de Jacobi usuelle;

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

$$\mu_t(x, \mu_t(y, z)) + \mu_t(y, \mu_t(z, x)) + \mu_t(z, \mu_t(x, y)) = 0, \ \forall x, y, z \in L.$$

En développant, on obtient pour $q \geq 0$:

$$\sum_{i=0}^{q} \left(\mu_i(x, \mu_{q-i}(y, z)) + \mu_i(y, \mu_{q-i}(z, x)) + \mu_i(z, \mu_{q-i}(x, y))\right) = 0$$

- Pour $q = 0$, on retrouve l'identité de Jacobi usuelle;
- Pour $q = 1$, on obtient $\mu_1 \in Z^2_{CE}(L, L)$.

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

**Obstructions.**

L'étude de la réciproque de ce théorème conduit à l'étude des obstructions.

**Définition**

*Soit $\varphi \in Z^2_{CE}(L, L)$ un 2-cocycle. $\varphi$ est dit* **intégrable** *si il existe une déformation formelle de $L$ admettant $\varphi$ comme élément infinitésimal.*

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

**Obstructions.**

L'étude de la réciproque de ce théorème conduit à l'étude des obstructions.

## Définition

*Soit $\varphi \in Z^2_{CE}(L, L)$ un 2-cocycle. $\varphi$ est dit* **intégrable** *si il existe une déformation formelle de $L$ admettant $\varphi$ comme élément infinitésimal.*

## Définition

*Une déformation de $L$ d'ordre $n$ est une déformation de la forme*

$$\mu_t^n = \sum_{i=0}^{n} t^i \mu_i.$$

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

## Définition

*Soit $\mu_t^n$ une déformation d'ordre n de L. On définit pour $x, y, z \in L$:*

$$obs_{n+1}(x,y,z) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x, \mu_{n+1-i}(y,z)) + \mu_i(y, \mu_{n+1-i}(z,x)) + \mu_i(z, \mu_{n+1-i}(x,y)).$$

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

## Définition

*Soit $\mu_t^n$ une déformation d'ordre n de L. On définit pour $x, y, z \in L$:*

$$obs_{n+1}(x,y,z) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x, \mu_{n+1-i}(y,z)) + \mu_i(y, \mu_{n+1-i}(z,x)) + \mu_i(z, \mu_{n+1-i}(x,y)).$$

## Proposition

*Soit $\mu_t^n$ une déformation d'ordre n de L. Alors $obs_{n+1} \in Z^3_{CE}(L,L)$.*

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

## Proposition

*Soit $\mu_t^n$ une déformation d'ordre n de L. Si on pose*

$$\mu_t^{n+1} = \mu_t^n + t^{n+1}\mu_{n+1},$$

*pour $\mu_{n+1} \in C^2_{CE}(L, L)$, alors*

$\mu_t^{n+1}$ *est une déformation de L d'ordre n+1* $\iff obs_{n+1} = d^2_{CE}\mu_{n+1}$.

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

## Proposition

*Soit $\mu_t^n$ une déformation d'ordre n de L. Si on pose*

$$\mu_t^{n+1} = \mu_t^n + t^{n+1}\mu_{n+1},$$

*pour $\mu_{n+1} \in C^2_{CE}(L, L)$, alors*

$\mu_t^{n+1}$ *est une déformation de L d'ordre n+1* $\iff obs_{n+1} = d^2_{CE}\mu_{n+1}$.

## Théorème

1. *Si $H^3_{CE}(L, L) = 0$, tout 2-cocycle est intégrable.*
2. *Une déformation d'ordre n s'étend en une déformation d'ordre $n+1$ si et seulement si la classe de cohomologie de $obs_{n+1}$ est nulle.*

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

**Equivalence de déformations formelles.**
Si $V$ est un espace vectoriel, un **automorphisme formel** $\phi_t : V[[t]] \longrightarrow V[[t]]$ est la donnée d'une famille $\phi_i : L \longrightarrow L$ d'applications telles que $\phi_t = \sum_{i \geq 0} t^i \phi_i$, avec $\phi_0 = id$.

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

**Equivalence de déformations formelles.**
Si $V$ est un espace vectoriel, un **automorphisme formel** $\phi_t : V[[t]] \longrightarrow V[[t]]$ est la donnée d'une famille $\phi_i : L \longrightarrow L$ d'applications telles que $\phi_t = \sum_{i \geq 0} t^i \phi_i$, avec $\phi_0 = id$.

## Définition

*Soient $\mu_t$ et $\nu_t$ deux déformations formelles d'une algèbre de Lie $L$. On dit qu'elles sont* ***équivalentes*** *s'il existe un automorphisme formel $\phi_t$ tel que, pour $x, y \in L$,*

$$\phi_t(\mu_t(x, y)) = \nu_t(\phi_t(x), \phi_t(y)).$$

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

## Théorème

1. *Toute déformation formelle de L est équivalente à une déformation de la forme*

$$\mu_t = \sum_{i \geq q} t^i \mu_i, \quad \mu_q \in Z^2_{CE}(L, L) \setminus B^2_{CE}(L, L).$$

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

## Théorème

1. *Toute déformation formelle de $L$ est équivalente à une déformation de la forme*

$$\mu_t = \sum_{i\geq q} t^i \mu_i, \quad \mu_q \in Z^2_{CE}(L,L) \setminus B^2_{CE}(L,L).$$

2. *SI $H^2_{CE}(L,L) = 0$, toute déformation de $L$ est triviale.*

# Caractéristique 0 - Déformations d'algèbres de Lie

**Théorème**

1. *Toute déformation formelle de $L$ est équivalente à une déformation de la forme*

$$\mu_t = \sum_{i \geq q} t^i \mu_i, \quad \mu_q \in Z^2_{CE}(L, L) \setminus B^2_{CE}(L, L).$$

2. *SI $H^2_{CE}(L, L) = 0$, toute déformation de $L$ est triviale.*

**Remarque**: Il y a une correspondance bijective entre les éléments de $H^2_{CE}(L, L)$ et les éléments infinitésimaux de déformations non-équivalentes. Ainsi, $H^2_{CE}(L, L)$ classifie entièrement les déformations infinitésimales de la forme $\mu_t = [\cdot, \cdot] + t\mu_1$.

# Caractéristique $p$ - Algèbres de Lie restreintes

Soit $\mathbb{F}$ un corps de caractéristique $p > 3$ et $A$ une $\mathbb{F}$-algèbre associative. Munie du commutateur, c'est une algèbre de Lie. La représentation adjointe est alors donnée par

$$\mathrm{ad}_x(y) = xy - yx.$$

# Caractéristique $p$ - Algèbres de Lie restreintes

Soit $\mathbb{F}$ un corps de caractéristique $p > 3$ et $A$ une $\mathbb{F}$-algèbre associative. Munie du commutateur, c'est une algèbre de Lie. La représentation adjointe est alors donnée par

$$\mathrm{ad}_x(y) = xy - yx.$$

Si $m > 0$, un rapide calcul donne

$$\mathrm{ad}_x^m(y) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{m-j} x^j y x^{m-j}.$$

# Caractéristique $p$ - Algèbres de Lie restreintes

Soit $\mathbb{F}$ un corps de caractéristique $p > 3$ et $A$ une $\mathbb{F}$-algèbre associative. Munie du commutateur, c'est une algèbre de Lie. La représentation adjointe est alors donnée par

$$\mathrm{ad}_x(y) = xy - yx.$$

Si $m > 0$, un rapide calcul donne

$$\mathrm{ad}_x^m(y) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{m-j} x^j y x^{m-j}.$$

Ainsi, si $m = p$, on a la relation

$$\mathrm{ad}_x^p(y) = x^p y - y x^p = \mathrm{ad}_{x^p}(y).$$

# Caractéristique $p$ - Algèbres de Lie restreintes

1. On a donc une sympathique relation entre le commutateur et le morphisme de Frobenius $x \longmapsto x^p$.
2. A-t-on une relation entre la loi additive et le morphisme de Frobenius?

# Caractéristique $p$ - Algèbres de Lie restreintes

1. On a donc une sympathique relation entre le commutateur et le morphisme de Frobenius $x \longmapsto x^p$.
2. A-t-on une relation entre la loi additive et le morphisme de Frobenius?

**Lemme**

*Soit $A$ associative et $a, b \in A$. Alors*

$$(a+b)^p = a^p + b^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(a,b),$$

*avec $is_i(a,b)$ le coefficient de $X^{i-1}$ dans l'expression* $\mathrm{ad}^{p-1}_{aX+b}(a)$.

# Caractéristique $p$ - Algèbres de Lie restreintes

1. On a donc une sympathique relation entre le commutateur et le morphisme de Frobenius $x \longmapsto x^p$.
2. A-t-on une relation entre la loi additive et le morphisme de Frobenius?

**Lemme**

*Soit $A$ associative et $a, b \in A$. Alors*

$$(a+b)^p = a^p + b^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(a,b),$$

*avec $is_i(a,b)$ le coefficient de $X^{i-1}$ dans l'expression $\mathrm{ad}_{aX+b}^{p-1}(a)$.*

$\rightsquigarrow$ c'est beaucoup moins sympathique.

# Caractéristique $p$ - Les $p$-mappings

L'exemple précédent motive la définition suivante.

## Définition (Jacobson)

*Une* **algèbre de Lie restreinte** *est une algèbre de Lie $L$ équipée d'une application $(\cdot)^{[p]} : L \longrightarrow L$ telle que*

1. $(\lambda x)^{[p]} = \lambda^p x^{[p]}$, $x \in L$, $\lambda \in \mathbb{F}$;

# Caractéristique $p$ - Les $p$-mappings

L'exemple précédent motive la définition suivante.

## Définition (Jacobson)

*Une* **algèbre de Lie restreinte** *est une algèbre de Lie $L$ équipée d'une application $(\cdot)^{[p]} : L \longrightarrow L$ telle que*

1. $(\lambda x)^{[p]} = \lambda^p x^{[p]}$, $x \in L$, $\lambda \in \mathbb{F}$;
2. $\left[x, y^{[p]}\right] = [[...[x, \overbrace{y], y], ..., y}^{p \text{ termes}}]$;

# Caractéristique $p$ - Les $p$-mappings

L'exemple précédent motive la définition suivante.

## Définition (Jacobson)

*Une* **algèbre de Lie restreinte** *est une algèbre de Lie $L$ équipée d'une application $(\cdot)^{[p]} : L \longrightarrow L$ telle que*

1. $(\lambda x)^{[p]} = \lambda^p x^{[p]}$, $x \in L$, $\lambda \in \mathbb{F}$;
2. $\left[x, y^{[p]}\right] = [[...[x, \overbrace{y], y], ..., y}^{p \text{ termes}}]$;
3. $(x+y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(x,y)$,

*avec $is_i(x,y)$ le coefficient of $Z^{i-1}$ in* $\mathrm{ad}_{Zx+y}^{p-1}(x)$. *Une telle application $(-)^{[p]} : L \longrightarrow L$ est appelée p-map.*

# Caractéristique $p$ - Les $p$-mappings

**Remarques:**

1. Toutes les algèbres associatives peuvent être vues comme algèbres de Lie restreintes avec morphisme de Frobenius $x \longmapsto x^p$.

# Caractéristique $p$ - Les $p$-mappings

**Remarques:**

1. Toutes les algèbres associatives peuvent être vues comme algèbres de Lie restreintes avec morphisme de Frobenius $x \longmapsto x^p$.
2. Si $L$ est abélienne, n'importe quelle application $p$-semilinéaire (telle que $\varphi(\lambda x + y) = \lambda^p \varphi(x) + \varphi(y), \ \lambda \in \mathbb{F}, \ x, y \in L$) est une $p$-map.

# Caractéristique $p$ - Les $p$-mappings

**Remarques:**

1. Toutes les algèbres associatives peuvent être vues comme algèbres de Lie restreintes avec morphisme de Frobenius $x \longmapsto x^p$.
2. Si $L$ est abélienne, n'importe quelle application $p$-semilinéaire (telle que $\varphi(\lambda x + y) = \lambda^p \varphi(x) + \varphi(y),\ \lambda \in \mathbb{F},\ x, y \in L$) est une $p$-map.
3. Expression pratique:

$$\sum_{i=1}^{p-1} s_i(x,y) = \sum_{\substack{x_i = x \text{ or } y \\ x_p = x,\ x_{p-1} = y}} \frac{1}{\sharp\{x\}} [x_1, [x_2, [\ldots, [x_{p-1}, x_p]\ldots],$$

# Caractéristique $p$ - La cohomologie restreinte

**Historique:**

- En 1954, dans son article *Cohomology of Restricted Lie Algebras*, Hochschild donne une construction complète de la cohomologie des algèbres de Lie restreintes:

$$H^q_{res}(L, M) := \mathrm{Ext}^q_{U(L)}(\mathbb{F}, M).$$

# Caractéristique $p$ - La cohomologie restreinte

**Historique:**

- En 1954, dans son article *Cohomology of Restricted Lie Algebras*, Hochschild donne une construction complète de la cohomologie des algèbres de Lie restreintes:

$$H^q_{res}(L, M) := \mathrm{Ext}^q_{U(L)}(\mathbb{F}, M).$$

- Mais cette construction ne permet de faire presque aucun calcul concret.

# Caractéristique $p$ - La cohomologie restreinte

**Historique:**

- En 1954, dans son article *Cohomology of Restricted Lie Algebras*, Hochschild donne une construction complète de la cohomologie des algèbres de Lie restreintes:

$$H^q_{res}(L, M) := \mathrm{Ext}^q_{U(L)}(\mathbb{F}, M).$$

- Mais cette construction ne permet de faire presque aucun calcul concret.
- En 2000, D. Fuchs et T. J. Evans proposent une construction plus adaptée aux calculs dans la thèse de ce dernier.

# Caractéristique $p$ - La cohomologie restreinte

**Historique:**

- En 1954, dans son article *Cohomology of Restricted Lie Algebras*, Hochschild donne une construction complète de la cohomologie des algèbres de Lie restreintes:

$$H^q_{res}(L, M) := \mathrm{Ext}^q_{U(L)}(\mathbb{F}, M).$$

- Mais cette construction ne permet de faire presque aucun calcul concret.
- En 2000, D. Fuchs et T. J. Evans proposent une construction plus adaptée aux calculs dans la thèse de ce dernier.
- Mais cela reste incomplet.

# Caractéristique $p$ - La cohomologie restreinte - cas abélien

**Le cas abélien:**
Si $L$ est une algèbre de Lie restreinte **abélienne** et $M$ un $L$-module (restreint), on note

$$\mathrm{Hom}(\bar{L}, M) = \{\varphi : L \longrightarrow M, \varphi(\lambda x + y) = \lambda^p \varphi(x) + \varphi(y)\}\,.$$

# Caractéristique $p$ - La cohomologie restreinte - cas abélien

**Le cas abélien:**
Si $L$ est une algèbre de Lie restreinte **abélienne** et $M$ un $L$-module (restreint), on note

$$\mathrm{Hom}(\overline{L}, M) = \{\varphi : L \longrightarrow M, \varphi(\lambda x + y) = \lambda^p \varphi(x) + \varphi(y)\}.$$

On construit un nouveau complexe:

$$C^k_{ab}(L, M) = \bigoplus_{2t+s=k} \mathrm{Hom}\left(S^t \overline{L} \otimes \wedge^s L, M\right), \quad 0 \leq k < p.$$

# Caractéristique $p$ - La cohomologie restreinte - cas abélien

On définit de nouvelles différentielles sur $C_{ab}^k(L,M)$:

$$\begin{aligned} d_{ab}^k : C_{ab}^k(L,M) &\longrightarrow C_{ab}^{k+1}(L,M) \\ \{\gamma_t\}_{0\leq t\leq \lfloor \frac{k}{2}\rfloor} &\longmapsto \{\beta_t\}_{0\leq t\leq \lfloor \frac{k+1}{2}\rfloor}, \end{aligned}$$

# Caractéristique $p$ - La cohomologie restreinte - cas abélien

On définit de nouvelles différentielles sur $C^k_{ab}(L, M)$:

$$\begin{aligned} d^k_{ab} : C^k_{ab}(L, M) &\longrightarrow C^{k+1}_{ab}(L, M) \\ \{\gamma_t\}_{0 \leq t \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor} &\longmapsto \{\beta_t\}_{0 \leq t \leq \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \beta_t(x_1, \dots, x_t; y_1, \dots, y_s) = & \sum_{j=1}^{s} (-1)^j y_j \cdot \gamma_t(x_1, \dots, x_t; y_1, \dots, \hat{y}_j, \dots, y_s) \\ & + \sum_{i=1}^{t} \gamma_{t-1}(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_t; x_i^{[p]}, y_1, \dots, y_s) \\ & + \sum_{i=1}^{t} x_i^{p-1} \cdot \gamma_{t-1}(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_t; x_i, y_1, \dots, y_s). \end{aligned}$$

# Caractéristique $p$ - La cohomologie restreinte - cas abélien

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & \mathrm{Hom}(L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\wedge^2 L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\wedge^3 L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\wedge^4 L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\wedge^5 L,M) \ldots \\
 & & & \bigoplus & \bigoplus & \bigoplus & \bigoplus \\
 & & & \mathrm{Hom}(\bar{L},M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\bar{L}\otimes L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\bar{L}\otimes\wedge^2 L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\bar{L}\otimes\wedge^3 L,M) \ldots \\
 & & & & & \bigoplus & \bigoplus \\
 & & & & & \mathrm{Hom}(S^2\bar{L},M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(S^2\bar{L}\otimes L,M) \ldots
\end{tikzcd}
$$

# Caractéristique $p$ - La cohomologie restreinte - cas abélien

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & \mathrm{Hom}(L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\wedge^2 L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\wedge^3 L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\wedge^4 L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\wedge^5 L,M) \ldots \\
 & & & \bigoplus & \bigoplus & \bigoplus & \bigoplus \\
 & & & \mathrm{Hom}(\bar{L},M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\bar{L}\otimes L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\bar{L}\otimes \wedge^2 L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\bar{L}\otimes \wedge^3 L,M) \ldots \\
 & & & & & \bigoplus & \bigoplus \\
 & & & & & \mathrm{Hom}(S^2\bar{L},M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(S^2\bar{L}\otimes L,M) \ldots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} d^1_{ab} : \mathrm{Hom}(L,M) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(\wedge^2 L,M)\oplus \mathrm{Hom}(\bar{L},M) \\ \gamma_0 &\longmapsto \{\beta_0,\beta_1\}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_0(y_1,y_2) &= y_2\gamma_0(y_1) - y_1\gamma_0(y_2); \\ \beta_1(x) &= \gamma_0(x^{[p]}) + x^{p-1}\gamma_0(x). \end{aligned}$$

# Caractéristique $p$ - La cohomologie restreinte - cas abélien

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & \mathrm{Hom}(L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\wedge^2 L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\wedge^3 L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\wedge^4 L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\wedge^5 L,M) \ldots \\
 & & & \bigoplus & \bigoplus & \bigoplus & \bigoplus \\
 & & & \mathrm{Hom}(\bar{L},M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\bar{L}\otimes L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\bar{L}\otimes \wedge^2 L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\bar{L}\otimes \wedge^3 L,M) \ldots \\
 & & & & & \bigoplus & \bigoplus \\
 & & & & & \mathrm{Hom}(S^2\bar{L},M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(S^2\bar{L}\otimes L,M) \ldots
\end{tikzcd}
$$

# Caractéristique $p$ - La cohomologie restreinte - cas abélien

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & \mathrm{Hom}(L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\wedge^2 L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\wedge^3 L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\wedge^4 L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\wedge^5 L,M) \ldots \\
 & & & \bigoplus & \bigoplus & \bigoplus & \bigoplus \\
 & & & \mathrm{Hom}(\bar{L},M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(\bar{L}\otimes L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\bar{L}\otimes \wedge^2 L,M) \arrow[r] \arrow[ddr] & \mathrm{Hom}(\bar{L}\otimes \wedge^3 L,M) \ldots \\
 & & & & & \bigoplus & \bigoplus \\
 & & & & & \mathrm{Hom}(S^2\bar{L},M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(S^2\bar{L}\otimes L,M) \ldots
\end{tikzcd}$$

$$d^2_{ab} : \mathrm{Hom}(\wedge^2 L, M) \oplus \mathrm{Hom}(\bar{L}, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\wedge^3 L, M) \oplus \mathrm{Hom}(\bar{L} \otimes L, M)$$
$$\{\gamma_0, \gamma_1\} \longmapsto \{\beta_0, \beta_1\},$$

$$\beta_0(y_1, y_2, y_3) = -y_1\gamma_0(y_2, y_3) + y_2\gamma_0(y_1, y_3) - y_3\gamma_0(y_1, y_2);$$
$$\beta_1(x, y) = -y\gamma_1(x) + \gamma_0(x^{[p]}, y) + x^{p-1}\gamma_0(x, y).$$

# Caractéristique $p$ - La cohomologie restreinte - cas général

Soit $L$ une algèbre de Lie restreinte quelconque et $M$ un $L$-module.

On cherche à définir la **cohomologie restreinte** de $L$, notée $C_*^q(L, M)$, $q \geq 0$. On a déjà:

$$C_*^0(L, M) = C_{CE}^0(L, M); \quad C_*^1(L, M) = C_{CE}^1(L, M).$$

# Caractéristique $p$ - La cohomologie restreinte - cas général

## Définition

*Soit $\varphi \in C^2_{CE}(L,M)$ et $\omega : L \longrightarrow M$. On dit que $\omega$* **possède la propriété $(*)$ vis-à-vis de $\varphi$** *si*

1. $\omega(\lambda x) = \lambda^p \omega(x),\ \lambda \in \mathbb{F},\ x \in L;$
2. $\omega(x+y) = \omega(x) + \omega(y) +$
$$\sum_{\substack{x_i = x \text{ or } y \\ x_1 = x,\ x_2 = y}} \frac{1}{\pi(x)} \sum_{k=0}^{p-2} (-1)^k x_p \ldots x_{p-k+1} \varphi([[\ldots[x_1, x_2], x_3] \ldots, x_{p-k-1}], x_{p-k}),$$

*avec $x, y \in L$, $\pi(x)$ le nombre de facteurs $x_i$ égaux à $x$. On définit ensuite*

$$C^2_*(L,M) = \left\{(\varphi,\omega),\ \varphi \in C^2_{CE}(L,M),\ \omega \text{ possède la propriété } (*) \text{ v.a.v } \varphi\right\}.$$

# Caractéristique $p$ - La cohomologie restreinte - cas général

## Définition

*Soit* $\alpha \in C^3_{CE}(L,M)$ *et* $\beta : L \times L \longrightarrow M$. *On dit que* $\beta$ **possède la propriété** $(**)$ **vis-à-vis de** $\alpha$ *si*

1. $\beta(\cdot, y)$ *est linéaire;*
2. $\beta(x, \lambda y) = \lambda^p \beta(x,y)$*;*
3. $$\beta(x, y_1+y_2) = \beta(x,y_1) + \beta(x,y_2) - \sum_{\substack{h_i = y_1 \text{ or } y_2 \\ h_1=y_1,\ h_2=y_2}} \frac{1}{\pi(y_1)} \sum_{j=0}^{p-2} (-1)^j \sum_{k=1}^{j} \binom{j}{k} h_p \dots h_{p-k-1}\alpha\left([x, h_{p-k}, \dots, h_{p-j+1}], [h_1, \dots, h_{p-j-1}], h_{p-j}\right)$$

*avec* $\lambda \in \mathbb{F}$, $x, y, y_1, y_2 \in L$ *et* $\pi(y_1)$ *le nombre de facteurs* $h_i$ *égaux à* $y_1$.
*On définit ensuite:*
$C^3_*(L,M) = \left\{(\alpha,\beta),\ \alpha \in C^3_{CE}(L,M),\ \beta \text{ a la propriété } (**) \text{ v.a.v } \alpha\right\}.$

# Caractéristique $p$ - La cohomologie restreinte - cas général

On est donc dans la situation suivante:

$$0 \longrightarrow C_*^0(L,M) \xrightarrow{d_*^0} C_*^1(L,M) \xrightarrow{d_*^1} C_*^2(L,M) \xrightarrow{d_*^2} C_*^3(L,M)$$

avec $d_*^0 = d_{CE}^0$.

# Caractéristique $p$ - La cohomologie restreinte - cas général

On est donc dans la situation suivante:

$$0 \longrightarrow C^0_*(L,M) \xrightarrow{d^0_*} C^1_*(L,M) \xrightarrow{d^1_*} C^2_*(L,M) \xrightarrow{d^2_*} C^3_*(L,M)$$

avec $d^0_* = d^0_{CE}$.

$\rightsquigarrow$ il reste à construire $d^1_*$ et $d^2_*$.

## Caractéristique $p$ - La cohomologie restreinte - cas général

Un élément $\varphi \in C^1_*(L, M)$ induit une application

$$\mathrm{ind}^1(\varphi)(x) = \varphi\left(x^{[p]}\right) - x^{p-1}\varphi(x), \quad x \in L$$

# Caractéristique $p$ - La cohomologie restreinte - cas général

Un élément $\varphi \in C^1_*(L, M)$ induit une application

$$\mathrm{ind}^1(\varphi)(x) = \varphi\left(x^{[p]}\right) - x^{p-1}\varphi(x), \quad x \in L$$

On peut alors définir:

$$d^1_*(\varphi) = \left(d^1_{CE}\varphi, \mathrm{ind}^1(\varphi)\right).$$

# Caractéristique $p$ - La cohomologie restreinte - cas général

De même, un élément $(\alpha, \beta) \in C_*^2(L, M)$ induit une application

$$\mathrm{ind}^2(\alpha,\beta)(x,y) = \alpha\left(x, y^{[p]}\right) - \sum_{i+j=p-1} (-1)^i y^i \alpha\left([x, \overbrace{y, \dots, y}^{j \text{ terms}}], y\right) + x\beta(y).$$

On peut alors définir:

$$d_*^2(\alpha,\beta) = \left(d_{CE}^2\alpha, \mathrm{ind}^2(\alpha,\beta)\right).$$

# Deformations retreintes

## Définition

*Une déformation formelle de $L$ est donnée par deux applications*

$$\begin{aligned}[\cdot,\cdot]_t : L\times L &\longrightarrow L[[t]] \\ (x,y) &\longmapsto \sum_{i\geq 0} t^i \mu_i(x,y)\end{aligned} \qquad \begin{aligned}[p]_t : L &\longrightarrow L[[t]] \\ x &\longmapsto \sum_{j\geq 0} t^j \omega_j(x),\end{aligned}$$

*avec $\mu_0(x,y)=[x,y]$, $\mu_i$ antisymétriques, $\omega_0=(\cdot)^{[p]}$, $\omega_j$ telles que $\omega_j(\lambda x)=\lambda^p\,\omega(x)$.*
*De plus, $[\cdot,\cdot]_t$ et $[p]_t$ doivent vérifier*

$$[x,[y,z]_t]_t+[y,[z,x]_t]_t+[z,[x,y]_t]_t=0; \qquad (1)$$

$$\left[x, y^{[p]_t}\right]_t = [[\ldots[x,\overbrace{y]_t,y]_t,\ldots,y}^{p\ terms}]_t. \qquad (2)$$

# Deformations retreintes

Dans ce contexte, on retrouve tous les résultats "classiques" qui font intervenir la cohomologie jusqu'à l'ordre 2, par exemple:

# Deformations retreintes

Dans ce contexte, on retrouve tous les résultats "classiques" qui font intervenir la cohomologie jusqu'à l'ordre 2, par exemple:

## Proposition

*Soit* $\left([\cdot,\cdot]_t, (\cdot)^{[p]_t}\right)$ *une déformation restreinte de* $(L, [\cdot,\cdot], [p])$. *Alors* $(\mu_1, \omega_1)$ *est un 2-cocycle de la cohomologie restreinte.*

# Deformations retreintes

Dans ce contexte, on retrouve tous les résultats "classiques" qui font intervenir la cohomologie jusqu'à l'ordre 2, par exemple:

**Proposition**

*Soit* $\left([\cdot,\cdot]_t,(\cdot)^{[p]_t}\right)$ *une déformation restreinte de* $(L,[\cdot,\cdot],[p])$. *Alors* $(\mu_1,\omega_1)$ *est un 2-cocyle de la cohomologie restreinte.*

$\rightsquigarrow$ En l'absence de "bonne" description de la cohomologie, pour les ordres $\geq 3$, on n'a pas (encore) de théorie des déformations complète.

# Le cas particulier de la caractéristique 2

## Définition

*Une* **algèbre de Lie restreinte** *est une algèbre de Lie $L$ équipée d'une application $(\cdot)^{[p]} : L \longrightarrow L$ telle que*

1. $(\lambda x)^{[p]} = \lambda^p x^{[p]},\ x \in L,\ \lambda \in \mathbb{F};$
2. $\left[x, y^{[p]}\right] = [[\ldots[x, \overbrace{y], y], \ldots, y}^{p \text{ termes}}];$
3. $(x+y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(x,y),$

*avec* $is_i(x,y)$ *le coefficient of* $Z^{i-1}$ *in* $\mathrm{ad}^{p-1}_{Zx+y}(x)$.

# Le cas particulier de la caractéristique 2

## Définition

*Une* **algèbre de Lie restreinte** *en caractéristique 2 est une algèbre de Lie $L$ équipée d'une application* $(\cdot)^{[2]} : L \longrightarrow L$ *telle que*

1. $(\lambda x)^{[2]} = \lambda^2 x^{[2]}$, $x \in L$, $\lambda \in \mathbb{F}$;
2. $\left[x, y^{[2]}\right] = [[x, y], y]$
3. $(x + y)^{[2]} = x^{[2]} + y^{[2]} + [x, y]$.

# Le cas particulier de la caractéristique 2

## Définition

*Une* **algèbre de Lie restreinte** *en caractéristique 2 est une algèbre de Lie $L$ équipée d'une application $(\cdot)^{[2]} : L \longrightarrow L$ telle que*

1. $(\lambda x)^{[2]} = \lambda^2 x^{[2]}$, $x \in L$, $\lambda \in \mathbb{F}$;
2. $\left[x, y^{[2]}\right] = [[x, y], y]$
3. $(x + y)^{[2]} = x^{[2]} + y^{[2]} + [x, y]$.

$\rightsquigarrow$ la troisième relation donne une clé pour comprendre la cohomologie dans ce cas.

# Le cas particulier de la caractéristique 2

Un couple $(\varphi, \omega)$ avec $\varphi : \wedge^n L \longrightarrow M$ et $\omega : L^{n-1} \longrightarrow M$ est une $n$-cochaîne si

1. $\omega(\lambda x, z_2, \ldots, z_{n-1}) = \lambda^2 \omega(x, z_2, \ldots, z_n), \ \lambda \in \mathbb{F}$;

# Le cas particulier de la caractéristique 2

Un couple $(\varphi, \omega)$ avec $\varphi : \wedge^n L \longrightarrow M$ et $\omega : L^{n-1} \longrightarrow M$ est une $n$-cochaîne si

1. $\omega(\lambda x, z_2, ..., z_{n-1}) = \lambda^2 \omega(x, z_2, ..., z_n), \ \lambda \in \mathbb{F}$;
2. $\omega$ est multilinéaire en ses variables $z_2, ..., z_{n-1}$;

# Le cas particulier de la caractéristique 2

Un couple $(\varphi, \omega)$ avec $\varphi : \wedge^n L \longrightarrow M$ et $\omega : L^{n-1} \longrightarrow M$ est une $n$-cochaîne si

1. $\omega(\lambda x, z_2, ..., z_{n-1}) = \lambda^2 \omega(x, z_2, ..., z_n), \ \lambda \in \mathbb{F}$;
2. $\omega$ est multilinéaire en ses variables $z_2, ..., z_{n-1}$;
3. $\omega(x + y, z_2, ..., z_{n-1}) =$
$\omega(x, z_2, ..., z_{n-1}) + \omega(y, z_2, ..., z_{n-1}) + \varphi(x, y, z_2, ..., z_{n-1})$.

# Le cas particulier de la caractéristique 2

Un couple $(\varphi, \omega)$ avec $\varphi : \wedge^n L \longrightarrow M$ et $\omega : L^{n-1} \longrightarrow M$ est une $n$-cochaîne si

1. $\omega(\lambda x, z_2, ..., z_{n-1}) = \lambda^2 \omega(x, z_2, ..., z_n), \ \lambda \in \mathbb{F}$;
2. $\omega$ est multilinéaire en ses variables $z_2, ..., z_{n-1}$;
3. $\omega(x + y, z_2, ..., z_{n-1}) = \omega(x, z_2, ..., z_{n-1}) + \omega(y, z_2, ..., z_{n-1}) + \varphi(x, y, z_2, ..., z_{n-1})$.

$\rightsquigarrow$ si $n = 2$, $\varphi = [\cdot, \cdot]$, $\omega = (\cdot)^{[2]}$ et $M = L$, on retrouve les conditions (1) et (3) de la définition précédente.

On note les espaces ainsi obtenus $C^n_{*_2}(L, M)$.

# Le cas particulier de la caractéristique 2

On a besoin d'applications $d^n_{*_2} : C^n_{*_2}(L, M) \longrightarrow C^{n+1}_{*_2}(L, M)$.

# Le cas particulier de la caractéristique 2

On a besoin d'applications $d^n_{*_2} : C^n_{*_2}(L, M) \longrightarrow C^{n+1}_{*_2}(L, M)$.

On écrit $d^n_{*_2}(\varphi, \omega) = (d^n_{CE}(\varphi), \delta^n(\omega))$, avec

$$
\begin{aligned}
\delta^n\omega(x, z_2, \ldots, z_n) = {} & x \cdot \varphi(x, z_2, \ldots, z_n) \\
& + \sum_{i=2}^{n} z_i \cdot \omega(x, z_2, \ldots, \hat{z}_i, \ldots, z_n) \\
& + \varphi(x^{[2]}, z_2, \ldots, z_n) \\
& + \sum_{i=2}^{n} \varphi\left([x, z_i], x, z_2, \ldots, \hat{z}_i, \ldots, z_n\right) \\
& + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \omega\left(x, [z_i, z_j], z_2, \ldots, \hat{z}_i, \ldots, \hat{z}_i, \ldots, z_n\right).
\end{aligned}
$$

# Le cas particulier de la caractéristique 2

Le miracle:

**Proposition**

1. *Si* $(\varphi, \omega) \in C^n_{*_2}(L, M)$, *alors* $(d^n_{CE}(\varphi), \delta^n(\omega)) \in C^{n+1}_{*_2}(L, M)$;

# Le cas particulier de la caractéristique 2

Le miracle:

**Proposition**

1. *Si* $(\varphi, \omega) \in C^n_{*_2}(L, M)$, *alors* $(d^n_{CE}(\varphi), \delta^n(\omega)) \in C^{n+1}_{*_2}(L, M)$;
2. $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$.

# Le cas particulier de la caractéristique 2

Le miracle:

**Proposition**

1. *Si* $(\varphi, \omega) \in C^n_{*_2}(L, M)$, *alors* $(d^n_{CE}(\varphi), \delta^n(\omega)) \in C^{n+1}_{*_2}(L, M)$;
2. $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$.

$\rightsquigarrow$ cela nous permet de construire un complexe de cochaînes en caractéristique 2, pour tous les $n \geq 0$.

# Le cas particulier de la caractéristique 2

Merci pour votre attention!