Outils géométriques

EC1 (23/03/2023)

Documents, notes de cours ou de TD et téléphone portable interdits.

Durée : 2 heures.

Les parties I et II sont à rédiger sur des copies séparées

PARTIE I (10 points)

Exercice 1 – On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & -13 \\ -1 & 1 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ -4 & 1 & -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

1 pt **a.** Calculer $\det(A)$.

1 pt **b.** Calculer BA.

1 pt **c.** En déduire $\det(B)$.

Exercice 2 – On considère le système linéaire $\begin{cases} -x + 2y - z = 3 \\ x - y + 2z = 2 \\ -x - y + z = -2 \end{cases}$.

1 pt **a.** Sans le résoudre, montrer que ce système linéaire admet une solution unique.

1 pt **b.** Résoudre ce système par la méthode d'élimination de Gauss.

Exercice 3 – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

1 pt **a.** Calculer $\det(A)$.

1,5 pt **b.** Calculer A^{-1} par la méthode des déterminants.

Exercice 4 – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1 pt **a.** Par des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes, calculer $\det(A)$ en le mettant sous forme factorisée.

1,5 pt **b.** En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a pour que la matrice A soit inversible.

PARTIE II (10 points)

3 pts **Exercice 5** – Dans le plan euclidien, soit A, B, C les points de coordonnées $A(1,1)$, $B(4,0)$ et $C(0,3)$. Déterminer l'aire du parallélogramme de côtés AB et AC et en déduire l'aire du triangle ABC. Dessiner ce parallélogramme. Donner les coordonnées du sommet manquant du parallélogramme.

Exercice 6 – Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère trois droites $(AB) : x + 2y = 3$, $(AC) : x + y = 2$, $(BC) : 2x + 3y = 4$.

2 pt **a.** Justifier que ces trois droites définissent un triangle ABC, donner les coordonnées des points A, B et C. Dessiner le triangle.

1.5 pt **b.** Donner un vecteur directeur pour chacune des trois droites.

1.5 pt **c.** On appelle A' (respectivement B' et C') le milieu du segment $[BC]$ (resp. $[AC]$ et $[AB]$). Calculer les coordonnées de A', B', C'.

2 pt **d.** On rappelle que la médiane d'un côté du triangle est la droite passant par le milieu de ce côté et le sommet opposé. Vérifier que les trois médianes se coupent en un unique point.