Examen EC 2 Outils Géométrie

Épreuve sans documents ni téléphone. Durée 2h.
Il est toujours possible d'admettre une question et de l'utiliser dans la suite.
Le sujet comporte deux pages (recto et verso).
Total sur 21, plus 3 points bonus.
N'oubliez pas d'indiquer votre groupe sur les copies.

--→ REDIGEZ LES PARTIES 1 ET 2 SUR DES COPIES SEPAREES ←--

PARTIE 1

Exercice 1

1. **[3pts]** Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$? Si oui, en donner une base et la dimension.
   (a) $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 4x - y + z = 0\}$;
   (b) $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ -x + 2z = 3\}$;
   (c) $E_3 = \{(a + b, a - b, 3b + c),\ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\}$.
2. **[2]** Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Si oui, donner leur matrice dans la(les) base(s) canonique(s) correspondante(s).
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + y - z \\ y + z \end{pmatrix}$;
   (b) $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2,\ g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - y \\ xy \end{pmatrix}$.

Exercice 2

On considère la partie F de $\mathbb{R}^4$ définie par $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\right\}$.

1. **[2]** Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.
2. **[1]** Compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$ (prendre des vecteurs de la base canonique).
3. **[1]** On pose $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 3, 4)$ et $u_3 = (0, 1, 2, 3)$. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ?
4. On note G l'espace vectoriel engendré par les vecteurs u_1, u_2 et u_3. (Autrement dit, $G = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$).
   (a) **[1]** Quelle est la dimension de G ? Justifier.
   (b) **[1]** Donner une interprétation géométrique de G.
5. **[BONUS /2]** Est-ce que tout vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ?

TOURNEZ SVP

PARTIE 2

Exercice 3

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x+z \\ x-y \end{pmatrix}$.

1. **[1]** Montrer que f est linéaire.
2. **[1]** Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. (a) **[0.5]** Rappeler le théorème du rang.
   (b) **[1.5]** Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et donner sa dimension. Déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.
   (c) **[1]** Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   (d) **[0.5]** Est-ce que f est bijective ?
4. **[1]** Montrer que les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
5. **[1.5]** Montrer que $u \in \mathrm{Ker}(f)$, que $f(v) = 2v$ et que $f(w) = v - w$.
6. **[BONUS /1]** Déduire la matrice de f dans la base $\{u, v, w\}$.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^5 \longmapsto \mathbb{R}^4$ une application linéaire.

1. **[1]** Montrer que $rg(f) \leq 4$. (On rappelle que $rg(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$)
2. **[1]** Déduire du théorème du rang que f n'est pas injective.

FIN DU SUJET