La formule de Weyl

Quentin EHRET

Année : 2017/2018

Mémoire de Master 1 Mathématiques Fondamentales

Rédigé sous la direction de Yohann LE FLOCH

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Table des matières

Introduction

"Ce théorème ne sera pas prouvé durant mon existence".
Telle fut la réaction de David Hilbert en octobre 1910 lorsqu'il assista à une conférence de H.A.Lorentz, au cours de laquelle ce dernier émit une conjecture sur le comportement asymptotique des valeurs propres du laplacien sur une surface en deux dimensions. Prédiction qui s'avéra rapidement démentie par un jeune étudiant qui assistait également à la conférence, Hermann Weyl. Il démontra la conjecture de Lorentz en février 1911, soit quatre mois plus tard ! (Source : [Can])

Ce résultat porte désormais le nom de $formule\ de\ Weyl$ et permet de comprendre le comportement asymptotique des valeurs propres du Laplacien sur un domaine plan borné, admettant un bord lisse. Prouver cette formule est l'objectif de ce mémoire. Il s'agit d'un prolongement intéressant du programme d'analyse fonctionnelle du premier semestre, et constitue également une première approche que je juge pertinente des équations aux dérivées partielles, avec une touche de géométrie.

Dans une première partie, nous allons définir quelques notions essentielles et montrer des résultats utiles pour la suite. Puis, la partie 2 présentera la preuve de la formule dans le cas d'un rectangle. La partie suivante sera consacrée à montrer certaines propriétés des vecteurs et valeurs propres et à prouver des résultats indispensables pour généraliser le cas du rectangle à un domaine quelconque. Généralisation qui fera bien entendu l'objet de la partie 4 du mémoire. L'ultime partie présentera enfin de manière qualitative certaines applications de la formule de Weyl et une généralisation.

Pour rédiger ce mémoire, je me suis principalement basé sur les livres *Partial Differential Equations : an introduction* de W.Strauss ([Str92]) et *Methods of Mathematical Physics (Vol.1)* de R.Courant et D.Hilbert ([CH53]).

Je remercie vivement M. LE FLOCH pour son aide et ses conseils avisés.

Figure 1 – Hermann Weyl (1885-1955) - source : Wikipedia

1 Opérateur laplacien et notions connexes

Dans quasiment tout le mémoire, on va travailler en dimension 2, sur des domaines de $\mathbb{R}^2$ simplement connexes admettant un bord lisse (de classe C^∞) (sauf pour les cas du rectangle et du quadrillage, dont les bords ne sont pas lisses). Avant d'énoncer la formule de Weyl, il est indispensable de définir quelques notions et de donner certaines propriétés.

1.1 Le laplacien

1.1.1 Définition

La notion centrale est celle de *laplacien.*

Définition 1. ***Opérateur laplacien***

- *Le laplacien est un opérateur différentiel, noté Δ, qui agit sur une fonction u de plusieurs variables $x_1, x_2, ...x_n$, de classe C^2, de la manière suivante :*

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_j},$$

  où $\frac{\partial^2}{\partial^2 x_j}$ désigne la dérivée seconde par rapport à la variable x_j.
- *Dans le cas $n = 2$ qui va nous intéresser, on a*

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}(x, y).$$

Remarque : (à titre culturel, ne servira pas par la suite)

Il représente en dimension ≥ 2 ce qu'est la dérivée seconde en dimension 1. Calculé en un point (x, y) de l'espace, il donne la concavité d'un champ scalaire en ce point :

- si $\Delta u(x, y) < 0$ alors la valeur de $u(x, y)$ est supérieure à la moyenne des valeurs prises par u autour de (x, y) ;
- si $\Delta u(x, y) = 0$ alors la valeur de $u(x, y)$ est égale à la moyenne des valeurs prises par u autour de (x, y) ;
- si $\Delta u(x, y) > 0$ alors la valeur de $u(x, y)$ est inférieure à la moyenne des valeurs prises par u autour de (x, y).

Si en tout point de l'espace, $\Delta u(x, y) = 0$, u est dite *harmonique.*

Définition 2. ***Gradient et divergence***

- *Le gradient est un opérateur différentiel, noté ∇, qui agit sur une fonction u de plusieurs variables $x_1, x_2, ...x_n$, de classe C^1, de la manière suivante :*

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right),$$

  où $\frac{\partial}{\partial x_j}$ désigne la dérivée première par rapport à la variable x_j.
- *La divergence, notée* div *ou $\overrightarrow{\nabla}$ agit sur un vecteur :*

$$\operatorname{div}(u_1, u_2, ..., u_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}.$$

Remarque :
On a donc une définition alternative du laplacien :

$$\Delta u = \mathrm{div}(\nabla u).$$

1.1.2 Les conditions de Dirichlet et de Neumann

On va s'intéresser à un domaine plan borné, qui admet donc un bord, que l'on suppose suffisamment régulier. On va introduire à présent les conditions de bord avec lesquelles on va travailler tout au long du mémoire.

Soit Ω un tel domaine. On note son bord $\partial\Omega$.
Sauf mention du contraire, les fonctions considérées sont dans $L^2(\Omega)$.

Définition 3. ***Condition de Dirichlet***
On dit qu'un fonction u définie sur Ω est soumise à la condition de Dirichlet au bord de Ω si u est identiquement nulle sur le bord : $u_{|\partial\Omega} = 0$.

Définition 4. ***Dérivée selon un vecteur normal au bord***
Soit η un vecteur normal au bord $\partial\Omega$. Pour une fonction de classe C^1, on définit la dérivée directionnelle selon η,notée $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ par :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \eta.\nabla u,$$

où . désigne le produit scalaire.

Définition 5. ***Condition de Neumann***
Soit η un vecteur normal au bord $\partial\Omega$. On dit qu'un fonction u définie et de classe C^1 sur Ω est soumise à la condition de Neumann au bord de Ω si sa dérivée par rapport à η est identiquement nulle sur le bord : $\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{|\partial\Omega} = 0$.

Remarque : On appelle parfois la condition de Neumann la condition "libre".

1.1.3 Équation fondamentale

L'équation aux dérivées partielles qui va nous occuper pendant ce mémoire est, pour $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur Ω et $\lambda \in \mathbb{R}$ à priori :

$$-\Delta u = \lambda u. \tag{1}$$

On associe à cette équation sur Ω une condition de bord qui sera une de celles présentées au dessus : *Dirichlet* ou *Neumann*.

Les scalaires λ qui vérifient cette équation sont appelés *valeurs propres*. Les fonctions $u \neq 0$ associées sont appelées *vecteurs propres*. $-\Delta$ possède une suite *infinie* de valeurs propres qui vérifie :

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n \leq ...$$

La positivité sera prouvée dans la partie 1.2. et on trouvera des détails dans le chapitre III de [CH53].

Une autre particularité de cette équation $\Delta u + \lambda u = 0$ est qu'elle est *elliptique*. Il serait trop long et complexe de développer ceci ici, on va se contenter du résultat de *régularité elliptique* suivant : *Les solutions de (1) sont de classe C^∞.*
Ce résultat sera utile à plusieurs reprises. On pourra consulter le chapitre 8 de [GT83] pour plus de détails.

1.2 Formules de Green et conséquences

Soit Ω un domaine comme à la partie précédente. η est ici un vecteur normal au bord $\partial\Omega$ *unitaire*.

1.2.1 Les formules de Green

Note : Habituellement, les résultats suivants sont énoncés en dimension 3. Il sont cependant valables en toute dimension, ils sont donc présentés ici en dimension 2 (c'est ce qui va servir dans la suite).

Définition 6. *Soit $\mathcal{C}$ une courbe de $\mathbb{R}^2$ paramétrée par $c : [a,b] \mapsto \mathcal{C}$ de classe C^1 avec $[a,b]$ intervalle de $\mathbb{R}$. Si f est un champ de vecteurs défini sur un ouvert contenant $c([a,b])$, on a :*

$$\int_{\mathcal{C}} f dS := \int_a^b f(c(t)).c'(t)dt.$$

Lemme 1. ***Théorème de la divergence (Green-Ostrogradski) (admis)***
Soit F un champ de vecteurs de classe C^1 sur Ω. Alors :

$$\iint_\Omega \mathrm{div}(F)dxdy = \int_{\partial\Omega} F.\eta \, dS.$$

Lemme 2. ***Première formule de Green***
Soient u et v deux fonctions de (x,y) définies et de classe C^2 sur Ω. Alors :

$$\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \eta}dS = \iint_\Omega \nabla v.\nabla u \, dxdy + \iint_\Omega v\Delta u \, dxdy.$$

Preuve :
$\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}$, d'où :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}$$

$$\iff \mathrm{div}(v\nabla u) = \nabla v.\nabla u + v\Delta u.$$

En intégrant, on obtient :

$$\iint_\Omega \mathrm{div}(v\nabla u) = \iint_\Omega \nabla v.\nabla u + \iint_\Omega v\Delta u.$$

Par le théorème de la divergence, le membre de gauche devient :

$$\iint_\Omega \operatorname{div}(v\nabla u) = \int_{\partial\Omega} v\nabla u.\eta dS = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \eta} dS,$$

ce qui prouve le lemme 2. $\square$

Lemme 3. ***Deuxième formule de Green***
Soient u et v deux fonctions de (x, y) définies et de classe C^2 sur Ω. Alors :

$$\iint_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) dxdy = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \eta} - v\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) dS.$$

Preuve : Par le lemme 2, on a :

$$\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \eta} dS = \iint_\Omega \nabla v.\nabla u \, dxdy + \iint_\Omega v\Delta u \, dxdy.$$

La formule étant clairement symétrique en u et v, on a aussi :

$$\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \eta} dS = \iint_\Omega \nabla v.\nabla u \, dxdy + \iint_\Omega u\Delta v \, dxdy.$$

Il suffit alors de soustraire membre à membre ces deux égalités pour obtenir le résultat.

$\square$

1.2.2 Conséquences pour le laplacien

Les formules de Green ont deux conséquences intéressantes concernant le laplacien :

Proposition 1.2.1. *Pour deux fonctions $u, v \in C^2(\Omega)$ avec les conditions de Dirichlet ou de Neumann au bord, on a :*

$$< \Delta u, v >=< u, \Delta v > .$$

Preuve : Soient u et $v \in C^2(\Omega)$. En appliquant la première formule de Green :

$$< \Delta u, v >= \iint_\Omega (\Delta u)v = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \eta} - \iint_\Omega \nabla v \nabla u.$$

Or, pour la condition de Dirichlet ou celle de Neumann, on a $\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$, d'où :

$$\iint_\Omega (\Delta u)v = \iint_\Omega \nabla v \nabla u = \iint_\Omega (\Delta v)u =< u, \Delta v > .$$

$\square$

Corollaire 1. *Les vecteurs propres de $-\Delta$ sur Ω avec les conditions de Dirichlet ou de Neumann sont orthogonaux.*

Preuve : Soient u_n et u_p deux vecteurs propres distincts de $-\Delta$ sur Ω.

$$< -\Delta u_n, u_p >= -\lambda_n < u_n, u_p >$$
$$< -\Delta u_n, u_p >=< u_n, -\Delta u_p >,$$

d'où :

$$(\lambda_n - \lambda_p) < u_n, u_p >= 0 \Longrightarrow < u_n, u_p >= 0.$$

□

On peut maintenant aussi démontrer la **positivité des valeurs propres**, évoquée dans la sous-partie (1.1.3).

Soit λ une valeur propre du Laplacien sur Ω (avec Dirichlet ou Neumann) et u le vecteur propre associé. Alors :

$$\begin{aligned}\lambda \iint_\Omega u^2 dxdy &= -\iint_\Omega u(\Delta u) dxdy \\ &= \iint_\Omega |\nabla u|^2 dxdy - \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial \eta} dS \\ &= \iint_\Omega |\nabla u|^2 dxdy \geq 0,\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\lambda \geq 0$.

On peut en déduire, dans le cas de Dirichlet, que $\lambda > 0$. En effet, si $\iint_\Omega |\nabla u|^2 dxdy = 0$, alors $|\nabla u| = 0$ et donc u serait constante sur Ω, donc égale à 0 à cause de la condition de Dirichlet. u ne serait donc pas un vecteur propre.

1.3 La formule de Weyl

Il est temps à présent d'énoncer la *formule de Weyl*, qui sera démontrée tout au long de ce mémoire.

Théorème 1.3.1. ***Formule de Weyl***

Soit Ω un domaine plan borné de $\mathbb{R}^2$, d'aire $\mathcal{A}(\Omega)$, et $n \in \mathbb{N}$. On note λ_n les valeurs propres de $-\Delta$ sur Ω avec les conditions au bord de Dirichlet ou de Neumann.

Alors :

$$\frac{\lambda_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{4\pi}{\mathcal{A}(\Omega)}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $N(\lambda)$ le nombre de valeurs propres inférieures ou égales à λ. Alors le théorème se reformule de la manière suivante :

$$\frac{N(\lambda)}{\lambda} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \frac{\mathcal{A}(\Omega)}{4\pi}.$$

2 Formule pour un rectangle

Tout d'abord, on va montrer la formule sur un domaine simple : un rectangle de $\mathbb{R}^2$ (un rectangle n'admet évidemment pas un bord lisse, mais on verra que dans ce cas particulier cela ne pose pas de problème).

2.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Afin de trouver les valeurs propres et les vecteurs propres du laplacien, on va résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$-\Delta u = \lambda u$$

sur un rectangle $R \subset \mathbb{R}^2$, de côtés $a > 0$ et $b > 0$, avec les conditions aux bords de Dirichlet : $u_{|\partial R} = 0$.

Plus précisément, on cherche à résoudre

$$[label = *] - \Delta u(x, y) = \lambda u(x, y) \tag{2}$$

avec $(x, y) \in R = [0, a] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^{*2}, \lambda \in \mathbb{R}$. On a donc :

$$-\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = \lambda u(x, y). \tag{3}$$

On suppose qu'il existe $X : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $Y : [0, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ non nulles telles que $u(x, y) = X(x)Y(y)$. (2) se réécrit donc :

$$-\frac{\partial^2 X(x)Y(y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 X(x)Y(y)}{\partial y^2} = \lambda X(x)Y(y)$$

$$\iff -Y(y)X''(x) - X(x)Y''(y) = \lambda X(x)Y(y)$$

D'où, en divisant par $X(x)Y(y)$:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda \tag{4}$$

avec les conditions aux bords $X(0) = X(a) = Y(0) = Y(b) = 0$.

On constate que les fonctions

$$X(x) = \sin(\alpha x),\ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$Y(y) = \sin(\beta y),\ \beta \in \mathbb{R}$$

satisfont pleinement (3).

Avec les conditions aux bords, on a $\sin(\alpha a) = \sin(\beta b) = 0$, d'où $\alpha = \frac{l\pi}{a}$ et $\beta = \frac{m\pi}{b}$, avec l, m entiers naturels strictement positifs.

On a alors, pour $l, m \in \mathbb{N}^*$:

$$X(x) = \sin\left(\frac{l\pi}{a}x\right),$$

$$Y(y) = \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right).$$

On en déduit λ en injectant ces expressions dans l'équation (3) :

$$(2) \iff \frac{-\frac{\pi^2 l^2}{a^2} sin(\frac{x\pi l}{a})}{sin(\frac{\pi l}{a})} - \frac{\frac{\pi^2 m^2}{b^2} sin(\frac{y\pi m}{b})}{sin(\frac{\pi m}{b})} = -\lambda$$

d'où :

$$\lambda = \pi^2\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right).$$

On a bel et bien obtenu *tous* les vecteurs propres de cette manière. En effet, les fonctions $\sin(\frac{l\pi}{a}x)\sin(\frac{m\pi}{b}y)$ forment un système orthogonal dense dans $C_0(R)$ (fonctions continues sur R s'annulant au bord).
Si l'on avait d'une part un autre vecteur propre correspondant à une nouvelle valeur propre, il serait orthogonal à chaque vecteur propre déjà trouvé. D'autre part, si il correspondait à une des valeurs propres, disons λ_j, on pourrait soustraire une combinaison linéaire de vecteurs propres associés à λ_j et ainsi obtenir un vecteur propre orthogonal à ces vecteurs propres (et donc à tous). Par conséquent, il serait orthogonal au système dense donné par les produits de sinus ; tout nouveau vecteur propre *doit* donc être identiquement *nul*. On a donc montré le résultat suivant :

Proposition 2.1.1. *Sur un rectangle $R = [0, a] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$, avec aux bords les conditions de Dirichlet $u_{|\delta R} = 0$, les valeurs propres du laplacien sont données par :*

$$\lambda = \pi^2\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)$$

et les vecteurs propres associés sont :

$$u(x, y) = \sin\left(\frac{l\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

pour l, m entiers naturels strictement positifs.

Si, au lieu de considérer les conditions aux bords de Dirichlet, on avait les conditions de Neumann : $\frac{\partial u}{\partial n}_{|\partial R} = 0$ (on pourrait avoir un problème aux quatre "coins" du rectangle, puisque η n'y est pas défini, mais en fait non, car $\frac{\partial u}{\partial n}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial n}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial n}(x, b) = \frac{\partial u}{\partial n}(a, y) = 0$), un calcul analogue donne les mêmes valeurs propres $\lambda = \pi^2(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2})$, mais associées aux vecteurs propres $u(x, y) = \cos(\frac{l\pi}{a}x)\cos(\frac{m\pi}{b}y)$. La seule différence notable, en plus d'avoir des cosinus au lieu des sinus, est que l et m sont des entiers naturels quelconques.

En effet, si on prend à nouveau $l = m = 0$, on a $X'' = -Y'' = 0$. D'où en particulier $X'' = 0 \Rightarrow X(x) = cx + d$, $Y(y) = c'y + d'$, pour $c, c, d, d' \in \mathbb{R}$. Les conditions de Neumann aux bords donnent $c = c' = 0$ et d, d' quelconques. Donc si $l = m = 0$, on a bien un vecteur propre non nul.

2.2 Comportement asymptotique des valeurs propres sur le rectangle

Dans cette partie, on va établir la formule de Weyl dans le cas particulier d'un rectangle $R = [0,a] \times [0,b] \subset \mathbb{R}^{*2}$, en considérant successivement les conditions de Dirichlet, puis de Neumann.

2.2.1 Avec les conditions de Dirichlet

Dans cette sous-partie, on considère l'équation (1) avec les conditions aux bords de Dirichlet : $u_{|\partial R} = 0$. On range les valeurs propres du laplacien, telles que calculées à la partie (2.1) par ordre croissant :

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n \leq ...$$

On a alors :

Théorème 2.2.1. *Soit λ_n la $n^{\text{ème}}$ valeur propre du laplacien, avec les conditions au bord de Dirichlet. Dans ce cas :*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right) = \frac{4\pi}{ab}.$$

Preuve :

Tout d'abord, introduisons la fonction N qui à un réel positif λ associe $N(\lambda)$ le nombre de valeurs propres inférieures à λ. $N(\lambda) = \text{card}\,\{k \in \mathbb{N}, \lambda_k \leq \lambda\}$. Soient λ un réel positif et $\lambda_{l,m}$ une valeur propre. Il existe alors $l, m > 0$ entiers tels que $\lambda_{l,m} = \pi^2(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2})$. On va chercher à évaluer $N(\lambda)$.

Supposons que $\lambda_{l,m} \leq \lambda$. Alors :

$$\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) \leq \frac{\lambda}{\pi^2}.$$

Les $\lambda_{l,m}$ recherchés correspondent donc aux points à coordonnées entières situés dans le quadrant $x > 0, y > 0$ de l'ellipse d'équation $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}) = \frac{\lambda}{\pi^2}$. Par commodité, on va noter ce quadrant ϵ^{++}. L'aire de ce quadrant est donnée par : $A(\epsilon^{++}) = \frac{\lambda ab}{4\pi}$.

Puis, on considère chaque point à coordonnées entières comme étant le sommet haut droit d'un carré de côté 1 (et donc d'aire 1). On obtient une majoration immédiate de $N(\lambda)$ (voir figure 1 ci après) :

$$N(\lambda) \leq A(\epsilon^{++})$$

.

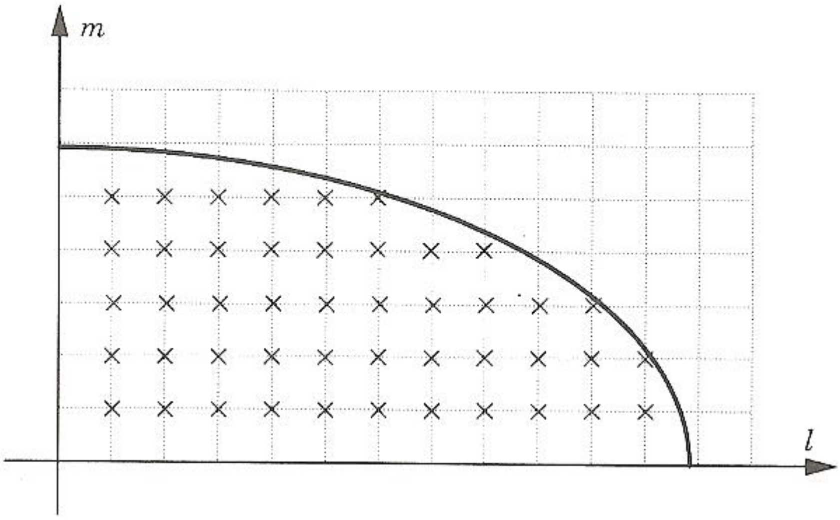

FIGURE 2 – Points à coordonnées entières à l'intérieur de l'ellipse (Dirichlet) - source : [Str92, Figure 1, chap. 11]

Pour λ assez grand, la différence entre $N(\lambda)$ et $A(\epsilon^{++})$ est de l'ordre du périmètre, *ie* de l'ordre de $C\sqrt{\lambda}$, $C \in \mathbb{R}_+$. En effet, cette différence coïncide avec l'aire comprise entre le bord de l'ellipse et le système de carrés de côté 1 qui recouvrent cette zone.

Plus précisément :

$$\frac{\lambda ab}{4\pi} - C\sqrt{\lambda} \leq N(\lambda) \leq \frac{\lambda ab}{4\pi}$$

$$\iff \frac{ab}{4\pi} - \frac{C\sqrt{\lambda}}{\lambda} \leq \frac{N(\lambda)}{\lambda} \leq \frac{ab}{4\pi}.$$

$$\implies \lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{N(\lambda)}{\lambda}\right) = \frac{ab}{4\pi}$$

En substituant la $n^{\text{ème}}$ valeur propre λ_n à λ, on a $N(\lambda) = n$, d'où :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right) = \frac{4\pi}{ab},$$

ce qui est le résultat du théorème 1. □

Remarque : Pour être tout à fait précis, on peut écrire l'égalité suivante :

$$N(\lambda) = \frac{ab}{4\pi} + \theta_1 c_1 \sqrt{\lambda},$$

avec c_1 constante indépendante de λ, et $|\theta_1|<1$.

2.2.2 Avec les conditions de Neumann

Dans cette sous-partie, on considère l'équation (1) avec les conditions aux bords de Neumann : $\partial u_{|\partial R} = 0$. On va montrer que le comportement asymptotique des valeurs propres établi au théorème 1 pour les conditions de Dirichlet reste le même avec les conditions de Neumann.

On range à nouveau les valeurs propres du laplacien, telles que calculées à la partie (2.1) par ordre croissant :

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n \leq ...$$

On a alors :

Théorème 2.2.2. *Soit λ_n la $n^{\text{ème}}$ valeur propre du laplacien, avec les conditions au bord de Neumann. Dans ce cas :*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right) = \frac{4\pi}{ab}.$$

Preuve :

Reprenons comme précédemment la fonction N qui à un réel positif λ associe $N(\lambda)$ le nombre de valeurs propres inférieures à λ. Soient λ un réel positif et $\lambda_{l,m}$ une valeur propre. Il existe alors $l, m \geq 0$ entiers tels que $\lambda_{l,m} = \pi^2(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2})$. Supposons que $\lambda_{l,m} \leq \lambda$.

Les $\lambda_{l,m}$ recherchés correspondent donc aux points à coordonnées entières situés dans le quadrant $x \geq 0, y \geq 0$ de l'ellipse d'équation $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}) = \frac{\lambda}{\pi^2}$, qui sera à nouveau noté ϵ^{++}. On remarquera que désormais, on doit comptabiliser les points situés sur les axes, contrairement au cas précédent.

On considère donc chaque point à coordonnées entières comme étant le sommet bas gauche d'un carré de côté 1 (et donc d'aire 1). On obtient alors une minoration immédiate de $N(\lambda)$:

$$N(\lambda) \geq A(\epsilon^{++})$$

.

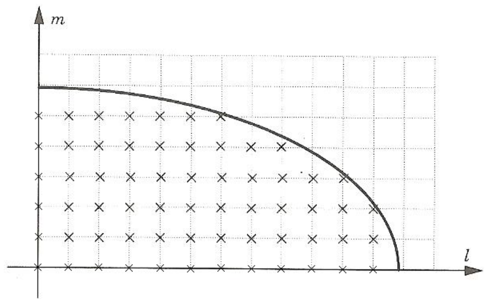

FIGURE 3 – Points à coordonnées entières à l'intérieur de l'ellipse (Neumann) - adapté de [Str92, Figure 1, chap. 11]

En ajoutant le périmètre pour les mêmes raisons que la preuve précédente, on obtient l'encadrement suivant :

$$\frac{\lambda ab}{4\pi} \leq N(\lambda) \leq \frac{\lambda ab}{4\pi} + C\sqrt{\lambda}$$

D'où finalement :

$$\lim_{\lambda\to\infty} \left(\frac{N(\lambda)}{\lambda}\right) = \frac{ab}{4\pi}$$

En substituant la $n^{\text{ème}}$ valeur propre λ_n à λ, on a $N(\lambda) = n$, d'où :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right) = \frac{4\pi}{ab},$$

ce qui est le résultat du théorème 2. □

Remarque : Comme avant,on peut être plus précis, en écrivant :

$$N(\lambda) = \frac{ab}{4\pi} + \theta_2 c_2 \sqrt{\lambda},$$

avec c_2 constante indépendante de λ, et $|\theta_2|<1$.

On a donc démontré la formule de Weyl dans le cas particulier d'un domaine rectangulaire, pour les conditions aux bords de Dirichlet et de Neumann. La preuve de la formule pour un domaine quelconque s'obtient en exploitant massivement ce qui a été obtenu pour un rectangle. Pour ce faire, il est indispensable de démontrer au préalable certains résultats. C'est l'objet de la partie suivante.

3 Propriétés des valeurs et vecteurs propres

Dans cette partie, on va montrer un certain nombre de résultats qui vont être exploités dans la suite pour déduire la formule de Weyl pour un domaine quelconque à partir de ce qui a été établi pour le rectangle dans la partie précédente. On considère dans toute cette partie l'équation $-\Delta u = \lambda u$ sur D domaine plan borné arbitraire, de bord lisse.

3.1 Les valeurs propres vues comme minimum du quotient de Rayleigh

3.1.1 Principe du minimum pour la première valeur propre

Définition 7. ***Espaces de fonctions tests***

Soit D un domaine plan borné arbitraire, de bord lisse.

1. *On dit que $\omega : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\omega \neq 0$, est une fonction test pour les conditions de Dirichlet si ω est de classe C^2 sur D et vérifie $\omega_{|\partial D} = 0$. On notera l'espace de toutes ces fonctions $\mathcal{T}_0(D)$.*
2. *On dit que $\omega' : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\omega' \neq 0$, est une fonction test pour les conditions de Neumann si ω' est de classe C^2 sur D. On notera l'espace de toutes ces fonctions $\mathcal{T}(D)$.*

Définition 8. ***Quotient de Rayleigh***

Soit D un domaine plan borné arbitraire. Soit $\omega \in \mathcal{T}_0(D)$ (ou bien $\mathcal{T}(D)$. Le quotient de Rayleigh Q est défini par :

$$Q = \frac{\|\nabla\omega\|^2}{\|\omega\|^2},$$

où ∇ désigne le gradient de ω et $\|.\|$ la norme 2.

Il est également possible de calculer le quotient de Rayleigh en ne considérant que des fonctions ω de norme 1, ce qui dispense d'écrire un dénominateur.

On va dans un premier temps considérer le problème de minimisation, pour $\omega \in \mathcal{T}_0(D)$,

$$m = \min(Q(\omega)). \tag{5}$$

On *admet* que ce minimum existe.
C'est donc le cas de Dirichlet qui est traité ci-après. On verra plus loin que les mêmes résultats sont valables pour la cas de Neumann également.

On ordonne les valeurs propres de $-\Delta$ sur D par ordre croissant $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n \leq ...$

Théorème 3.1.1. ***Principe du minimum pour la première valeur propre***

Soit $u \in \mathcal{T}_0(D)$ réalisant le minimum (5), autrement dit $m = \frac{\|\nabla u\|^2}{\|u\|^2}$.
Alors :

$$\lambda_1 = m.$$

Ce théorème dit deux choses : d'abord que m est effectivement une valeur propre, et que de plus c'est la plus petite.

Preuve :

Notons $m = \min(Q(\omega))$ et soit $u \in \mathcal{T}_0(D)$ réalisant ce minimum. On *admet* que ce minimum est effectivement atteint. On pourra se référer à [Cia] (chap.1) pour les détails.

On a donc, $\forall \omega \in \mathcal{T}_0(D)$,

$$m = \frac{\iint_D |\nabla u|^2 dxdy}{\iint_D |u|^2 dxdy} \leq \frac{\iint_D |\nabla \omega|^2 dxdy}{\iint_D |\omega|^2 dxdy}.$$

Soient maintenant $v \in \mathcal{T}_0(D)$, $v \neq u$, et $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Posons $\omega = u + \varepsilon v$, et par souci de lisibilité, notons $\int ... := \iint_D ...dxdy$.

Enfin notons

$$f(\varepsilon) = \frac{\int |\nabla(u+\varepsilon v)|^2}{\int |u+\varepsilon v|^2}.$$

f est dérivable par rapport à ε au voisinage de 0 : le dénominateur est non nul pour $\varepsilon = 0$ et on a un quotient de deux expressions polynomiales en ε. f admet un minimum pour $\varepsilon = 0$, donc $f'(0) = 0$. En développant l'expression de f, on obtient :

$$f(\varepsilon) = \frac{\int(|\nabla u|^2 + 2\varepsilon \nabla u.\nabla v + \varepsilon^2 |\nabla v|^2)}{\int u^2 + 2\varepsilon uv + \varepsilon^2 v^2}.$$

En dérivant par rapport à ε et en évaluant en 0, on obtient :

$$0 = \frac{2(\int u^2)(\int \nabla u.\nabla v) - 2(\int |\nabla u|^2)(\int uv)}{(\int u^2)^2}.$$

Par conséquent :

$$\int \nabla u.\nabla v = \frac{\int |\nabla u|^2}{\int u^2} \times \int uv = m \int uv.$$

En exploitant la première identité de Green et le fait que $v_{|\partial D} = 0$, on a :

$$\int \nabla u.\nabla v + \int v\Delta u = 0$$
$$\Rightarrow m\int uv + \int v\Delta u = 0$$
$$\Rightarrow \iint_D (mu + \Delta u)v \, dxdy = 0.$$

Comme la relation ci dessus est vraie $\forall v \in \mathcal{T}_0(D)$, on en déduit que $\Delta u + mu = 0$ sur D. En effet, soit on choisit v de telle sorte à approcher le signe de $\Delta u + mu$, et on se retrouve alors avec l'intégrale d'une fonction positive, soit on choisit v approchant l'indicatrice de D', avec D' sous-domaine de D. On conclut alors avec un résultat disant que si l'intégrale d'une fonction est nulle sur tout sous-domaine de D, alors la fonction est la fonction nulle sur D. (voir appendice A.1 de [Str92]). m est donc une valeur propre de $-\Delta$ sur D et u est le vecteur propre associé.

Il reste à vérifier que $m = \lambda_1$. Soient λ_j une valeur propre et v_j le vecteur propre associé. Par définition de m,

$$m \leq \frac{\int |\nabla v_j|^2}{\int v_j^2} = \frac{\int(-\Delta v_j)v_j}{\int v_j^2},$$

la dernière égalité résultant de la première formule de Green : $\int \nabla v_j \nabla v_j + \int v_j \Delta v_j = 0$, donc $\int(-\Delta v_j)v_j = \int |\nabla v_j|^2$. Donc :

$$m \leq \frac{\int(-\Delta v_j)v_j}{\int v_j^2} = \frac{\int(\lambda_j v_j)v_j}{\int v_j^2} = \lambda_j.$$

$m \leq \lambda_j \ \forall j \geq 1$, donc $m = \lambda_1$.

□

3.1.2 Exemples de calcul de la première valeur propre

1. Sur un segment $S = [0, l]$:

   On considère $f(x) = x(l-x)$. $f \in \mathcal{T}_0(S)$, espace des fonctions tests pour le segment. On pense à cette fonction car elle doit d'annuler en 0 et en l et être au moins de classe C^2, et f est la plus simple qui vérifie ces conditions.

   $$\frac{\|f'\|^2}{\|f\|^2} = \frac{\int_0^l (l-2x)^2 dx}{\int_0^l x^2(l-x)^2 dx} = \frac{10}{l^2}.$$

   Or la première valeur propre pour ce problème est $\frac{\pi^2}{l^2} \simeq \frac{9{,}87}{l^2}$.
   On a bien une approximation de la première valeur propre de $-\Delta$ sur S.

2. Sur un carré $D = [0, \pi] \times [0, \pi]$:

   On prend $g(x,y) = xy(\pi - x)(\pi - y) \in \mathcal{T}_0(D)$ (pour les mêmes raisons que ci dessus : g doit être C^2 et s'annuler sur les bords).

   $$\frac{\|\nabla g\|^2}{\|g\|^2} = \frac{\iint_D y^2(\pi-y)^2(\pi-2x)^2 + x^2(\pi-x)^2(\pi-2y)^2 dxdy}{\iint_D xy(\pi-x)(\pi-y)dxdy} \simeq 2,03.$$

   Le calcul précédent a été réalisé avec un logiciel de programmation en langage Python, en utilisant la méthode de Simpson brièvement décrite ci-dessous.
   Pour donner une approche numérique de l'intégrale de f, on utilise l'approximation suivante :

   $$\int_a^b f(x)\ dx \simeq \sum_{j=1}^n w_j\ f(x_j).$$

   On pose pour $n \geq 3$ impair : $h = \frac{b-a}{n-1}$, $x_j = a + (j-1)h$ pour $j = 1, ..., n$ et

   $$w_1 = w_n = \frac{h}{3}, \quad w_j = \frac{4h}{3}\ si\ j = 2k, \quad w_j = \frac{2h}{3}\ si\ j = 2k+1, \quad j = 2, ...n-1.$$

   (voir code ci-après)

   On voit en sortie que Python renvoie environ 2.03. On est censé trouver
   $\lambda_1 = \pi^2(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2}) = 2$. On a donc de nouveau une assez bonne approximation de λ_1.

```python
def simpson(n,a,b):        #n est le nombre de points de quadrature, a et b les bornes de l'intégrale

    h=(b-a)/(n-1)
    X=[a +(j-1)*h for j in range(1, n+1)]
    W2=[]                            #W2 liste vide qui sera progressivement remplie avec les wj
    if n%2==0 or n<3:
        print("n doit être impair et >2")      #simpson défini pour n impair et >2
    else:
        for i in range(int((n-2)/2)):
            W2=W2+[(4*h/3)]+[(2*h/3)]    #W2 est de longueur n-3, j'utilise ceci pour alterner termes pairs et impairs
            W=[(h/3)]+W2+[(4*h/3)]+[(h/3)]     #on rajoute les termes d'indice 1, n-1, et n, n-1 étant pair.
    return(np.array(X),np.array(W))          #simpson retourne X le vecteur des xj, W le vecteur des wj
```

FIGURE 4 – Méthode de Simpson

```python
def integrale2d(meth,f, a, b, n):     #les entrées sont ici des vecteurs de dim=2
    (X,W1)=meth[0](n[0],a[0],b[0])
    (Y,W2)=meth[1](n[1],a[1],b[1])
    I=0
    for i in X:
        for j in Y:
            I+=W1[np.where(X==i)]*W2[np.where(Y==j)]*f(i,j)  #on applique la technique décrite plus haut.
    return (I)
#on retourne la valeur numérique de l'intégrale double

```

```python
def dw(x,y):
    return (y*y*(pi-2*x)**2*(pi-y)**2+x*x*(pi-2*y)**2*(pi-x)**2)

def w(x,y):
    return((x*x*y*y*(pi-x)**2)*(pi-y)**2)

A=integrale2d([simpson,simpson],dw,[0,0],[pi,pi],[101,101])
B=integrale2d([simpson,simpson],w,[0,0],[pi,pi],[101,101])
print(A)
print (B)
print(A/B)
```

```
[ 210.85625324]
[ 104.05339441]
[ 2.02642359]
```

FIGURE 5 – Calcul du quotient de Rayleigh

3.1.3 Principe du minimum pour la n$^{\text{ème}}$ valeur propre

On a vu que λ_1 pouvait s'obtenir comme minimum du quotient de Rayleigh. Le théorème suivant montre comment trouver λ_n, $n > 1$.

Théorème 3.1.2. ***Principe du minimum pour la n$^{\text{ème}}$ valeur propre***
Soient $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_{n-1}$ *les* $n-1$ *premières valeurs propres, associées aux vecteurs propres* v_1, v_2, ..., v_{n-1}*. Sous réserve d'existence du minimum,*

$$\lambda_n = \min \left\{ \frac{\|\nabla \omega\|^2}{\|\omega\|^2} \mid \ < \omega, v_i >= 0 \ \forall i \in [|1, n-1|] \right\} := m_n$$

Remarque : la condition d'orthogonalité supplémentaire vient du fait, prouvé dans la première partie, que les vecteurs propres sont orthogonaux.

Preuve :

Montrons que m_n est une valeur propre. Soit $u \in \mathcal{T}_0(D)$ réalisant le minimum : $m_n = \frac{\|\nabla u\|^2}{\|u\|^2} \leq \frac{\|\nabla \omega\|^2}{\|\omega\|^2}$, $\forall \omega \in \mathcal{T}_0(D)$. L'existence d'un tel u est *admise*.

Comme pour la preuve précédente, notons $\omega = u + \varepsilon v$, avec v sous les mêmes contraintes que u. Alors,

$$\iint_D (m_n u + \Delta u) v \, dxdy = 0, \ \forall v \in \mathcal{T}_0(D) \quad tel \ \ que \quad < v, v_i >= 0 \ \forall i \leq n-1.$$

Soit v_j, $j \leq n-1$ un vecteur propre. Par la deuxième formule de Green,

$$\iint_D (m_n u + \Delta u) v_j \ = \iint_D u(\Delta v_j + m_n v_j) \ = (m_n - \lambda_j) \iint_D u.v_j = 0 \ \text{car} \quad < u, v_j >= 0.$$

Ensuite, soit $h \in \mathcal{T}_0(D)$. Posons $v(x,y) = h(x,y) - \sum_{k=1}^{n-1} c_k v_k(x,y)$, $c_k = \frac{<h,v_k>}{v_k,v_k}$. Donc, en abrégeant, $h = v + \sum c_k v_k$.
On a $< v, v_j >= 0 \ \ \forall j \leq n-1$; en effet :

$$\begin{aligned} < v, v_j > &=< h - \sum c_k v_k, v_j > \\ &=< h, v_j > - < \sum c_k v_k, v_j > \\ &= c_j \|v_j\|^2 - c_j \|v_j\|^2 = 0. \end{aligned}$$

On peut donc choisir ce v dans l'expression $\iint_D (m_n u + \Delta u) v \, dxdy$. Donc :

$$\iint_D (m_n u + \Delta u) v \, dxdy = 0 \Rightarrow \iint_D (m_n u + \Delta u) h \, dxdy = 0 \ \ \forall h \in \mathcal{T}_0(D)$$

$$\Rightarrow m_n u + \Delta u = 0.$$

m_n est donc une valeur propre, associée au vecteur propre u. En procédant comme pour la preuve pour λ_1, on peut montrer que $m_n = \lambda_n$: soit $j > n$. On considère le vecteur propre v_j et la valeur propre λ_j. Par définition de m_n,

$$m_n \leq \frac{\|\nabla v_j\|^2}{\|v_j|^2} \leq \frac{\int (-\Delta v_j) v_j}{\int v_j^2} = \frac{\int (\lambda_j v_j) v_j}{\int v_j^2} = \lambda_j.$$

De plus, $m_n \neq \lambda_k$, $k < n$, car le vecteur propre associé u doit être orthogonal aux vecteurs propres associés aux λ_k. Finalement, $m_n = \lambda_n$. $\square$

3.1.4 Extension aux conditions de Neumann

Jusqu'à présent, on a travaillé avec l'espace $\mathcal{T}_0(D)$. On va étudier ce qui se passe avec les conditions de Neumann, et donc avec l'espace $\mathcal{T}(D)$ défini en 3.1.1.

Proposition 3.1.3. *Avec les conditions de Neumann et en prenant les fonctions tests dans l'espace $\mathcal{T}(D)$, les théorèmes 3.1.1 et 3.1.2 restent valables.*

Preuve :
Pour démontrer les théorèmes 3.1.1 et 3.1.2 pour les conditions de Neumann, on commence par répéter les mêmes étapes que pour les conditions de Dirichlet. Les différences vont arriver lorsque les conditions aux bords vont entrer en jeu. A la fin de la preuve du théorème 3.1.1, on avait :

$$\int \nabla u . \nabla v = m \int uv, \qquad \forall v \in \mathcal{T}(D).$$

Par la première formule de Green,

$$\iint_D (mu+\Delta u)v\,dxdy = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} v\,dS.$$

En prenant v dans $\mathcal{T}_0(D)$, on avait obtenu $\Delta u + mu = 0$. Donc ici, ceci reste vrai sur D privé de son bord. Cependant, par densité, on a $\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} v\,dS = 0$, $\forall v \in \mathcal{T}(D)$. Comme on n'impose pas de condition au bord ici pour $v \in \mathcal{T}(D)$, on peut choisir, au hasard, $v = \frac{\partial u}{\partial n}$ (valable car en vertu de la régularité elliptique, u solution de $\Delta u + \lambda u = 0$ est de classe C^∞).

Avec ce judicieux choix on se retrouve avec $\int_{\partial D} (\frac{\partial u}{\partial n})^2\,dS = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n} = 0$, ce qui correspond exactement à la condition de Neumann !

La preuve du théorème 3.1.2 s'adapte de la même manière.

□

3.2 Densité des vecteurs propres

Un résultat intéressant sur les vecteurs propres est donné par le théorème suivant :

Théorème 3.2.1. *Avec les conditions de Dirichlet ou de Neumann, l'espace engendré par tous les vecteurs propres de $-\Delta$ sur un domaine plan D est dense dans $L^2(D)$.*

Plus précisément, en prenant $N \in \mathbb{N}$, v_n un vecteur propre associé à la valeur propre λ_n et en posant $c_n = \frac{<f,v_n>}{<v_n,v_n>}$, on a, $\forall f \in L^2(D)$:

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} c_n v_n \right\|_2^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Preuve :

Preuve réalisée pour f fonction-test. Il est plus difficile de le montrer pour $f \in L^2(D)$ quelconque (c'est cependant vrai : l'idée consiste à approcher les fonctions de L^2 par des fonctions-test ; pour des exemples, voir [Eva]). On commence par f fonction-test pour la condition de Dirichlet. Soit $N \in \mathbb{N}$. Posons

$$r_N(x,y) = f(x,y) - \sum_{n=1}^{N} c_n v_n(x,y).$$

Soit v_j un vecteur propre ($j \leq n-1$) Alors :

$$< r_N, v_j >=< f, v_j > - \sum_{n=1}^{N} < c_n, v_j >=< f, v_j > -c_j < v_j, v_j >= 0.$$

r_N est donc orthogonale à tous les v_j, $j \leq n-1$. De plus, r_N satisfait les hypothèses du théorème 3.1.2. On a donc, pour ω fonction-test pour Dirichlet :

$$\lambda_N = \min \frac{\|\nabla\omega\|^2}{\|\omega\|^2} \leq \frac{\|\nabla r_N\|^2}{\|r_N\|^2}.$$

En développant le numérateur du majorant, on trouve :

$$\|\nabla r_N\|^2 = \iint_D \left(|\nabla f|^2 - 2\sum_{n=0}^{N} c_n \nabla f.\nabla v_n + \sum_{n,m=0}^{N} c_n c_m \nabla v_n \nabla v_m \right).$$

Comme $f = v_n = 0$ sur ∂D et en utilisant la première formule de Green, on a (en simplifiant l'écriture des intégrales) :

$$\int \nabla f.\nabla v_n = -\int f \Delta v_n = \lambda_n \int f v_n \tag{6}$$

et :

$$\int \nabla v_m.\nabla v_n = -\int v_n \Delta v_m = \lambda_n \int v_n^2 \ \ si \ \ n = m, \ \ 0 \ \ sinon. \tag{7}$$

On en déduit :

$$\|\nabla r_N\|^2 = \iint_D \left(|\nabla f|^2 - 2\sum_{n=0}^{N} c_n < f, v_n > + \sum_{n,m=0}^{N} \mathbf{1}_{(n=m)} c_n^2 \lambda_n < v_n, v_n > \right).$$

Par définition de c_n, on obtient :

$$\|\nabla r_N\|^2 = \iint_D |\nabla f|^2 - \sum_{n=0}^{N} c_n^2 \lambda_n < v_n, v_n > \Longrightarrow \|\nabla r_N\|^2 \leq \iint_D |\nabla f|^2 = \|\nabla f\|^2.$$

Or, $\lambda_N \leq \frac{\|\nabla r_N\|^2}{\|r_N\|^2}$ et on vient de voir que $\|\nabla r_N\|^2 \leq \|\nabla f\|^2$, on trouve donc :

$$\|r_N\|^2 \leq \frac{\|\nabla r_N\|^2}{\lambda_N} \leq \frac{\|\nabla f\|^2}{\lambda_N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

En effet, $\lambda_N \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$.
On l'a déjà vu dans le cas du rectangle, et on le montrera pour le cas général plus loin (on n'utilise pas ce théorème pour prouver la formule de Weyl, donc on ne tourne pas en rond).

Si f est une fonction-test dans le cas de Neumann, la preuve est la même. L'unique endroit où la condition de bord intervient est au niveau de 6 et 7. Ces deux équations restent vraies pour Neumann, car $\frac{\partial v_j}{\partial \eta} = 0$ sur le bord.

□

4 Formule pour un domaine plan quelconque

On a montré dans la partie 2 la formule de Weyl pour un domaine rectangulaire. A l'aide des théorèmes démontrés dans la partie 3, on va maintenant justifier la formule pour un domaine plan arbitraire, de bord lisse. Pour ce faire, on va d'abord démontrer un résultat pour un domaine constitué d'un nombre fini de carrés de même côté, puis on va utiliser ceci pour donner une "bonne" approximation pour un domaine quelconque, dans un sens que l'on définira.

4.1 Espaces de Sobolev

Dans cette partie, on doit considérer des espaces de fonctions test plus généraux que ceux vus auparavant. Les prochaines lignes sont donc consacrées à les définir et à lister les propriétés intéressantes dans le cadre de notre problème.
On se limite donc au cas de la dimension 2.

Définition 9. ***Espace*** $H^1(\Omega)$
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Notons C_c^∞ l'espace des fonctions infiniment dérivables à support compact.
L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ (ou $W^{1,2}(\Omega)$) est défini, par :

$$H^1(\Omega) =: \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \exists\, g_1,\ g_2 \in L^2(\Omega), \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \phi\ ,\ \ \forall \phi \in C_c^\infty,\ \ i = 1,2 \right\}$$

Définition 10. ***Espace*** $H_0^1(\Omega)$
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On désigne par $C_c^1(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^1 à support compact dans Ω.

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^1(\Omega)}.$$

Proposition 4.1.1. ***Propriétés des espaces de Sobolev***

1. *Muni du produit scalaire*
$$< u, v >_{H^1} := < u, v >_{L^2} + < \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} >_{L^2} + < \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y} >_{L^2},$$
$H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

2. *Si u est intégrable sur tout compact de ω, la théorie des distributions permet de donner un sens à $\frac{\partial u}{\partial x}$. Dans ce contexte, $H^1(\Omega)$ peut être vu comme l'ensemble des $u \in L^2(\Omega)$ telles que toutes les dérivées partielles de u sont encore dans $L^2(\Omega)$.*

3. *Si $u \in H^1$ admet un support compact inclus dans Ω, alors $u \in H_0^1(\Omega)$.*

C'est le point 2. qui va être crucial, il permet en effet de considérer ∇ sur $H^1(\Omega)$. On va désormais travailler avec $H^1(\Omega)$ au lieu de $\mathcal{T}(D)$ et $H_0^1(\Omega)$ au lieu de $\mathcal{T}_0(D)$.
Ceci permet de donner un sens au gradient pour des fonctions qui ne sont pas de classe C^1, en considérant plutôt les distributions régulières associées à ses fonctions. Pour plus de détails, on pourra sa référer à [Bre83] (chapitre **IX**).

4.2 Domaine constitué d'un nombre fini de carrés

4.2.1 Principe du maximin

Théorème 4.2.1. ***Principe du maximin***

Soit n *un entier* ≥ 2.
Soient $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ *des fonctions tests arbitraires (pour Dirichlet).*
Soit $\lambda_n^* = \min\left(\frac{\|\nabla\omega\|^2}{\|\omega\|^2}\right)$, ω *fonction test arbitraire pour Dirichlet telle que* $\forall j \leq n-1$, $< \omega, y_j >= 0$.
Alors :

$$\lambda_n = \max_{\{y_1, y_2, ..., y_{n-1}\}} (\lambda_n^*).$$

Preuve :

Soient $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ des fonctions tests arbitraires (pour Dirichlet). Notons

$$\omega(x,y) = \sum_{j=1}^{n} c_j v_j(x,y)$$

une combinaison linéaire des n premiers vecteurs propres, choisie pour être orthogonale à y_i, $\forall i \leq n-1$.
Pour ce faire, les constantes c_j doivent satisfaire le système linéaire, pour $k \leq n-1$:

$$0 =< \sum_{j=1}^{n} c_j v_j, y_k >= \sum_{j=1}^{n} < v_j, y_k > c_j.$$

On a donc $n-1$ équations et n inconnues, il existe donc une solution non identiquement nulle.

Puis, par définition, $\lambda_n^* = \min\left\{\frac{\|\nabla\omega'\|^2}{\|\omega'\|^2}, < \omega', y_j >= 0 \ \forall j \leq n-1\right\}$, donc :

$$\lambda_n^* \leq \frac{\|\nabla\omega\|^2}{\|\omega\|^2} = \frac{\sum_{j,k}^{n} c_j c_k < -\Delta v_j, v_k >}{\sum_{j,k}^{n} c_j c_k < v_j, v_k >} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j c_j^2}{\sum_{j=1}^{n} c_j^2}.$$

Puisque $\lambda_j \leq \lambda_n$,

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j c_j^2}{\sum_{j=1}^{n} c_j^2} \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} \lambda_n c_j^2}{\sum_{j=1}^{n} c_j^2} = \lambda_n,$$

en prenant $\|v_j\| = 1$.
On a donc obtenu $\lambda_n^* \leq \lambda_n \ \forall \{y_1, ..., y_{n-1}\}$, donc en particulier $\max \lambda_n^* \leq \lambda_n$. Pour montrer l'égalité, on va choisir judicieusement les y_i.
On prend donc $y_1 = v_1$, $y_2 = v_2, ..., y_{n-1} = v_{n-1}$ avec v_j les vecteurs propres de $-\Delta$.
On applique alors le théorème 3.1.2 (on peut l'appliquer, les fonctions v_j étant de classe C^∞ par régularité elliptique) :

$$\lambda_n = \min \frac{\|\nabla\omega\|^2}{\|\omega\|^2} = \lambda_n^*,$$

minimum pris sur ω tel que $< \omega, v_i >= 0$, ce qui achève la démonstration. □

Remarque : La proposition 3.1.3 entraîne que ce théorème est aussi vrai avec les conditions de Neumann, puisque le théorème 3.1.2 que l'on utilise dans la preuve l'est.

Le maximin obéit au principe général suivant : *plus il y a de contraintes sur les fonctions test utilisées, plus la valeur du maximin augmente.*

Notation : A partir d'ici, on notera :
λ_n ou μ_n les valeurs propres pour les conditions de Dirichlet ;
$\tilde{\lambda}_n$ ou $\tilde{\mu}_n$ les valeurs propres pour les conditions de Neumann.

4.2.2 Comparaison des valeurs propres

Proposition 4.2.2. *Soit Ω un domaine plan borné.*
Avec les notations précédentes, on a :

$$\tilde{\lambda}_n \leq \lambda_n \quad \forall n \geq 1.$$

Preuve :

Par le théorème 3.1.1 et la proposition 3.1.3, on a :

$$\lambda_1 = \min \frac{\|\nabla\omega\|^2}{\|\omega\|^2}, \quad \omega \in H_0^1(\Omega)$$

$$\tilde{\lambda}_1 = \min \frac{\|\nabla\omega'\|^2}{\|\omega'\|^2}, \quad \omega' \in H^1(\Omega).$$

Comme $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, on a $\tilde{\lambda}_1 \leq \lambda_1$.

De même, par le théorème 3.1.2 et la proposition 3.1.3, on a $\tilde{\lambda}_n^* \leq \lambda_n^*$ $\forall n \geq 2$.
En appliquant le théorème 4.2.1, on a bien $\tilde{\lambda}_n \leq \lambda_n$.

□

Proposition 4.2.3. *Soient D et D' deux domaines plans bornés tels que $D \subset D'$.*
On note $\tilde{\lambda}_n$ et λ_n les valeurs propres pour Neumann et Dirichlet respectivement sur D et $\tilde{\lambda}'_n$ et λ'_n les valeurs propres pour Neumann et Dirichlet respectivement sur D'.
Alors :

$$\tilde{\lambda}'_n \leq \tilde{\lambda}_n \quad \forall n \geq 1$$

$$\lambda'_n \leq \lambda_n \quad \forall n \geq 1$$

Preuve :

Dans le cas de Dirichlet d'abord :
Par le théorème 4.2.1, $\lambda_n = \max(\lambda_n^*)$.
Soit $\omega \in H_0^1(D)$. On étend ω à D' en définissant ω' comme suit :

$$\omega'(x,y) = \begin{cases} \omega(x,y) \ \textit{pour} \ (x,y) \in D; \\ 0 \ \textit{sinon}. \end{cases}$$

On a bien $\omega' \in H_0^1(D')$. Comme les fonctions test ω' doivent valoir 0 sur $D' \setminus D$, on une contrainte supplémentaire sur elles, donc $\lambda'_n \leq \lambda_n \quad \forall n \geq 1$.

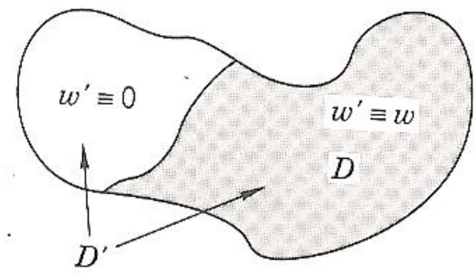

FIGURE 6 – Domaines emboîtés - source : [Str92, Figure 2, chap.11]

Dans le cas de Neumann :
Par le théorème 4.2.1, $\tilde{\lambda}_n = \max(\tilde{\lambda} n^*)$.
Soit $\tilde{\omega} \in H^1(D)$. On étend $\tilde{\omega}$ à D' en définissant $\tilde{\omega}'$ comme suit :

$$\tilde{\omega}'(x,y) = \begin{cases} \tilde{\omega}(x,y) \ \ pour \ \ (x,y) \in D; \\ 0 \ \ sinon. \end{cases}$$

On a bien $\tilde{\omega}' \in H^1(D')$. Comme les fonctions test $\tilde{\omega}'$ doivent valoir 0 sur $D' \setminus D$, on une contrainte supplémentaire sur elles, donc $\tilde{\lambda}'_n \leq \tilde{\lambda}_n \quad \forall n \geq 1$. $\square$

4.2.3 Formule pour un quadrillage

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et D un tel domaine. $D = \bigcup_{i=1}^m D_i$, chaque D_i étant un carré de côté $a > 0$. On va appeler D "quadrillage".

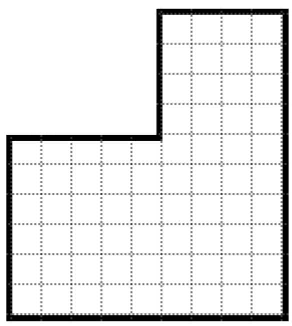

FIGURE 7 – Un exemple de quadrillage

On note :
$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n \leq ...$ les valeurs propres sur D avec les conditions de Dirichlet ;
$\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq ... \leq \tilde{\lambda}_n \leq ...$ les valeurs propres sur D avec les conditions de Neumann.

Chaque domaine D_i possède sa propre suite croissante de valeurs propres. L'idée est de ressembler *toutes* les valeurs propres de *tous* les D_i dans une unique suite croissante :

$\mu_1 \leq \mu_2 \leq ... \leq \mu_n \leq ...$ pour Dirichlet ;
$\tilde{\mu}_1 \leq \tilde{\mu}_2 \leq ... \leq \tilde{\mu}_n \leq ...$ pour Neumann.

Proposition 4.2.4. *Avec les notations introduites ci-dessus, on a :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda_n \leq \mu_n \quad \textit{et} \quad \tilde{\mu}_n \leq \tilde{\lambda}_n$$

Preuve :

Pour Dirichlet, on calcule les valeurs propres en évaluant le minimum du quotient de Rayleigh pris sur des fonctions test qui doivent s'annuler sur ∂D *et* sur les frontières entre chaque D_i, puis en prenant le maximum comme vu précédemment. La classe de fonctions test autorisées pour les D_i présentant plus de contraintes que celle autorisée pour D, on obtient bien $\lambda_n \leq \mu_n$.

Pour Neumann, on a vu que $\tilde{\mu}_n = \max(\tilde{\mu}_n^*)$, avec $\mu_n^* = \min(\frac{\|\nabla\omega\|^2}{\|\omega\|^2})$, les fonctions test ω en jeu n'étant soumises à aucune condition aux bords. Cependant, elles peuvent être discontinues, ce qui fait qu'il y en a beaucoup plus que celles en jeu pour $\tilde{\lambda}_n$. On obtient bien $\tilde{\mu}_n \leq \tilde{\lambda}_n$.

□

En combinant les trois propositions précédentes, il vient directement :

Corollaire 2.

Avec les notations précédentes,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \tilde{\mu}_n \leq \tilde{\lambda}_n \leq \lambda_n \leq \mu_n.$$

On peut maintenant montrer la formule de Weyl sur un domaine D constitué d'un nombre fini de carrés.

Théorème 4.2.5. ***Formule de Weyl sur un quadrillage***

Notons $\mathcal{A}(D)$ l'aire du domaine D et reprenons les notations de ce paragraphe. Alors :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right) = \frac{4\pi}{\mathcal{A}(D)}$$

et :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\tilde{\lambda}_n}{n}\right) = \frac{4\pi}{\mathcal{A}(D)}.$$

Preuve :

On avait montré dans la partie 2 que pour un carré de côté a donné, disons D_i, on a la relation $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\lambda_n}{n}) = \frac{4\pi}{a^2}$.

Rappelons nous que dans la démonstration, on avait utilisé la fonction N qui à un réel positif λ associe $N(\lambda)$ le nombre de valeurs propres inférieures à λ. Grâce à cette fonction, on avait obtenu la relation $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\left(\frac{N(\lambda)}{\lambda}\right) = \frac{a^2}{4\pi} = \frac{\mathcal{A}(D_i)}{4\pi}$

Notons N_i cette fonction pour chaque D_i. Introduisons maintenant la fonction M qui à un réel positif λ associe $M(\lambda)$ le nombre de valeurs propres inférieures à λ, mais pour la séquence croissante $\mu_1 \leq \mu_2 \leq ... \leq \mu_n \leq ...$ de valeurs propres pour l'ensemble des m petits carrés. $M(\lambda) = \text{card}\,\{k \in \mathbb{N}, \mu_k \leq \lambda\} = \sum_{i=1}^m N_i(\lambda)$.

Il vient alors :

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{M(\lambda)}{\lambda}\right)=\sum_{i=1}^{m}\lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{N_i(\lambda)}{\lambda}\right)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\mathcal{A}(D_i)}{4\pi}=\frac{\mathcal{A}(D)}{4\pi}.$$

En substituant la $n^{\text{ème}}$ valeur propre μ_n à λ, on a $M(\lambda)=n$, d'où :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\mu_n}{n}\right)=\frac{4\pi}{\mathcal{A}(D)}.$$

Pour le cas des valeurs propres de Neumann $\tilde{\mu}_n$, le même argument donne

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\tilde{\mu}_n}{n}\right)=\frac{4\pi}{\mathcal{A}(D)}.$$

En divisant par $n\geq 1$ les inégalités du corollaire 2, on obtient :

$$\frac{\tilde{\mu}_n}{n}\leq\frac{\tilde{\lambda}_n}{n}\leq\frac{\lambda_n}{n}\leq\frac{\mu_n}{n}.$$

Par encadrement, on a bel et bien :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)=\frac{4\pi}{\mathcal{A}(D)}\qquad et\qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\tilde{\lambda}_n}{n}\right)=\frac{4\pi}{\mathcal{A}(D)}.$$

□

4.3 Formule pour un domaine quelconque

Après avoir prouvé la formule pour un quadrillage, on peut déjà approcher n'importe quel domaine quelconque, en l'encadrant entre deux quadrillages. Cependant, on va essayer d'être encore plus précis.

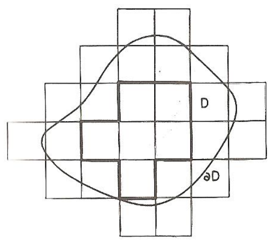

FIGURE 8 – Approximation d'un domaine D par deux quadrillages - source :[Gar86, Figure 41, chap. 11]

4.3.1 Triangles

Triangle rectangle isocèle :

On considère un triangle rectangle isocèle de côté $a>0$. Ce triangle s'inscrit dans un carré de côté a, dont la diagonale est l'hypoténuse du triangle.

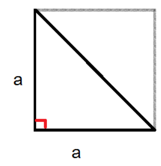

FIGURE 9 – Triangle rectangle isocèle

En effectuant une réflexion par rapport à l'hypoténuse, on constate que chaque fonction propre pour le triangle en est aussi une pour le carré, pour la même condition de bord. En notant μ_n les valeurs propres du triangle et λ_n celles du rectangle, on obtient, en vertu des résultats précédents,

$$\mu_n \geq \lambda_n.$$

En reprenant la fonction N dont on a parlé à plusieurs reprises et avec des notations évidentes, on trouve donc :

$$N_\Delta(\lambda) \leq N_\square(\lambda).$$

Triangle rectangle quelconque :

Soit T un triangle rectangle de côtés a et b, inscrit dans un triangle rectangle isocèle T' comme suit :

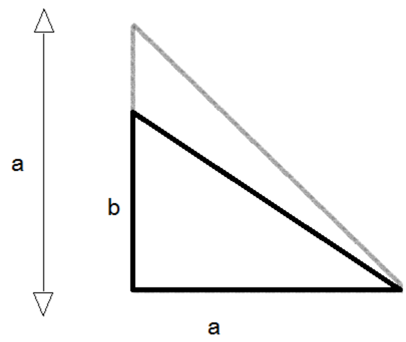

FIGURE 10 – Triangle rectangle quelconque

On effectue le changement de variables :

$$\begin{cases} z = x \\ t = \frac{ay}{b} \end{cases}$$

ce changement transforme T en T'. Si on calcule le quotient de Rayleigh, on trouve

$$\frac{\iint_T (\frac{\partial \omega}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \omega}{\partial y})^2 \, dxdy}{\iint_T \omega^2 dxdy} = \frac{\iint_{T'} [(\frac{\partial \omega}{\partial z})^2 + \frac{a^2}{b^2} (\frac{\partial \omega}{\partial t})^2 \,] \frac{b}{a} dzdt}{\iint_{T'} \omega^2 \frac{b}{a} dzdt} \geq \frac{\iint_{T'} (\frac{\partial \omega}{\partial z})^2 + (\frac{\partial \omega}{\partial t})^2 \, dzdt}{\iint_{T'} \omega^2 dzdt}$$

car $a \geq b$.

On en déduit donc, en notant μ_n les valeurs propres pour T et λ celles pour T', que

$$\mu_n \geq \lambda_n.$$

En reprenant la fonction N, on a donc :

$$N_T(\lambda) \leq N_{T'}(\lambda).$$

On peut maintenant diviser notre domaine arbitraire en carrés, triangles rectangles isocèles et triangles rectangles quelconques.

4.3.2 Approximation au sens fort

Pour affiner notre approximation, on va avoir besoin de la notion d'*approximation au sens fort*.

Définition 11. ***Approximation au sens fort.*** *Soient G et G' deux domaines de $\mathbb{R}^2$. On dit que G' approche G au sens fort si il existe $\varepsilon \geq 0$, et deux fonctions $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient $\forall (x,y) \in G$:*

$$\begin{aligned} |g(x,y)| \leq \varepsilon, &\quad |h(x,y)| \leq \varepsilon, \\ |\frac{\partial}{\partial x} g(x,y)| \leq \varepsilon, &\quad \frac{\partial}{\partial x}|h(x,y)| \leq \varepsilon, \\ |\frac{\partial}{\partial y} g(x,y)| \leq \varepsilon, &\quad \frac{\partial}{\partial y}|h(x,y)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

et telles qu'on puisse passer de G à G' par les changements de variables :

$$\begin{cases} x' = x + g(x,y) \\ y' = y + h(x,y) \end{cases}$$

On dit que G' approche G avec la précision ε. Si $\varepsilon \longrightarrow 0$, on dit que G' est déformé continûment en G.

On a le théorème suivant :

Théorème 4.3.1.
Quelle que soit la condition de bord, la $n^{\text{ème}}$ valeur propre de $-\Delta$ varie continument lorsque le domaine G est déformé en G' au sens fort défini ci-dessus.

Preuve :
Par souci d'économie, on va noter, pour u une fonction de deux variables (x,y), u_x au lieu de $\frac{\partial u}{\partial x}$ et de même pour y.
Soient G et G' deux domaines qui satisfont les conditions du théorème. G' étant déformé continument en G, G' approche G avec la précision ε, $\forall \varepsilon$ suffisamment petit. Pour rappel, la $n^{\text{ème}}$ valeur propre λ_n est donnée par le théorème 4.2.1. On va montrer que le quotient de Rayleigh pour G peut approcher celui pour G' de manière continue.

Soit ϕ une fonction test arbitraire. On prend pour simplifier $\|\phi\| = 1$. On va effectuer les changements de variables :

$$\begin{cases} z = x + g(x,y) \\ t = y + h(x,y) \end{cases}$$

avec g et h comme dans la définition 11.

Le jacobien M est donné par $M = (1 + g_x)(1 + h_y) - g_y h_x$.
Avec notre choix de g et h, M est aussi proche de 1 qu'on le souhaite.

On note également $\phi'(z,t) = \phi(x,y)$.

Calculons le quotient de Rayleigh Q sur G :

$$Q = \iint_G (\phi_x^2 + \phi_y^2)\, dxdy$$
$$= \iint_{G'} \left([(1+g_x)\phi'_z + h_x\phi'_t]^2 + [(1+h_y)\phi'_t + g_y\phi'_z]^2\right) M^{-1} dzdt$$

Par définition de g et h, on a :

$$|g(x,y)| \leq \varepsilon, \quad |h(x,y)| \leq \varepsilon,$$
$$|g_x| \leq \varepsilon, \quad |h_x| \leq \varepsilon,$$
$$|g_y| \leq \varepsilon, \quad |h_y| \leq \varepsilon.$$

Regardons les termes dans l'intégrale :

$$((1+g_x)\phi'_z + h_x\phi'_t)^2 = (1+g_x)^2\phi'^2_z + 2(1+g_x)\phi'_z h_x \phi'_t + h_x^2\phi'^2_t \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \phi'^2_z.$$

De même,

$$((1+h_y)\phi'_t + g_y\phi'_z)^2 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \phi'^2_t.$$

On en déduit que

$$Q \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \iint_{G'} (\phi'^2_z + \phi'^2_t)\, dzdt = Q',$$

où Q' désigne le quotient de Rayleigh sur G'.

Il reste à voir la condition d'orthogonalité de ϕ qui apparaît dans le théorème 4.2.1. Soient $v_1, ..., v_{n-1}$ $n-1$ fonctions C^1 par morceaux telles que $< v_i, \phi >= 0 \; \forall\, i \in 1, ..., n-1$.

On a donc :

$$\iint_G v_i \phi dxdy = \iint_G \frac{\partial v_i}{\partial x}\phi_x dxdy = \iint_G \frac{\partial v_i}{\partial y}\phi_y dxdy = 0 \quad \forall i \in 1, ..., n-1.$$

Calculons le membre de gauche :

$$0 = \iint_G v_i\phi dxdy = \iint_{G'} v'_i(z,t)\phi'(z,t)M^{-1}dzdt = \iint_{G'} v''_i(z,t)\phi'(z,t)dzdt,$$

(en notant $v''_i(z,t) = M^{-1}v'_i$)

Calculons le membre "du milieu" :

$$0 = \iint_G \frac{\partial v_i}{\partial x}\phi_x dxdy = \iint_{G'} \frac{\partial v'_i(z,t)}{\partial x}\phi_x(z,t)M^{-1}dzdt.$$

$$= \iint_{G'} \left((1+g_x)\frac{\partial v''_i}{\partial z} + h_x\frac{\partial v''_i}{\partial t}\right)\left((1+g_x)\frac{\partial \phi'_z}{\partial z} + h_x\frac{\partial \phi'_t}{\partial t}\right) M^{-1}dzdt \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \iint_{G'} \frac{\partial v''_i}{\partial x}\phi'_x dxdy.$$

Le membre de droite se calcule de la même manière.
Ceci montre que la condition d'orthogonalité est préservée par le changement de variables, donc ϕ' satisfait les conditions du théorème 4.2.1, ce qui prouve alors le théorème 4.3.1.

$\square$

Corollaire 3.

Notons μ_n (resp. μ'_n) les valeurs propres pour G (resp.G'). Dans le cas d'une déformation forte,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \frac{\mu'_n}{\mu_n} - 1 \right| < \eta.$$

4.3.3 Bande frontière

Soit G un domaine plan borné arbitraire. On commence par encadrer G par deux quadrillages G_1 et G_2, afin d'avoir $G_1 \leq G \leq G_2$. On va essayer de comprendre dans cette sous-partie ce qui ce passe dans la zone comprise entre G_1 et G, appelée *bande frontière* (*boundary strip* en anglais).

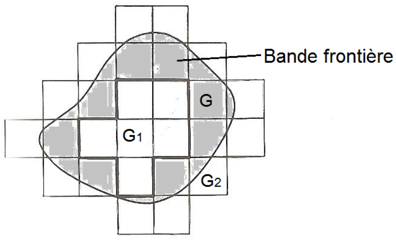

FIGURE 11 – Bande frontière - adapté de [Gar86, Figure 41, chap. 11]

Pour définir cette zone, supposons que la subdivision en carrés soit d'une finesse telle que pour chaque segment de bord contenu dans un carré, la direction du vecteur normal ne varie pas plus que d'un angle η (petit).

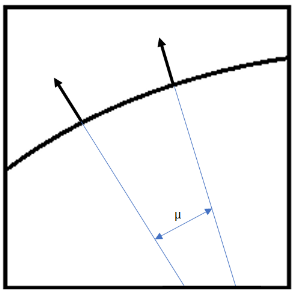

FIGURE 12 – Vecteurs normaux : $\mu \leq \eta$

Notons Γ le bord. On a alors un nombre fini r de domaines élémentaires, notés $E_1, ..., E_r$ qui sont associés à Γ d'une des deux manières suivantes :

- soit E_i $(1 \leq i \leq r)$ est délimité par deux segments perpendiculaires $[AB]$ et $[AC]$ dont la longueur est comprise entre a et $3a$, et un segment du bord $[BC]$ (voir Fig. 13 ci dessous).

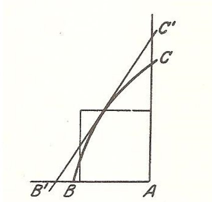

FIGURE 13 – Source : [CH53, Figure 5, chap. 6]

- soit E_i est délimité par un segment $[AB]$ de longueur a, deux segments $[AC]$ et $[BD]$ de longueur comprise entre a et $3a$, tels que $[AC] \perp [AB]$ et $[BD] \perp [AB]$, et un segment $[CD]$ du bord. (voir Fig. 14 ci dessous.)

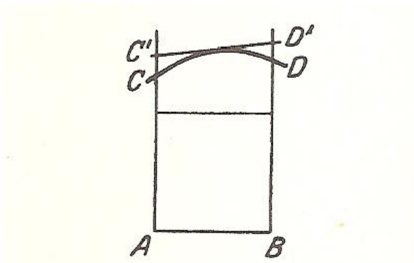

FIGURE 14 – Source : [CH53, Figure 6, chap. 6]

La bande frontière se compose alors de domaines de ces deux types, de telle sorte que lorsqu'on prive G de la bande frontière, il ne reste que le quadrillage intérieur G_1.
Ce quadrillage comporte h carrés $Q_1, ..., Q_h$ de côté a.
Comme r est fini, on peut écrire $r \leq \frac{C}{a}$, avec C constante indépendante de a.
Soit $i \leq r$ fixé. On va majorer la fonction de comptage, pour les conditions de Neumann, pour le domaine E_i, notée N_{E_i}.
Supposons que le domaine E_i soir de la forme de la Fig. 13. Le cas de la Fig. 14 est similaire.
Soit x un point sur le segment de bord $[BC]$. Soit $[B'C']$ la tangente à $[BC]$ passant par x.

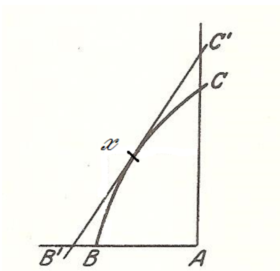

FIGURE 15 – adapté de [CH53, Figure 6, chap. 5]

Le triangle $AB'C'$ est donc rectangle en A et ses côtés sont de longueur $\leq 4a$ par construction. Notons le E_i'.

Décrivons comment passer de E_i à E'_i. Associons à ABC un système de coordonnées polaires (ρ, θ), centré en A, et soit $\rho = f(\theta)$ une équation de $[BC]$.

La transformation $\begin{cases} \theta' = \theta \\ \rho' = \rho \frac{g(\theta)}{f(\theta)} \end{cases}$, avec g prise de telle sorte à satisfaire la définition 11, transforme E_i en E'_i.

En prenant a assez petit, on est précisément dans la situation de la définition 11. On peut choisir ε arbitrairement petit.
D'après le corollaire 3,

$$\exists \eta > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \frac{\mu'_n}{\mu_n} - 1 \right| \leq \eta,$$

pour μ_n et μ'_n valeurs propres pour G et G' respectivement.
Par conséquent, la même chose est vraie pour N_{E_i} et $N_{E'_i}$.
La même idée s'applique aux domaines de la forme de la Fig. 14.
Avec les majorations de la partie 4.3.1, on obtient l'inégalité

$$N_{E_i}(\lambda) < c_1 a^2 \lambda + c_2 a \sqrt{\lambda}, \qquad c_1,\ c_2\ \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

4.3.4 Formule de Weyl générale

On peut désormais achever la preuve complète de la formule de Weyl. On fixe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Notations :
- Quelle que soit la condition au bord, on note $N(\lambda) = \text{card}\,\{k \in \mathbb{N}, \lambda_k \leq \lambda\}$;
- On partitionne G en h carrés $Q_1, ..., Q_h$ de côté $a \geq 0$ et en r domaines de la bande frontière $E_1, ..., E_r$;
- $A_i(\lambda) = card(k \in \mathbb{N}, \lambda_k \leq \lambda)$ pour Q_i, avec Dirichlet ;
- $B_i(\lambda) = card(k \in \mathbb{N}, \lambda_k \leq \lambda)$ pour Q_i, avec Neumann ;
- $A_{E_i}(\lambda) = card(k \in \mathbb{N}, \lambda_k \leq \lambda)$ pour E_i, avec Dirichlet ;
- $B_{E_i}(\lambda) = card(k \in \mathbb{N}, \lambda_k \leq \lambda)$ pour E_i, avec Neumann ;
- Enfin, on note $\mathcal{A}(G)$ l'aire de G.

Avec les parties précédentes, on a :

$$A_i(\lambda) = \frac{a^2\lambda}{4\pi} + a\theta_1 c_1 \sqrt{\lambda}$$
$$B_i(\lambda) = \frac{a^2\lambda}{4\pi} + a\theta_2 c_2 \sqrt{\lambda}$$
$$B_{E_i}(\lambda) = \theta_3 (c_3 a^2 \lambda + c_4 a \sqrt{\lambda})$$

Avec $-1 \leq \theta_j \leq 1$ et c_j constantes indépendantes de a, i, λ.

On a :

$$A_1(\lambda) + ... + A_h(\lambda) \leq N(\lambda) \leq B_1(\lambda) + ... + B_h(\lambda) + B_{E_1}(\lambda) + ... + B_{E_r}(\lambda).$$

Or,

$$A_1(\lambda) + ... + A_h(\lambda) = \frac{\lambda h a^2}{4\pi} + h a \theta_1 c_1 \sqrt{\lambda} = \lambda \left(\frac{ha^2}{4\pi} + \frac{h a \theta_1 c_1}{\sqrt{\lambda}} \right)$$

et

$$\sum_{j=1}^{h} B_j(\lambda) + \sum_{k=1}^{r} B_{E_k} = \frac{ha^2\lambda}{4\pi} + ha\theta_2 c_2\sqrt{\lambda} + \theta_3(c_3 ra^2\lambda + rc_4 a\sqrt{\lambda})$$
$$= \lambda\left(\frac{ha^2}{4\pi} + \theta_3 c_3 ra^2 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(ha\theta_2 c_3 + ra\theta_3 c_4)\right).$$

La quantité ar est $finie$. On obtient donc, pour un a pris assez petit, a^2r aussi petit que l'on veut et on a de plus,

$$\forall\delta > 0, \quad |ha^2 - \mathcal{A}(G)| < \delta,$$

ha^2 étant l'aire du quadrillage $G_1 = \bigcup_{j=1}^{h} Q_j$.

On déduit donc la relation asymptotique suivante :

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{4\pi N(\lambda)}{\lambda\mathcal{A}(G)} = 1,$$

ce qui peut se réécrire, en substituant comme d'habitude la $n^{\text{ème}}$ valeur propre λ_n à λ et n à $N(\lambda)$:

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{\lambda_n}{n}) = \frac{4\pi}{\mathcal{A}(G)},$$

ce qui prouve la $formule\ de\ Weyl$ dans le cas général de la dimension 2.

5 Applications de la formule, généralisation

Dans cette ultime section, nous allons discuter de l'intérêt de cette formule et des conséquences et applications qu'elle peut avoir, de manière essentiellement qualitative. On citera aussi (rapidement) une généralisation possible.

5.1 Problèmes directs et valeurs propres

5.1.1 Problème direct

Dans notre situation, avoir affaire à un *problème direct* revient à se poser la question suivante : si la forme du domaine sur lequel on travaille est connue, que peut-on en déduire sur les valeurs propres ?

On a vu qu'il est possible de calculer assez facilement au moins la première valeur propre, pour des domaines simples (segment, rectangle).

Avec la formule de Weyl, on peut aussi trouver le comportement asymptotique de ces valeurs propres, connaissant les caractéristiques géométriques du domaine.

5.1.2 Interprétation des valeurs propres

On va principalement discuter le cas de la première valeur propre λ_1 sur un domaine plan. Elle correspond à la *fréquence fondamentale* f_1 via la formule $f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\lambda_1}$.

En musique, il est bien connu que la plupart des instruments (en fait, tous sauf le diapason) ne produisent pas des sons purs, c'est à dire qu'il y a plus d'une fréquence (ou "harmonique") dans le son produit. La première valeur propre correspond donc à la fréquence fondamentale. C'est celle-ci qui va donner la hauteur de la note qui est jouée. les autres harmoniques vont enrichir le spectre sonore et donner sa richesse au son.

C'est notamment le cas pour une corde vibrante (guitare, violon...). Une modélisation très simpliste (mais suffisante pour comprendre ce qui se passe) est d'assimiler la corde à un segment de droite. On est donc ramené à un problème en une dimension, avec les conditions de Dirichlet. Si l'on s'intéresse à une corde en particulier, son unique caractéristique géométrique pertinente est sa longueur. Pour jouer plus grave ou plus aigu, il faut rallonger ou raccourcir la longueur de la corde qui vibre. C'est ce que font par exemple les guitaristes quand ils déplacent leur main sur le manche de leur instrument.

Connaissant la longueur de la corde vibrante, il est donc possible de trouver la fréquence de la vibration et donc de savoir quelle est la note jouée, en déterminant la première valeur propre. C'est un peu ce que font les guitaristes en choisissant où pincer la corde pour jouer la note voulue. Peu d'entre eux cependant doivent faire le lien avec le laplacien, sauf peut-être Brian May de Queen qui possède un doctorat en astrophysique...

Sur le graphe suivant on voit que si l'on joue un La à la guitare, la fréquence fondamentale est à 221 Hz : c'est la note perçue. Le pic à 442 Hz correspond au La de l'octave supérieure, qui fait partie des harmoniques produites. L'autre pic notable, à 327 Hz, correspond lui à un Mi, qui apparait aussi dans les harmoniques produites (le Mi et le La sont espacés d'une quinte).

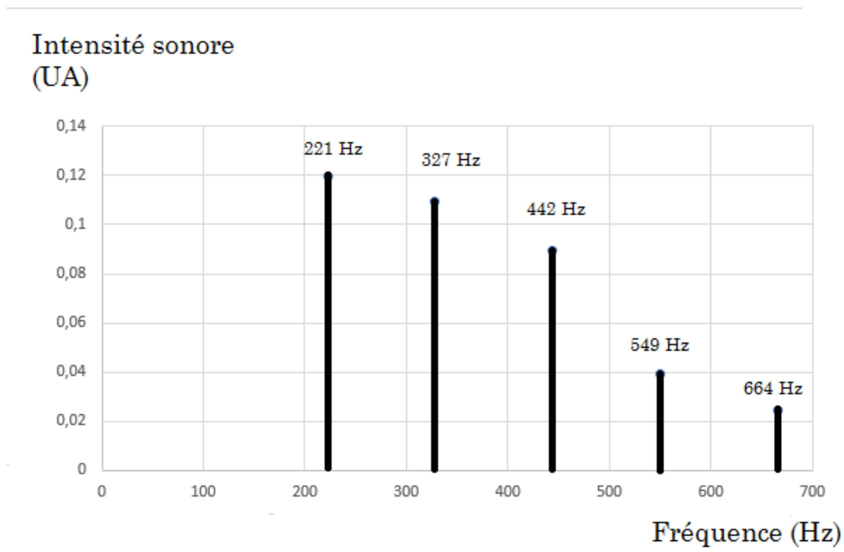

FIGURE 16 – Représentation de l'intensité sonore en fonction de la fréquence pour un La.

5.2 Problème inverse

Un *problème inverse* revient à se poser la question suivante : si les valeurs propres pour un domaine sont connues, que peut-on en déduire de sa géométrie ?

Historiquement, les concepteurs de cloches au Moyen-Age savaient déjà détecter des fissures sur les cloches en les faisant sonner au sol, avant de les installer dans les clochers. En effet, un fissure, aussi petite soit-elle, va modifier la fréquence de vibration de la cloche et donc le son émis.

Avec notre formule de Weyl, on peut retrouver l'aire d'un domaine si l'on connait assez de valeurs propres. Cependant, on ne peut pas retrouver exactement la forme du domaine : deux domaines différents mais ayant la même aire et le même périmètre ne sont pas discernables par cette méthode.

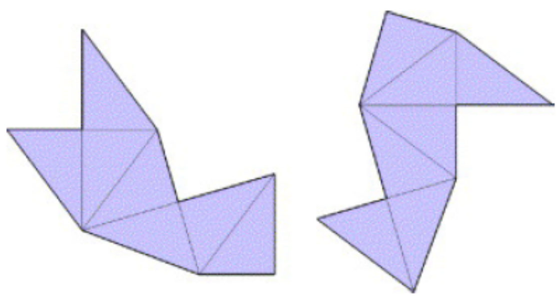

FIGURE 17 – Deux domaines différents admettant le même spectre - source : [Can]

On peut néanmoins tirer un certain nombre d'informations en connaissant les valeurs propres associées à un domaine. Pour un polygone Ω et pour le laplacien de Dirichlet, la formule suivante a été démontrée par Mark Kac en 1966 :

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \sim \frac{1}{4\pi t}\left(\mathcal{A}(\Omega) - \sqrt{4\pi t} \times \mathcal{P}(\Omega) + \frac{2\pi t}{3}(1-\gamma(\Omega))\right),$$

où $\mathcal{A}(\Omega)$ et $\mathcal{P}(\Omega)$ désignent respectivement l'aire et le périmètre de Ω, et $\gamma(\Omega)$ son genre (pour faire simple, le genre d'une surface correspond au nombre de "trous" qui la percent). Cette formule montre donc qu'il est possible, à partir de la séquence de valeurs propres, de déduire l'aire du domaine, son périmètre et le nombre de trous qui le percent !

5.3 Généralisation

La formule de Weyl est généralisable en dimension (finie) quelconque.

En dimension 3, on a le résultat suivant, pour un domaine connexe borné admettant un bord lisse :

$$\frac{\lambda_n^{3/2}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{6\pi^2}{\mathcal{V}(\Omega)},$$

où $\mathcal{V}(\Omega)$ désigne le volume de Ω. En introduisant $N(\lambda)$ comme toujours, on a :

$$\frac{N(\lambda)}{\lambda^{3/2}} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \frac{\mathcal{V}(\Omega)}{6\pi^2}.$$

Il est possible de généraliser à une dimension d finie quelconque :

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{d/2}} = (2\pi)^{-d}\omega_d \mathcal{V}(\Omega),$$

où $\mathcal{V}(\Omega)$ désigne le volume de Ω et ω_d le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$. On pourra consulter [Can] pour les détails. On y trouvera notamment de nombreux exemples classiques.

6 Conclusion

Pour prouver la formule dans le cas d'un domaine simplement connexe et borné de $\mathbb{R}^2$, on a commencé par le cas d'un rectangle pour ensuite étendre et généraliser la formule à un domaine quelconque. Pour y parvenir, on a introduit de nouveaux outils d'analyse, telles que le principe du minimum (3.1.1) ou le théorème maximin (4.2.1).

Cependant, on n'a fait qu'effleurer la surface d'une discipline très riche. On n'a pas parlé de fonctions de Green, d'opérateurs à noyaux, etc... qui sont d'autres outils efficaces pour traiter des problèmes d'équations aux dérivées partielles. Les applications en physique sont innombrables et ont des répercussions massives sur le quotidien de chacun. On citera notamment la résolution de l'équation de la chaleur ou d'équations d'onde, par exemple.

D'un point de vue plus abstrait, il est possible d'appliquer la formule sur des variétés Riemanniennes, ce qui est une manière intéressante d'étudier ces objets en utilisant le laplacien.

Références

[Bre83] Haï m Brezis. *Analyse Fonctionnelle.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].

[Can] Yaiza Canzani. Analysis on manifolds via the laplacian.

[CH53] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics. Vol. I.* Interscience Publishers, Inc., New York, N.Y., 1953.

[Cia] P.G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.*

[Eva] L.C. Evans. *Partial Differential Equations.*

[Gar86] P. R. Garabedian. *Partial Differential Equations.* Chelsea Publishing Co., New York, second edition, 1986.

[GT83] David Gilberg and Neil S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[Str92] Walter A. Strauss. *Partial Differential Equations.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992. An introduction.