Recueil d'exercices

Systèmes linéaires

Exercice 1 — Résoudre par la méthode du pivot de Gauss.

a. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y = -1 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x - y + z + 2t = -1 \\ -2x + y + z = -3 \\ -x + 2y + z - t = 1 \end{cases}$

Exercice 2 — En utilisant la méthode du pivot de Gauss, calculer la matrice inverse de chacune des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 — Pour quelles valeurs de a et b, le système suivant a-t-il
a. aucune solution **b.** une solution unique **c.** une infinité de solutions ?

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + ay = b \end{cases}$$

Déterminants

Exercice 4 — Calculer les déterminants suivants.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 5 — Montrer, presque sans calculs, que les déterminants ci-dessous sont nuls.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 6 & 5 \\ 5 & 1 & -10 & -4 \\ -4 & 2 & 8 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 6 — Par des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes, calculer les déterminants suivants.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & -a & -a & -a \\ b & b & -b & -b \\ c & x & c & -c \\ d & y & z & d \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 7 — On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a. Calculer $\det A$ et $\det B$.

b. Calculer $A + B$ et $\det(A + B)$, et comparer à $\det A + \det B$.

c. Calculer AB et $\det(AB)$, et comparer à $(\det A)(\det B)$.

d. Calculer $\det(A^{2023})$ (sans calculer A^{2023}).

Exercice 8 — Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer l'inverse de A par la méthode de Gauss, puis par la méthode des déterminants (à l'aide de la comatrice).

b. Mêmes questions pour la matrice B.

c. Quelle méthode choisiriez-vous pour une matrice $C \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$?

Exercice 9 — Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Lorsque c'est le cas, calculer A^{-1} par la méthode des déterminants.

Exercice 10 — Donner des exemples de matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = -I$. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I$.

Exercice 11 — Soit les matrices $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et pour $n \geqslant 4$

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour $n \geqslant 2$, on pose : $D_n = \det A_n$.

a. Calculer D_2 et D_3.

b. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a : $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$, puis que $D_n = n + 1$.

Exercice 12 — Dans le plan euclidien, soit A, B, C les points de coordonnées $A(-1, -1)$, $B(1, 0)$ et $C(0, 1)$. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Déterminer l'aire du parallélogramme de côtés AB et AC et en déduire l'aire du triangle ABC. Dessiner ce parallélogramme.

Exercice 13 — *Aire du triangle unité.* Soit $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Dans le plan euclidien, soit A, B, C les points de coordonnées $A(a, 0)$, $B\big(-\frac{a}{2}, \frac{1}{2}\big)$ et $C\big(-\frac{a}{2}, -\frac{1}{2}\big)$.

a. Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b. Déterminer l'aire du parallélogramme de côtés AB et AC et en déduire l'aire du triangle ABC.

c. En choisissant pour base AB, calculer la hauteur du triangle et vérifier le résultat de la question précédente.

Exercice 14 — Dans l'espace euclidien, soit A, B, C, D les points de coordonnées $A(-1, 0, 0)$, $B(1, 2, 3)$, $C(0, 1, 1)$ et $D(-1, 1, 2)$. Déterminer le volume du parallélipipède de côtés AB, AC et AD et en déduire le volume du tétraèdre $ABCD$.

Exercice 15 — *Volume du tétraèdre unité.* Soit $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $b = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Dans l'espace euclidien, soit A, B, C, D les points de coordonnées $A(a, 0, 0), B\big(-\frac{a}{2}, \frac{1}{2}, 0\big), C\big(-\frac{a}{2}, -\frac{1}{2}, 0\big), D(0, 0, b)$.

a. Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CD}$.

b. Déterminer le volume du parallélépipède de côtés AB, AC et AD et en déduire le volume du tétraèdre $ABCD$.

c. En choisissant pour base ABC et en utilisant l'exercice 13, calculer la hauteur du tétraèdre et vérifier le résultat de la question précédente.

Exercice 16 — Soit $M_1 = (x_1, y_1)$ et $M_2 = (x_2, y_2)$ deux points du plan. Montrer qu'une équation de la droite passant par M_1 et M_2 est donnée par

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Géométrie du plan

Exercice 17 — Le plan géométrique est muni d'un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé. On considère les vecteurs définis par leurs coordonnées $\vec{u}(1, -2)$, $\vec{v}(2, 1)$, $\vec{w}(2, -4)$ et $\vec{e}(1, 0)$.

a. Représenter dans le plan les vecteurs $\vec{u}$, $2\vec{u}$, $-\frac{1}{2}\vec{u}$, $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{w}-\vec{e}$.

b. Calculer la norme de chaque vecteur puis déterminer les angles géométriques entre eux. Y a-t-il des vecteurs colinéaires ou orthogonaux dans la liste ?

c. Calculer $||\vec{u} - 2\vec{v}||^2$ et $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$.

d. Donner une équation paramétrique des droites vectorielles dirigées par $\vec{w}$ et $\vec{e}$ et indiquer un vecteur normal à chacune d'elles.

e. Donner une équation cartésienne des droites vectorielles dirigées par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et indiquer un vecteur normal à chacune d'elles.

f. Déterminer le vecteur $\vec{x}$ tel que $2\vec{x} + \vec{u} = \vec{w}$.

Exercice 18 — Le plan géométrique est muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. On considére les points définis par leurs coordonnées $A(-6, 2)$, $B(-4, -2)$ et $C(4, 0)$.

a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b. Calculer les coordonnées du milieu M du segment $[BC]$.

c. Déterminer les coordonnées du point D pour que le quadrilatère $0BDC$ soit un parallèlogramme.

Exercice 19 — Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$, soit D_1 la droite d'équation $2x+y = 1$ et D_2 la droite orthogonale à D_1 et passant par le point $A(-1, 1)$.

a. Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}_1$ de la droite D_1 et un vecteur directeur $\vec{u}_2$ de la droite D_2.

b. Écrire une équation cartésienne pour la droite D_2.

c. Calculer la distance de A à D_1.

Exercice 20 — Soient $A_1, A_2, \ldots, A_k$ des points du plan ou de l'espace géométrique. On suppose qu'en chaque point A_j, $j = 1, \ldots, k$, se trouve un objet de masse m_j. Les physiciens appellent ces objets des masses ponctuelles. La masse totale du système est $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$. Le centre de gravité (ou point d'équilibre ou barycentre) du système est le point G donné par la formule $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}(m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_1} + ... + m_k\overrightarrow{OA_k})$, où O est une origine quelconque (le point G ne dépend pas du choix de l'origine O).

a. Calculer les coordonnées du centre de gravité du système correspondant aux données suivantes : points $A_1(5, -4)$, $A_2(4, 3)$, $A_3(-4, 3)$, $A_4(-9, 8)$; masses respectives $m_1 = 2g$, $m_2 = 5g$, $m_3 = 2g$ $m_4 = 1g$.

b. Calculer le centre de gravité du système correspondant aux données suivantes : points $A_1(0, 1)$, $A_2(8, 1)$, $A_3(2, 4)$; masses respectives $m_1 = 1g$, $m_2 = 1g$, $m_3 = 1g$. Comment répartir une masse supplémentaire de $6g$ aux trois sommets pour que le point d'équilibre se déplace en $G(2, 2)$?

Exercice 21 — Une société minière possède deux sites. Une journée d'exploitation du site n°1 produit du minerai composé de 20 tonnes de cuivre et 550 kg d'argent, tandis qu'une journée d'exploitation du site n°2 produit de minerai composé de 30 tonnes de cuivre et 500 kg d'argent. Pour modéliser la situation on introduit les vecteurs $\vec{v}_1(20, 550)$ et $\vec{v}_2(30, 500)$. Ainsi $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ représentent la production journalière des sites 1 et 2 respectivement.

a. Quelle interprétation peut-on donner du vecteur $5\vec{v}_1$?

b. On suppose que la société exploite le site 1 pendant t_1 jours et le site 2 pendant t_2 jours. écrire une équation vectorielle dont la solution est le nombre de jours d'exploitation de chacun des sites pour produire 150 tonnes de cuivre et 2825 kg d'argent. Résoudre cette équation (Ref. D.C. Lay).

Exercice 22 — Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit ABC le triangle donné par $A(1, 1)$, $B(4, 1)$ et $C(2, 4)$.

a. Dessiner le triangle.

b. Calculer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$. Calculer leurs normes puis l'angle géométrique α formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c. Écrire une équation cartésienne de la droite passant par B et C.

d. Écrire une équation cartésienne de la hauteur du triangle en A (c'est-à-dire la droite orthogonale à la droite BC et passant par A).

e. Calculer les coordonnées de l'orthocentre du triangle (c'est-à-dire l'intersection des trois hauteurs du triangle).

Exercice 23 — On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient $A(4, 0)$ et $B(1, 3)$ deux points et soit T le triangle OAB.

a. Déterminer et dessiner les droites remarquables de T : hauteurs, médianes et médiatrices.

b. Déterminer le centre de gravité G, le centre du cercle circonscrit C et l'orthocentre H du triangle T. Dessiner ces points.

c. Montrer que G, C et H sont alignés.

d. Montrer que les symétriques de H par rapport aux côtés du triangle sont sur le cercle circonscrit.

Géométrie dans l'espace

Exercice 24 — Dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de l'espace, on considère les vecteurs $\vec{a} = 5\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, $\vec{b} = -2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3$, $\vec{c} = -3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{d} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$ et $\vec{e} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$.

a. Calculer la norme des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ et $\vec{e}$.

b. Calculer les composantes et la norme des vecteurs $\vec{a} + \vec{b}$ et $\vec{a} - \vec{c}$.

c. Calculer les produits scalaires $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{a} \cdot \vec{e}$ et $\vec{b} \cdot \vec{c}$.

d. Calculer les produits vectoriels $\vec{a} \wedge \vec{b}$, $\vec{a} \wedge \vec{c}$, $\vec{a} \wedge \vec{e}$ et $\vec{b} \wedge \vec{c}$.

e. Calculer le produit mixte $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.

f. Déterminer un vecteur unitaire $\vec{n}$ colinéaire au vecteur $\vec{a} + \vec{b}$ et de même sens.

Exercice 25 — Dans l'espace muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne le point $A(1, 1, 1)$.

a. Donner une représentation paramétrique et un système d'équations cartésiennes de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(-2, 3, -5)$.

b. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par A et parallèle à (Ox).

c. Donner une représentation paramétrique de la droite (OA).

Exercice 26 — Soit l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

a. Déterminer l'équation du plan H normal à $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ et contenant le point $P(2, -1, 3)$.

b. Déterminer l'équation du plan K parallèle au plan d'équation $4x - 3y - 2z = 11$ et passant par le point $Q(1, -5, 7)$.

c. Trouver une représentation paramétrique de la droite L passant par le point $P(2, -1, 3)$ et ayant la direction du vecteur $\vec{v} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 7\vec{k}$.

d. Trouver une représentation paramétrique de la droite D perpendiculaire au plan d'équation $2x - 3y + 7z = 4$ et passant par le point $P(2, -1, 3)$.

Exercice 27 — Soit $a, b, c \in]0, +\infty[$. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit ABC le triangle donné par $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ et $C(0, 0, c)$.

a. Déterminer les coordonnées d'un vecteur unitaire $\vec{n}$ perpendiculaire au plan contenant ABC.

b. Calculer l'aire S du triangle ABC en utilisant le produit vectoriel.

c. Écrire l'équation cartésienne du plan contenant ABC en utilisant le produit mixte.

d. Calculer le volume du parallélépipède construit sur OA, AB, AC.

Exercice 28 — Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit M le point de coordonnées $M = (1, 2, 3)$.

a. Calculer la distance de M au plan P d'équation $x - 2y + 2z + 1 = 0$.

b. Calculer la distance de M à la droite D passant par l'origine et dirigée par $\vec{u} = (-1, 0, 1)$.

Espaces vectoriels

Exercice 29 — Soit E un espace vectoriel. À partir des huit axiomes de la définition d'espace vectoriel, démontrer les propriétés suivantes.

a. Tout élément est simplifiable : pour tous $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E$, si $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w}$, alors $\vec{u} = \vec{v}$.

b. $\vec{0}$ est unique : si $\vec{0_1}$ et $\vec{0_2}$ sont neutres pour l'addition, alors $\vec{0_1} = \vec{0_2}$.

c. Pour tout $\vec{u} \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $0\vec{u} = \lambda\vec{0} = \vec{0}$.

d. Pour tout $\vec{u} \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, si $\lambda\vec{u} = \vec{0}$, alors $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\lambda = 0$ (ou les deux).

e. Pour tout $\vec{u} \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $-(\lambda\vec{u}) = (-\lambda)\vec{u} = \lambda(-\vec{u})$ (qui est noté $-\lambda\vec{u}$).

Exercice 30 — Parmi les parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes, reconnaître lesquelles sont des s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y = 1 - x\} & B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y = -x\} \\ C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y \geqslant -x\} & D &= \{(a, 2a) \ ; \ a \in \mathbb{R}\} \\ E &= \{(a, a^2) \ ; \ a \in \mathbb{R}\} & F &= \{(2a, -3a) \ ; \ a \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Exercice 31 — Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère les s.e.v.

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x - y + z = 0\} \qquad B = \{(a + b, 2a, 3b) \ ; \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

a. Vérifier qu'il s'agit bien de s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

b. Donner une famille génératrice pour chacun d'eux.

c. Déterminer $A \cap B$ et donner une famille génératrice de $A \cap B$.

Exercice 32 — Dans l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2, on considère les s.e.v. $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & 2b \end{pmatrix} \ ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ et $B = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \ ; x, y, z, t \in \mathbb{R}, \ x + t = 0 \right\}$.
Vérifier qu'il s'agit bien de s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ et donner une famille génératrice pour chacun d'eux. Donner une famille génératrice de $A \cap B$.

Exercice 33 — Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère les deux vecteurs $\vec{u} = (1, 2)$ et $\vec{v} = (3, 4)$.

a. Déterminer les combinaisons linéaires $a\vec{u} + b\vec{v}$ de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui peuvent donner le vecteur nul. Comment s'appelle cette propriété de la famille $\{\vec{u}, \vec{v}\}$?

b. Écrire le vecteur $\vec{i} = (1, 0)$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$. Même question pour le vecteur $\vec{j} = (0, 1)$.

c. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Écrire le vecteur $\vec{w} = (x, y)$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

d. En déduire que la famille $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 34 — Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, soit $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Extraire une base de cette famille en ôtant au fur et à mesure chaque vecteur qui est combinaison linéaire des précédents.

Exercice 35 — Dans l'ensemble $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, les polynômes $P_1 = 1$, $P_2 = X - 1$, $P_3 = X(X - 1)$ et $P_4 = X(X - 1)(X - 2)$ forment-ils une base ? On pourra écrire ces polynômes dans la base canonique $1, X, X^2, X^3$ et calculer leur déterminant.

Exercice 36 — Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, la famille de vecteurs $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, est-elle libre ? Si oui, la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$ en y ajoutant un ou des vecteur(s) de la base canonique.

Exercice 37 — Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

a. Vérifier que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

b. Étant donné $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$, de coordonnées $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B}$, on note $X' = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}'$. Déterminer X en fonction de X' et de P.

c. En déduire X' en fonction de X.

Exercice 38 — Déterminer une condition sur les paramètres $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour que le système d'équations ci-dessous ait des solutions et expliciter toutes les solutions.

$$\begin{cases} x + 2y + 2z - s + 3t = a \\ x + 2y + 3z + s + t = b \\ 3x + 6y + 8z + s + 5t = c \end{cases}$$

Exercice 39 — Les équations de la chimie traduisent les quantités de substances absorbées et produites au cours d'une réaction chimique. Par exemple, lors de la combustion du propane, le propane C_3H_8 réagit avec l'oxygène O_2 pour former du dioxyde de carbone CO_2 et de l'eau H_2O selon une équation de la forme

$$n_1C_3H_8 + n_2O_2 \to n_3CO_2 + n_4H_2O.$$

Pondérer cette équation signifie trouver les plus petits nombres entiers n_i possibles tels que le nombre total de chaque sorte d'atome à gauche soit égal au nombre d'atomes correspondants à droite. Pour cela, on identifie chaque molécule à un vecteur de $\mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix}x_C\\x_H\\x_O\end{pmatrix}$, où x_C, x_H, x_O sont le nombre d'atomes de carbone, d'hydrogène et d'oxygène respectivement de la molécule. Ainsi la molécule de propane correspond au vecteur $\overrightarrow{C_3H_8} = \begin{pmatrix}3\\8\\0\end{pmatrix}$.

a. Résoudre le système $n_1\overrightarrow{C_3H_8} + n_2\overrightarrow{O_2} - n_3\overrightarrow{CO_2} - n_4\overrightarrow{H_2O} = \vec{0}$. En déduire la pondération de la réaction de combustion du propane.

b. Le sulfure de bore réagit violemment avec l'eau pour former de l'acide borique et du sulfure d'hydrogène (odeur d'oeuf pourri). L'équation non pondérée est

$$B_2S_3 + H_2O \to H_3BO_3 + H_2S.$$

En associant un vecteur de $\mathbb{R}^4$ à chaque molécule, trouver une pondération de cette réaction.

Applications linéaires, changements de bases

Exercice 40 — Parmi les applications suivantes, déterminer lesquelles sont linéaires. On rappelle que $\mathbb{R}_2[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré $\leqslant 2$ à coefficients réels, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, et $\operatorname{Tr} M$ désigne la trace de M.

a. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}2x-1\\x+y\\2y\end{pmatrix}$.

b. $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}2x-y\\x+y\\2y\end{pmatrix}$.

c. $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto 2x - y + 1$.

d. $f_4 : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $P \mapsto XP' - P$.

e. $f_5 : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $M \mapsto \operatorname{Tr} M$.

f. $f_6 : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $M \mapsto \det M$.

Pour celles qui sont linéaires, écrire leur matrice dans les bases canoniques. Préciser le noyau et l'image de f_2.

Exercice 41 — Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}y+z\\z+x\\x+y\end{pmatrix}$.

a. Déterminer la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

b. Calculer M^{-1}.

c. En déduire l'expression analytique de f^{-1}.

d. Vérifier le calcul directement sur les expressions analytiques, i.e. résoudre le système d'inconnues x, y, z et de paramètres u, v, w donné par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

Exercice 42 — Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ 4x - 6y \end{pmatrix}$.

a. Déterminer le noyau de f.

b. Déterminer l'image de f.

c. Calculer la composée $f \circ f$.

d. Écrire la matrice M de f et la matrice N de $f \circ f$.

e. Calculer le produit M^2. Que remarque-t-on ?

f. Refaire l'exercice avec la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y \\ 4x - 2y \end{pmatrix}$.

Exercice 43 — Dans l'espace $\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, on considère les vecteurs $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\vec{u_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que $\mathcal{B}' = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4})$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

b. Étant donné $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$, de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B}$, on note $X' = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Déterminer X en fonction de X' et de P.

c. En déduire X' en fonction de X.

Exercice 44 — On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

a. Démontrer que l'ensemble $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

b. Montrer que les polynômes $P_1 = (X-1)X$, $P_2 = X(X+1)$ et $P_3 = (X+1)(X-1)$ forment une base (indication : écrire ces polynômes dans la base canonique $1, X, X^2$ et calculer leur déterminant).

c. Calculer les coordonnées du polynôme $P = X^2 - 3X + 2$ dans cette base.

Exercice 45 — On munit $\mathbb{R}^2$ de sa base canonique $(\vec{i}, \vec{j})$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire déterminée par $f(\vec{i}) = 2\vec{i} - \vec{j}$ et $f(\vec{j}) = -\vec{i} + \vec{j}$. Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ la famille donnée par $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$.

a. Écrire l'expression analytique de f et la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$; on notera A cette matrice.

b. Vérifier que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

c. Calculer $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

d. Calculer $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

e. En déduire la matrice de f, notée B, dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

f. Écrire la matrice de passage P de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ à la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

g. Donner — et vérifier — une relation entre les matrices A, B et P.

Exercice 46 — On munit $\mathbb{R}^2$ de sa base canonique $(\vec{i}, \vec{j})$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire déterminée par $f(\vec{i}) = 2\vec{i} + \vec{j}$ et $f(\vec{j}) = 3\vec{i}$. Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ la famille donnée par $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j}$.

a. Écrire la matrice A de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

b. Vérifier que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

c. Calculer $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$, puis en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

d. En déduire que la matrice de f dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est diagonale.

e. Écrire la matrice de passage P de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ à la base $(\vec{u}, \vec{v})$ et vérifier que $PD = AP$.