Contrôle 1

Calculatrice interdite.
Documents interdits (sur tous supports), téléphone, tablette (etc...) interdits.
Durée 1h40.
Vous pouvez toujours admettre le résultat d'une question et l'utiliser dans la suite.
Total /28 qui sera ramené sur 20

Questions de cours

1. [**2 points**] Donner la définition d'un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que l'ensemble $]a, b[$ est un intervalle.
2. [**2**] Donner la définition précise de la limite (finie) d'une suite. Faire un dessin.
3. [**2**] Soit (u_n) un suite réelle. Supposons qu'il existe $N > 0$ tel que $\forall n \geq N,\ \exists\ l \in [0, 1[$ tel que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < l$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 0$.
4. [**1**] *Application :* Soit a un réel strictement positif. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{a^n}{n!}\right) = 0$.

Exercice 1

On considère la partie de $\mathbb{R}$ suivante :

$$\mathcal{A} = \left\{(-1)^n + \frac{n+1}{n+2},\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

1. [**2**] Justifier que les bornes supérieures et inférieures de $\mathcal{A}$ existent. Les calculer.
2. [**1**] La borne supérieure est-elle un maximum ? L'inférieure un minimum ?
3. [**3**] Mêmes questions pour $\mathcal{B} = [\sqrt{2}, 2] \cap \mathbb{Q}$.

Exercice 2

1. [**2**] Étudier la convergence de $u_n = \sqrt{n^3 + n} - \sqrt{n^3}$.
2. [**2**] Étudier la convergence de $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n$.
3. [**2**] Étudier la convergence de $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.

Exercice 3 (4 points)

Montrer que toute suite d'entiers convergente est constante à partir d'un certain rang.

Exercice 4

On considère pour $n \geq 1$ les suites

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n(n)!}.$$

1. [**1**] Rappeler la définition de suites adjacentes.
2. (a) [**1**] Pour $n \geq 1$, montrer que $(n+2)n(n!) \leq (n+1) \times (n+1)!$. *Indication : pas de récurrence !*
   (b) [**1**] Déduire que (v_n) est décroissante.
   (c) [**2**] Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déduire leur convergence.
3. [**2**] Bonus : Montrer que la limite est irrationnelle. Par l'absurde, si l est la limite, supposer que $l = \frac{p}{q}$, avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, puis multiplier l'encadrement $u_q < l < v_q$ (pourquoi a-t-on cet encadrement ?) par $q(q!)$ et aboutir à une contradiction.