Contrôle 2

Calculatrice interdite.
Documents interdits (sur tous supports), téléphone, tablette (etc...) interdits.
Durée 2h.
Vous pouvez toujours admettre le résultat d'une question et l'utiliser dans la suite.
Barème sur 27 points. Il sera tenu compte de la longueur du sujet dans la notation.

Questions de cours

1. **[2 points]** Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Donner la définition de f continue en x_0.
2. **[2]** Énoncer proprement le théorème des valeurs intermédiaires.
3. **[2]** Énoncer proprement le théorème des accroissements finis.

Exercice 1 [3 pts]

On considère $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^{3/2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Peut-on prolonger f par continuité en 0 ? Si oui, écrire l'expression du prolongement.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et périodique telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)) = l \in \mathbb{R}$. L'objectif de cet exercice est de montrer que f est constante.

1. **[1]** Notons p la période de f. Que signifie que f est périodique de période p ?
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit une suite par $x_n = x_0 + np, \ \forall n \in \mathbb{N}$.
   (a) **[1]** Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n)$?
   (b) **[2]** Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_n))$? Bien justifier.
   (c) **[2]** Conclure en utilisant la question 1.

Exercice 3

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable et telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$.

1. **[1]** Soit $g : x \mapsto e^x(f(x) - f'(x))$. Justifier que g est dérivable et calculer sa dérivée.
2. **[1]** Montrer que g satisfait aux hypothèses du théorème de Rolle.
3. **[1]** Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.
4. **[1]** Déduire que l'on a $f(c) = f''(c)$.

TOURNEZ SVP

Problème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **contractante** s'il existe une constante $K \in [0, 1[$ telle que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|, \quad \forall x, y \in I.$$

On appelle alors ce K la **constante de contraction** de f.

1. **[1]** Supposons que f est contractante de constante de contraction $K = 0$. Que peut-on dire de f ?
2. **[2]** Montrer que toute fonction contractante est continue. *Indication : utiliser la définition de la continuité. Si K et ε sont fixés, on peut trouver un δ convenable très simplement.*
3. Supposons maintenant que $I = [a, b]$, avec $a < b$ deux réels, et soit $f : I \to I$ contractante de constante de contraction K. On définit une suite en posant

$$\begin{cases} u_0 \in [a, b] \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

   (a) **[1]** Rappeler la définition d'un point fixe de f.
   (b) **[2]** En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à $g : x \mapsto f(x) - x$, montrer que f admet un point fixe, noté x_0.
   (c) **[+2]** BONUS : montrer que le point fixe est unique. *Indication : par l'absurde, supposer qu'il y a deux points fixes et aboutir à une contradiction en utilisant le fait que f soit contractante.*
   (d) **[2]** Supposons que (u_n) soit une suite convergente. En utilisant la continuité de f, montrer que la limite de (u_n) est un point fixe de f.

FIN DE L'ÉNONCÉ

TOURNEZ SVP