

Contrôle 1

Calculatrice autorisée.

Documents interdits (sur tous supports), téléphone, tablette (etc...) interdits.

Durée 1h.

Vous pouvez toujours admettre le résultat d'une question et l'utiliser dans la suite.

Problème

1. Étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$ sur l'intervalle $[1, 2]$:

- (a) [2 points] Calculer f' et f'' .
- (b) [3] Utiliser f'' pour étudier les variations et le signe de f' . En déduire les variations de f . Résumer les résultats dans un tableau de variations.
- (c) [2] Utiliser ce qui précède pour calculer $\sup|f'|$ sur $[1, 2]$ et déduire que f est contractante.
- (d) [1] Montrer que $\sqrt{2}$ est un point fixe de f .

2. Étude de la suite $x_0 = 2$, $x_{n+1} = f(x_n)$:

- (a) [1] Montrer que l'intervalle $[\sqrt{2}, 2]$ est stable par f .
- (b) [2] Faire un dessin de premiers termes de la suite (x_n) .
- (c) [2] Étudier les variations de la suite (x_n) , en vous aidant de la question 1.
- (d) [2] Montrer que la suite (x_n) converge. Vers quelle valeur ?

3. Approximation de la limite :

- (a) [1] On pose $g(x) = x^2 - 2$. On rappelle que dans la méthode de Newton, la fonction φ à itérer est donnée par

$$\varphi(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}.$$

Montrer que $\varphi = f$.

- (b) [1] Itérer φ en partant de $x_0 = 2$. Donner autant de termes que possible.
- (c) [2] Donner une majoration de l'erreur (prendre $a = 1$ et $b = 2$)
- (d) [1] Conclusion : donner une approximation de la valeur de la limite de la suite (x_n) .