Contrôle 2

Calculatrice autorisée.
Documents interdits (sur tous supports), téléphone, tablette (etc...) interdits.
Durée 2h.
Vous pouvez toujours admettre le résultat d'une question et l'utiliser dans la suite.

Questions de cours [4pts]

1. **[1pt]** Pour quelles fonctions la méthode des rectangles est-elle exacte ? Et la méthode du point milieu ?
2. **[1]** Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de $\int_a^b f(t)dt$ converge.
3. **[1]** Donner la définition d'une intégrale absolument convergente.
4. **[1]** On considère $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt,\ \alpha > 0$. Discuter de la convergence de I selon les valeurs de α.

Exercice 1 [5pts]

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. **[1]** Montrer que $\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}} dt$ est convergente.
2. **[2]** Avec le changement de variables $x = \sin(t)$ et en vous rappelant que $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$, calculer
$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$
3. **[2]** Avec une intégration par parties, calculer $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt$. *On admettra que* $\lim_{t \to 0} \ln(t)\sqrt{t} = 0$.

Exercice 2 [4pts]

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

1. **[1]** Calculer I_0.
2. **[2]** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)I_n$.
3. **[1]** Déduire que $I_n = n!$

Exercice 3 [5pts]

On considère la fonction $f(x) = x^3 + x$.

1. **[1]** Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_{-1}^2 f(x)dx$.
2. **[1]** Calculer une valeur approchée de cette intégrale avec la méthode des rectangles et $n = 5$ sous-intervalles.
3. **[1]** Dresser le tableau de variations de f sur $[-1, 2]$ et déduire une constante M telle que $|f'(x)| \leq M$ pour $x \in [-1, 2]$.
4. **[1]** Estimer l'erreur commise à la question 2. Est-ce cohérent avec la valeur exacte ?
5. **[1]** Trouver n tel que la méthode des rectangles à n sous-intervalles donne un encadrement de I à 10^{-2} près.

TOURNEZ SVP

Exercice 4 [2 pts]

1. [**1**] Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx = \pi$.
2. [**1**] En utilisant la méthode des trapèzes avec $n = 4$ sous-intervalles, donner une valeur approchée de π.

Exercice 5 [7 pts]

Dans cet exercice on s'intéresse à la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

1. [**1**] Montrer que f est décroissante. Déduire que $[0,1]$ est stable par f.
2. [**2**] Faire un dessin des premiers termes de (u_n). Déduire de la question 1. les variations de (u_n).
3. [**1**] Donner la définition d'un point fixe de f.
4. [**2**] Calculer $\sup |f'|$ sur $[0,1]$, et déduire que f est contractante.
5. [**1**] Est-ce que (u_n) converge ? Si oui, vers quelle limite ? (Il n'est pas nécessaire d'en donner la valeur)

FIN DU SUJET

TOURNEZ SVP