UNIVERSITE DE STRASBOURG

MASTER MATHEMATIQUES FONDAMENTALES

Mémoire de M2

Déformations de catégories abéliennes

Quentin EHRET

Année : 2019/2020

Rédigé sous la direction du Pr. Abdenacer MAKHLOUF

Table des matières

Introduction

La théorie des déformations est née au début des années soixante sous l'impulsion de Murray Gerstenhaber. Cela consiste à modifier la loi multiplicative interne d'une algèbre (A, μ) pour créer une nouvelle algèbre avec la nouvelle multiplication ainsi obtenue. On peut faire cela de plusieurs manières, celle popularisée par Gerstenhaber consiste à utiliser une série formelle et permet de faire des calculs très concrets. Il est également possible d'utiliser la notion de produit tensoriel. Ces déformations sont contrôlées (dans un sens qui sera précisé ultérieurement) par des objets cohomologiques et sont d'un grand intérêt, notamment en géométrie algébrique.

D'un autre côté, l'idée de **catégorie** vient de McLane et Eilenberg dans les années 40, qui ont remarqué que souvent en mathématiques, des objets présentaient des structures et propriétés communes. La formalisation de cette remarque mène à la définition de catégories : simplement, on cherche à "ranger" ensemble des objets qui ont beaucoup de points communs. On trouve donc la catégorie des ensembles, la catégorie des groupes, la catégorie des modules sur un anneau, etc. C'est une théorie qui permet d'avoir une vision globale des choses, de faire des parallèles entre des notions à priori très différentes, et qui se révéla très féconde. Plus précisément, une catégorie $\mathcal{C}$ consiste en la donnée :

- d'une collection d'objets $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
- pour tous $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, une collection $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$ ou $\mathcal{C}(x, y)$ de **flèches** ou **morphismes** ;
- pour tout $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, une fonction *identité* $1_x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x)$;
- pour tous $x, y, z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, une fonction *composition*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z) \\ (g, f) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

qui doivent de plus satisfaire les deux axiomes suivants :
- pour tous morphismes h, g, f composables, on a $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$;
- pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$, $\; f \circ 1_x = 1_y \circ f = f$.

Étendre la notion de déformation de la structure d'algèbre à la structure de catégorie semble donc naturel, au vu des succès obtenus par la théorie des catégories.

Ce projet de Master consiste à comprendre comment s'est faite cette adaptation de la théorie des déformations aux catégories abéliennes. Ce travail a été publié par Michel Van Den Bergh et Wendy Loewen entre 2004 et 2006. Plus précisément, ce mémoire consiste à produire une synthèse des 3 principaux articles de recherche qui présentent cette théorie :

[LVB1] *Deformation Theory of Abelian Categories*, Van Den Bergh, Loewen, Transactions of the American Mathematical Society, 2006 ;
[LVB2] *Hochschild cohomology of abelian categories and ringed spaces*, Van Den Bergh, Loewen, Advances in Mathematics, 2005 ;
[L3] *Obstruction Theory of objects in abelian and derived Categories*, Lowen, Communications in Algebra, 2004.

La première partie du mémoire consiste en des rappels et prérequis assez généraux de théorie des catégories, qui sont indispensables pour aborder le sujet. Le but de cette partie est de compléter les connaissances de base en théorie des catégories et de les spécialiser au problème. On y présente notamment les notions de foncteurs adjoints, de (co)limites, de catégories linéaires et de catégories abéliennes.

Un deuxième court chapitre présente rapidement la théorie des déformations des algèbres associatives. La ligne directrice de ce travail sera d'essayer d'adapter un maximum de résultats au contexte des catégories abéliennes.

Dans un troisième chapitre, on installe la définition de déformation de catégorie abélienne à proprement parler. Une première contribution de l'article [LVB1] est de mettre en place la notion de platitude pour ces catégories abéliennes et d'en donner quelques propriétés. Donner la définition de déformation nécessite de construire de nouveaux objets catégoriques. Tous ces ingrédients permettent donc d'installer une définition satisfaisante de déformation de catégories abéliennes. On donne deux définitions : une pour les catégories linéaires, et une autre pour la catégories abéliennes. La deuxième présente l'avantage de conserver la propriété d'être abélienne. La suite du chapitre consiste à comprendre quelques propriétés des déformations dites nilpotentes et de donner une définition de la notion d'équivalence de déformations dans ce contexte.

Le quatrième chapitre du mémoire consiste à généraliser les résultats de théorie des déformations des algèbres qui font le lien entre déformations et cohomologie de Hochschild. Plus précisément, ces résultats permettent de comprendre comment les déformations sont contrôlées par des objets cohomologiques. On souhaite donc retrouver, si possible, des résultats similaires dans le cadre des catégories abéliennes.

Les articles [LVB2] et [L3] développent cette idée. A nouveau, parvenir à un tel résultat demande une mise en place de nouvelles notions diverses, notamment celle de DG-catégorie, qui sont des catégories dont les espaces de morphismes sont des objets gradués et qui se prêtent donc particulièrement bien aux calculs de cohomologie. La cohomologie de Hochschild, relativement simple dans le cadre des algèbres, est bien plus complexe avec les catégories abéliennes et une partie importante de cette étape consiste à la comprendre. Ensuite, le notion d'obstruction développée dans [L3] est un autre ingrédient indispensable, qu'il faut également adapter au contexte catégorique. Finalement, le point culminant du mémoire est un résultat de l'article [LVB2], qui décrit le contrôle des déformations de catégories abéliennes par des objets de la cohomologie de Hochschild (théorème 91).

Ce mémoire est également l'occasion d'explorer un certain nombre de notions connexes à la théorie des déformations de catégories, aussi parfois des notions et résultats intéressants mais non indispensables à la compréhension de la théorie sont présentés. En conclusion, certaines pistes d'approfondissement sont évoquées.

Remerciements

Je souhaite adresser mes sincères remerciements au professeur Abdenacer Makhlouf pour m'avoir proposé ce sujet passionnant, pour ses conseils, son soutien et pour m'avoir accueilli chaleureusement au laboratoire de mathématiques de l'Université de Haute-Alsace à Mulhouse. Je remercie également mes professeurs du M2 Recherche 2019/2020 de l'Université de Strasbourg pour leur passion contagieuse des mathématiques, ainsi que mes collègues et amis pour notre voyage commun au travers du monde algébrique qui dure depuis maintenant quatre années.

1 Prérequis de théorie des catégories générale

Dans tout le mémoire, on va travailler sur des **anneaux cohérents**. Cette hypothèse permet d'assurer que la catégorie des modules de présentation finie est une sous-catégorie abélienne (voir définition 13) pleine de la catégorie des modules. On rappelle ci-dessous les définitions adéquates :

Définition 1 (Présentation finie)

Soient A un anneau, M un A-module.

- M est un **A-module de type fini** s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, ..., x_n \in M$ tels que tout élément de M s'écrit comme A-combinaison linéaire des x_i. Il est équivalent de dire que $A^{\oplus n} \longrightarrow M$ est une surjection.
- M admet une **présentation finie** s'il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tels que :

$$A^{\oplus m} \longrightarrow A^{\oplus n} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

soit exacte.

Définition 2 (Anneau cohérent)

Soient A un anneau, M un A-module.

- M est un **module cohérent** s'il admet une famille génératrice finie et que chaque sous-module engendré par une famille finie admet une présentation finie sur A.
- A est **cohérent** si A est cohérent comme A-module.
- A est dit **cohérent à gauche (resp. droite)** si tout idéal à gauche (resp. droite) de A de type fini admet une présentation finie.

Bien entendu, un anneau cohérent à gauche et à droite est un anneau cohérent.

On liste ci-dessous quelques propriétés utiles des modules et anneaux cohérents :

Proposition 3 (Propriétés des anneaux cohérents)

Soient A un anneau et M un A-module à gauche.

- M est cohérent à gauche ;

$\iff$ M est de type fini et pour tout entier $n \geq 0$, $\mathrm{Ker}(A^n \longrightarrow M)$ est de type fini ;

$\iff$ M est de type fini et pour tout A-module à gauche de type fini N, pour tout homomorphisme $f : N \longrightarrow M$, $\mathrm{Ker}(f)$ est de type fini.

- A est cohérent à gauche

$\iff$ Tout sous-module de type fini d'un A-module libre à gauche de type fini admet une présentation finie ;

$\iff$ Tout A-module à gauche de présentation finie est cohérent ;

$\iff$ $\mathrm{Ker}(A^n \longrightarrow A)$ est de type fini pour tout $n \geq 0$;

L'hypothèse de cohérence est l'hypothèse minimale, on aurait pu aussi considérer des anneaux noethériens et/ou artiniens dans ce travail.

1.1 Rappels généraux de théorie des catégories

Dans cette section, on rappelle un certain nombre de notions de théorie des catégories générale qui sont indispensables pour l'étude que l'on cherche à mener. On discute notamment du lemme de Yoneda, qui est présenté avec une preuve très détaillée directement inspirée de [R], des adjonctions, des (co)limites et des catégories abéliennes. La plupart des notions sont prises dans [R], avec des compléments de [McL], [F], [B1] et [B2]. On suppose connues les bases de la théorie des catégories, notamment les notions de foncteurs et transformation naturelles, ainsi que les notations pour les catégories usuelles (par exemple, **Set** désigne la catégorie des ensembles).

1.1.1 Lemme de Yoneda

Ce résultat important de la théorie des catégories, qui apparaît sous forme écrite pour la première fois dans l'article de 1960 de Grothendieck *Techniques de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique* est en quelque sorte la formalisation du constat heuristique suivant : un objet est entièrement déterminé par ses relations aux autres objets. Il permet de montrer que, dès qu'on a une catégorie $\mathcal{C}$, un objet $c \in \mathcal{C}$ et le foncteur représenté par c, qui est $\mathcal{C}(c,-)$, alors l'ensemble des transformations naturelles $\mathcal{C}(c,-) \longrightarrow F$, pour $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ quelconque, est entièrement déterminé par l'objet Fc. Précisément :

Théorème 4 (Yoneda)

Pour tout foncteur $F : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$, on a une bijection $\mathrm{Nat}(\mathcal{C}(c,-), F) \simeq Fc$, qui identifie une transformation naturelle $\eta : \mathcal{C}(c,-) \longrightarrow F$ avec l'élément $\eta_c(1_c)$ de Fc.

Preuve :

Soient $F : \mathcal{C} \longmapsto \mathbf{Set}$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,-) : \mathcal{C} \longmapsto \mathbf{Set}$, pour $c \in \mathcal{C}$ fixé.
Montrons qu'on a un isomorphisme : $\mathrm{Nat}\left[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,-), F\right] \cong F(c)$.
Posons

$$\begin{aligned} \phi : \mathrm{Nat}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c,-), F\right) &\longrightarrow F(c) \\ \alpha &\longmapsto \alpha_c(id_c), \qquad \text{avec } \alpha_c : \mathrm{Hom}(c,c) \mapsto F(c). \end{aligned}$$

On va définir une inverse à droite ψ qui, pour $x \in F(c)$, renvoie une transformation naturelle $\psi(x) : \mathrm{Hom}(c,-) \longrightarrow F$. On va ensuite montrer que ψ est aussi une inverse à gauche. Pour x fixé, il nous faut définir les composantes $\psi(x)_d$: $\mathrm{Hom}(c,d) \longrightarrow F(d)$, $(d \in \mathcal{C})$. On procède par analyse et synthèse.

Analyse : Soit ψ telle que $\phi \circ \psi(x) = x$ pour tout $x \in F(c)$ et telle que $\psi(x)$ soit une transformation naturelle. Alors le diagramme suivant commute, pour $f : c \longrightarrow d$:

$$\begin{tikzcd} \text{Hom(c,c)} \arrow[r, "\psi(x)_c"] \arrow[d, "f_*"'] & F(c) \arrow[d, "F(f)"] \\ \text{Hom(c,c)} \arrow[r, "\psi(x)_d"'] & F(d) \end{tikzcd}$$

En observant ce que devient l'élément $\mathrm{id} : c \longrightarrow c$ par ce diagramme, on constate qu'il faut poser

$$\psi(x)_d(f) = F(f)(x), \qquad \forall d \in \mathcal{C},$$

condition qui caractérise bien ψ.

Synthèse : Il reste à montrer que ψ ainsi définie est une transformation naturelle, inverse à gauche et à droite de ϕ. Soient $d, e \in \mathcal{C}$, $f : c \longrightarrow d$ et $g : d \longrightarrow e$. On regarde le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\text{Hom(c,d)} \arrow[r, "\psi(x)_d"] \arrow[d, "g_*"'] & F(c) \arrow[d, "F(g)"] \\
\text{Hom(c,c)} \arrow[r, "\psi(x)_e"'] & F(d)
\end{tikzcd}$$

On a alors $\psi(x)_e \circ g_*(f) = F(g \circ f)(x)$ d'une part, et $F(g) \circ \psi_d(x)(f) = F(g) \circ F(f)(x)$ d'autre part. La fonctorialité de F assure alors que le diagramme commute, donc $\psi(x)$ est bien une transformation naturelle.

On a

$$\phi \circ \psi(x) = \psi(x)_c(id_c) = F(id_c)(x) = id_{F(c)}(x) = x \qquad \forall x \in F(c),$$

donc ψ est bien inverse à droite de ϕ. Montrons maintenant que ψ est inverse à gauche de ϕ, ce qui est équivalent à montrer, pour $\alpha \in \text{Nat}\,(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c,-), F)$, que $\psi(\alpha_c(id_c)) = \alpha$. Pour ce faire, on va montrer que α et $\psi(\alpha_c(id_c))$ ont les mêmes composantes en tant que transformations naturelles.
Par définition, on a $\psi(\alpha_c(id_c))_d(f) = F(f)(\alpha_c(id_c))$. Or, comme α est une transformation naturelle, on a

$$F(f)\,(\alpha_c(id_c)) = \alpha_d(f).$$

Finalement,

$$\psi(\alpha_c(id_c))_d(f) = F(f)(\alpha_c(id_c)) = \alpha_d(f),$$

Donc

$$\psi(\alpha_c(id_c))_d = \alpha_d,$$

D'où

$$\psi(\alpha_c(id_c)) = \alpha.$$

On donc montré que $\psi = \phi^{-1}$, donc ϕ est une bijection.

□

1.1.2 Adjonctions

On utilisera fréquemment la notion d'adjonction dans ce travail, aussi ce paragraphe a pour but d'en rappeler la définition, ainsi que de donner l'exemple essentiel d'adjonction : celle entre le foncteur Hom et le produit tensoriel.

Définition 5 (Adjonction)

Une **adjonction** consiste en une paire de foncteurs $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$, ainsi que d'un isomorphisme naturel pour tous $c \in \mathcal{C}$ et $d \in \mathcal{D}$:

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(Fc, d) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, Gd).$$

On dit alors que F est **adjoint à gauche** de G et que G est **adjoint à droite** de F.

Lorsque $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont localement petites, la naturalité exprimée dans la définition donne un isomorphisme naturel entre les bifoncteurs $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F-,-) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \longrightarrow \textbf{Set}$ et $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G-) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \longrightarrow \textbf{Set}$.

Exemple fondamental :
Soit R un anneau et M un R-module. Regardons les foncteurs

$$F : M \otimes_R - : \text{Mod}(R) \longrightarrow \text{Ab}$$

et

$$G : \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, -) : \text{Ab} \longrightarrow \text{Mod}(R).$$

Alors, F et G forment une paire de foncteurs adjoints. On a donc, pour $X, Y \in \text{Mod}(R)$:

$$\text{Hom}_{\text{Ab}}(M \otimes_R X, Y) \cong \text{Hom}_{\text{Mod}(R)}(X, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, Y)),$$

ce qui peut être réécrit en

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R X, Y) \cong \mathrm{Hom}_R(X, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, Y)).$$

On peut généraliser pour deux catégories abéliennes (voir plus loin) quelconques $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(M \otimes_{\mathcal{A}} X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(M, Y)).$$

1.1.3 Limites et colimites, (co)-limites filtrées

De nombreuses constructions mathématiques bien connues, telles que le produit cartésien, le pgcd, la somme directe, la limite inverse ou encore l'objet terminal peuvent être formalisées sous la notion unique de **limite** (ou la notion duale de **colimite**). On va voir dans ce paragraphe comment définir de tels objets, ainsi que certaines propriétés utiles dans l'étude des déformations de catégories abéliennes.

Avant tout chose, il faut comprendre comment un diagramme dans une catégorie $\mathcal{D}$ peut être vu comme un foncteur. Soit J une petite catégorie, appelée catégorie indexante. Une diagramme dans C est alors simplement un foncteur $F : J \longmapsto \mathcal{C}$.

Exemple :
On veut voir le diagramme suivant (dans $\mathcal{C}$) comme un foncteur :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & & B \\ & C \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

On considère alors la catégorie J suivante (avec des flèches identités pour chaque objet) :

$$\begin{tikzcd} i_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & i_2 \\ & i_3 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Notre diagramme est alors simplement l'image du foncteur $F : J \longrightarrow \mathcal{C}$ qui vérifie $F(i_1) = A$, $F(i_2) = B$, et $F(i_3) = C$. Par analogie, cela revient à identifier fonction et image de la fonction.

Soient maintenant $\mathcal{C}$ une catégorie et $\mathcal{I}$ une catégorie indexante. Soit $X \in \mathcal{C}$ un objet. On définit le foncteur constant, noté X également :

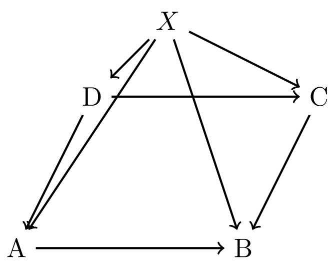
$$\begin{aligned} X :\ \mathcal{I} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ i_1 &\longmapsto X \\ [f : i_1 \to i_2] &\longmapsto id_X \end{aligned}$$

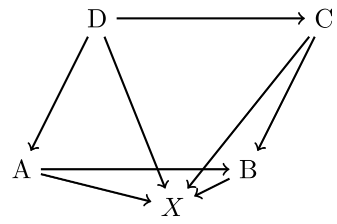
Soit maintenant $F : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ un autre foncteur (diagramme). On peut alors faire des transformations naturelles $X \Longrightarrow F$ et $F \Longrightarrow X$.

Définition 6 (Cône sur F et cocône sous F)

- Une transformation naturelle $\alpha : X \Longrightarrow F$ est un **cône sur F**.
- Une transformation naturelle $\epsilon : F \Longrightarrow X$ est un **cocône sous F**.

Sur le dessin ci-dessous, on a une cône sur F (resp. cocône sous F) avec F le diagramme donné par les objets (A, B, C, D) de $\mathcal{C}$:
Un diagramme est dit **fini** si sa catégorie indexante ne contient qu'un nombre fini de morphismes.





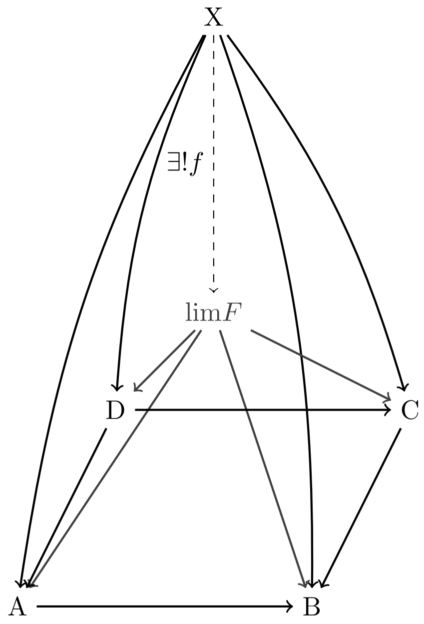
Définition 7 (Limite)

Soit $F : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ un diagramme ($\sim$ foncteur). La **limite** de F est un objet noté limF et des morphismes $\eta_A : \lim F \longrightarrow A$ pour tout objet A du diagramme F, qui vérifient $\eta_B = \phi_{AB} \circ \eta_A$ pour tout morphisme $\phi_{AB} : A \longrightarrow B$ dans le diagramme.
De plus, ces morphismes η_A doivent vérifier la propriété suivante : pour tout objet X et pour toute collection de morphismes $\alpha_A : X \longrightarrow A$ tels que $\alpha_B = \phi_{AB} \circ \alpha_A$, il existe un unique morphisme $f : X \longrightarrow \lim F$ tel que

$$\alpha_A = \eta_A \circ f$$

pour tout objet A dans le diagramme F.

De manière très informelle, on peut dire que tout cône sur F est "au dessus" de celui de sommet $\lim F$. On peut se représenter la situation par le diagramme suivant, avec $\mathcal{I} = \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ et $F(i_1) = A$, $F(i_2) = B$ $F(i_3) = C$, $F(i_4) = D$:



On a évidemment la définition duale de colimite, qu'on écrit clairement une bonne fois pour toutes :

Définition 8 (Colimite)

Soit $F : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ un diagramme ($\sim$ foncteur). La **colimite** de F est un objet noté $\varinjlim$F ou colimF et des morphismes $\epsilon_A : A \longrightarrow$colim$F$ pour tout objet A du diagramme F, qui vérifient $\epsilon_A = \epsilon_B \circ \phi_{AB}$ pour tout morphisme $\phi_{AB} : A \longrightarrow B$ dans le diagramme.
De plus, ces morphismes ϵ_A doivent vérifier la propriété suivante : pour tout objet X et pour toute collection de morphismes $\beta_A : A \longrightarrow X$ tels que $\beta_A = \beta_B \circ \phi_{AB}$, il existe un unique morphisme g : colim$F \longrightarrow X$ tel que

$$\beta_A = g \circ \epsilon_A$$

pour tout objet A dans le diagramme F.

Voici le dessin dual du précédent :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{D} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[ddr] \arrow[dddr, bend right] & & \mathrm{C} \arrow[dr] \arrow[ddl] \arrow[dddl, bend left] & \\
\mathrm{A} \arrow[rrrr] \arrow[drr] \arrow[ddrr, bend right] & & & & \mathrm{B} \arrow[dll] \arrow[ddll, bend left] \\
 & & \mathrm{colim}F \arrow[d, dashed, "\exists ! g"] & & \\
 & & \mathrm{X} & &
\end{tikzcd}$$

Voici un tableau récapitulatif des diverses (co)-limites qu'on rencontre :

Diagramme	$\emptyset$	$\bullet\ \bullet\ \bullet$	$\to \bullet \to \bullet \to$	$\leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \leftarrow$	$\bullet \to \bullet \leftarrow \bullet$	$\bullet \leftarrow \bullet \to \bullet$	$\bullet \rightrightarrows \bullet$
Limite	obj terminal	produit	-	lim inverse	pullback	-	equalizer
Colimite	obj initial	coproduit	lim directe	-	-	pushout	coequalizer

On peut également voir une colimite comme un foncteur. Soient I une petite catégorie et $\mathcal{C}$ une catégorie. Comme I est petite, l'ensemble des transformations naturelles entre foncteurs $I \longrightarrow \mathcal{C}$ est un ensemble. Alors, la catégorie Fun$(I, \mathcal{C})$ existe : elle est constituée des foncteurs $I \longrightarrow \mathcal{C}$ et les flèches sont les transformations naturelles. On peut dès lors considérer le foncteur

$$\begin{aligned} \mathrm{colim} : \ \mathrm{Fun}(I, \mathcal{C}) &\longrightarrow \mathcal{C} \\ F : I \to \mathcal{C} &\longmapsto \mathrm{colim}F \\ [\eta : F \Rightarrow G] &\longmapsto \mathrm{colim}(\eta) : \mathrm{colim}F \longrightarrow \mathrm{colim}G \end{aligned}$$

Ainsi, on peut considérer la notion d'exactitude pour une colimite, via sa description fonctorielle :
Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne et $\mathcal{I}$ une petite catégorie. Soient F, G, H des foncteurs $\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$. Considérons deux transformations naturelles $\alpha : F \to G$ et $\beta : G \to H$ telles que le suite

$$0 \longrightarrow F(i) \xrightarrow{\alpha_i} G(i) \xrightarrow{\beta_i} H(i) \longrightarrow 0$$

soit exacte pour tout objet i de $\mathcal{I}$.

Alors, on dit que le foncteur colim est **exact à gauche** si la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{colim}F \longrightarrow \mathrm{colim}G \longrightarrow \mathrm{colim}H$$

est exacte. On a bien sûr une définition similaire pour l'exactitude à droite.

Préservation, réflexion et création de limites et colimites :

Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des catégories, $\mathcal{I}$ une petite catégorie, $K : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ un diagramme et $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un foncteur.

Définition 9 (Préservation, réflexion, création de limites)

On dit que F :
- **préserve** les limites si $F(\lim K) = \lim(FK)$;
- **reflète** les limites si $Fc = \lim(FK)$ implique $c = \lim(K)$;
- **créé** les limites si $d = \lim(FK)$ implique qu'il existe un objet c de $\mathcal{C}$ tel que $c = \lim(K)$.

Ces notions se dualisent évidemment pour les colimites.

Une illustration sur le diagramme pullback $\bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$: on considère $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$.

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r] \arrow[d] & c'' \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\text{préserve}"] & Fp \arrow[r] \arrow[d] & Fc'' \arrow[d] \\ c' \arrow[r] & c \arrow[r, phantom, "\text{reflète}"] & Fc' \arrow[r] & Fc \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r] \arrow[d] & c'' \arrow[d] & d \arrow[r] \arrow[d] & Fc'' \arrow[d] \\ c' \arrow[r] & c \arrow[r, phantom, "\text{créé}"] & Fc' \arrow[r] & Fc \end{tikzcd}$$

Définition 10 (Catégorie (co)-complète)

Une catégorie $\mathcal{C}$ est **complète** (respectivement **cocomplète**) si tous les diagrammes $J \longrightarrow \mathcal{C}$, avec J petite, admettent une limite (resp. colimite).

On a aussi besoin des notions de catégories filtrées et de colimites filtrées.

Définition 11 (Catégorie filtrée)

Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite **filtrée** si
(i) $\mathcal{C}$ est non vide ;
(ii) pour tous $X, Y \in \mathcal{C}$, il existe $Z \in \mathcal{C}$, $f : X \longrightarrow Z$, et $g : Y \longrightarrow Z$;
(iii) pour tous $X, Y \in \mathcal{C}$, pour tous $f, g : X \longrightarrow Y$, il existe $Z \in \mathcal{C}$, $h : Y \longrightarrow Z$ tels que $h \circ f = h \circ g$.

Le point (ii) entraîne que le diagramme discret (X,Y) est la base d'un cocône :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr] & \\ & Z \\ Y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Le point(iii) entraîne que le diagramme $X \rightrightarrows Y$ est la base d'un cocône :

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr] & \\ X \arrow[ur] \arrow[dr] & & Z \\ & Y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Remarque. *Si $\mathcal{C}$ est une catégorie filtrée, tout diagramme dans $\mathcal{C}$ (foncteur $J \longrightarrow \mathcal{C}$) est base d'un cocône.*

Définition 12 (Colimite filtrée)

- Une **colimite filtrée** est une colimite d'un diagramme défini sur une catégorie filtrée.
- On dit qu'une catégorie $\mathcal{C}$ **admet des colimites filtrées** si pour toute petite catégorie filtrée J et tout foncteur $F : J \longrightarrow \mathcal{C}$, la colimite de F existe.

1.1.4 Catégories abéliennes

La notion de catégorie abélienne est essentielle dans ce travail, aussi on en rappelle la définition et les principales propriétés. Tout ce dont on a besoin pour cette notion se retrouve dans [F].

Définition 13 (Catégorie abélienne)

Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite **abélienne** lorsqu'elle satisfait :
(1) Pour tout objet $C \in \mathcal{C}$, il existe une loi $+$ additive ;
(2) $\mathcal{C}$ a un objet nul ;
(3) Toute paire d'objets a un produit et un coproduit ;
(4) Toute flèche a un noyau et un conoyau ;
(5) Tout monomorphisme de $\mathcal{C}$ est un noyau et tout épimorphisme de $\mathcal{C}$ est un conoyau.

Exemples :
La catégorie Mod(R) des modules sur un anneau R est abélienne ;
La catégorie Ab des groupes abéliens également.

Dans une catégorie abélienne, les notions de produit et de coproduit coïncident et les Hom-sets sont des groupes abéliens.
Dans une catégorie abélienne, les deux définitions suivantes de foncteur exact coïncident :

Définition 14 (Foncteur exact, 1)

- F est **exact à droite** s'il préserve les colimites finies.
- F est **exact à gauche** s'il préserve les limites finies.

F est exact s'il est exact à gauche et à droite.

Définition 15 (Foncteur exact, 2)

- F est **exact à gauche** si pour toute suite exacte courte $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$, la suite $0 \to FX' \to FX \to FX''$ est exacte.
- F est **exact à droite** si pour toute suite exacte courte $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$, la suite $FX' \to FX \to FX'' \to 0$ est exacte.

F est exact s'il est exact à gauche et à droite.

Plus précisément, on a :

Proposition 16 ([R])

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ abéliennes. Alors $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est exact à gauche (au sens 1) si et seulement si il préserve les sommes directes et les noyaux. Pour de tels foncteurs, les propriétés de la deuxième définition sont vraies.

On définit, pour $\mathcal{A}$ abélienne et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, X')$, $\mathrm{Im}(f) := \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f)) \cong \mathrm{Coker}((\mathrm{Ker}(f))$. **On peut ainsi parler de suites exactes et faire de l'algèbre homologique**.

Théorème 17 (Plongement de Freyd-Mitchell)

Soit $\mathcal{A}$ une petite catégorie abélienne.
Alors il existe un anneau unitaire R et un foncteur exact pleinement fidèle $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathrm{Mod}(R)$ qui plonge $\mathcal{A}$ comme **sous catégorie pleine** de $\mathrm{Mod}(R)$.

Piste : Pour une preuve de ce résultat, on pourra consulter la section 5.5 de [RJ1] ainsi que la section 7.1 (et tout ce qui précède...) de [F]. □

Conséquence : $\mathcal{A}$ est donc équivalente à une sous-catégorie pleine de Mod(R). Les notions de morphismes, noyaux, conoyaux, suites exactes et somme de morphismes se transposent bien. En revanche, les objets projectifs (resp. injectifs) de $\mathcal{A}$ ne correspondent pas forcément aux R-modules projectifs (resp. injectifs).

1.2 Univers et catégories R-linéaires

Dans cette section, on s'intéresse à des notions plus spécifiques à l'étude des déformations de catégories abéliennes. La plupart des résultats de ce mémoire sont valables pour des petites catégories (ie dont les classes d'objets et de morphismes sont en fait des ensembles), mais parfois on a besoin de passer à des catégories non-petites. Pour éviter tout problème, on utilise la théorie des univers comme fondation théorique, ce qui va permettre de supposer que toute catégorie est petite avec un univers bien choisi. De manière générale, l'idée de ce travail consiste davantage en l'exploration de la théorie des déformations de catégories abélienne que dans la réflexion sur des fondements axiomatiques et théoriques, aussi on va le plus souvent ignorer ce type de problème. On donne toutefois la définition d'un univers ci dessous.

Définition 18 (Univers)

Un **univers** $\mathcal{U}$ est un ensemble ayant les propriétés :
(1) si $x \in \mathcal{U}$ et $y \in x$, alors $y \in \mathcal{U}$;
(2) si $x, y \in \mathcal{U}$, alors $\{x, y\} \in \mathcal{U}$;
(3) si $x \in \mathcal{U}$, alors l'ensemble des parties de x appartient à $\mathcal{U}$.
(4) si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille d'objets de $\mathcal{U}$ indexés par $I \in \mathcal{U}$, alors $\bigcup\limits_{i \in I} x_i \in \mathcal{U}$.
(5) si $U \in \mathcal{U}$ et $f : U \longmapsto \mathcal{U}$ est une fonction, alors $\{f(x), x \in U\} \in \mathcal{U}$.

AXIOME : tout ensemble est élément d'un univers.

A partir d'ici, on ne considérera que des univers contenant $\mathbb{N}$.

1.2.1 Eléments de terminologie

On a les notions suivantes :

(1) Un ensemble est dit **$\mathcal{U}$-petit** ou **$\mathcal{U}$-small** s'il a le même cardinal en tant qu'élément de $\mathcal{U}$.
(2) **$\mathcal{U}$-Set** est la catégorie dont les éléments sont les éléments de $\mathcal{U}$ et dont les flèches sont les morphismes entre ensembles usuels.
(3) Si ε est un structure, alors **$\mathcal{U}$-ε** est la catégorie d'objets ayant la structure ε dont l'ensemble sous-jacent est dans $\mathcal{U}$.
(4) $\mathcal{U}$-**Cat** est la catégorie des catégories $\mathcal{C}$ telles que $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \in \mathcal{U}$ et $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \in \mathcal{U}$.
(5) Une catégorie est **$\mathcal{U}$-petite** si ses objets et flèches sont des ensembles $\mathcal{U}$-petits.
(6) Une catégorie est **essentiellement $\mathcal{U}$-petite** si elle est équivalente à une catégorie $\mathcal{U}$-petite.
(7) Une catégorie est une **$\mathcal{U}$-catégorie** si ses ensembles de morphismes sont $\mathcal{U}$-petits.

1.2.2 Constructions dépendant de l'univers

On fixe ici quelques notations qui reviennent souvent dans ce travail, relativement à un univers fixé $\mathcal{U}$. On donne d'abord une définition de la notion de **catégorie pré-additive**, qui est essentielle.

Définition 19 (Catégorie pré-additive)

Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite **pré-additive** si pour tous objets a, b de $\mathcal{C}$,
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,b)$ est un groupe abélien (additif) ;
- la composition est bilinéaire : pour f, f', g, g' composables, on a

$$(g+g')\circ(f+f') = g\circ f + g\circ f' + g'\circ f + g'\circ f'.$$

Remarque :
Une catégorie pré-additive peut être décrite complètement par la donnée de :
(i) un ensemble d'objets ;
(ii) une fonction associant à chaque paire ordonnée d'objets (b,c) un groupe abélien $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(b,c)$;
(iii) pour tout triplet (a,b,c), un morphisme de groupes abéliens (composition) :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(b,c)\otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,b) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,c),$$

et écrit $g\otimes f = g\circ f$. (La composition étant bilinéaire, on écrit avec $\otimes$ pour avoir une opération linéaire) ;
(iv) pour tout objet a, un morphisme $\mathbb{Z}\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a,a)$ qui est totalement déterminé par l'image de l'entier 1.
Tout ceci devant bien sûr respecter l'associativité et l'unité.

Définition 20 ($\mathcal{U}$-Mod($\mathcal{A}$) et $\mathcal{U}$-mod($\mathcal{A}$))

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie pré-additive.
- On désigne par $\mathcal{U}$-Mod($\mathcal{A}$) la catégorie des foncteurs covariants additifs $\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{U}$-Ab.
- Si $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{U}$-catégorie, elle contient les foncteurs $\mathcal{A}(a,-) : \mathcal{A}\longrightarrow \mathcal{U}$-Ab pour $a\in\mathcal{A}$. On définit alors la catégorie $\mathcal{U}$-mod($\mathcal{A}$) par la sous-catégorie pleine de $\mathcal{U}$-Mod($\mathcal{A}$) qui contient tous les foncteurs pouvant être écrits comme conoyaux de flèches

$$\bigoplus_{i=1}^{m}\mathcal{A}(a_i,-)\longrightarrow\bigoplus_{j=1}^{n}\mathcal{A}(b_j,-)$$

Définition 21 ($\mathcal{U}$-Ind($\mathcal{C}$))

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie $\mathcal{U}$-petite. On définit $\mathcal{U}$-Ind($\mathcal{C}$) comme la sous-catégorie pleine de $\mathcal{U}$-Mod($\mathcal{C}$) dont les objets sont les foncteurs exacts à gauche.

Un objet c d'une $\mathcal{U}$-catégorie $\mathcal{C}$ admet une présentation $\mathcal{U}$-finie si le foncteur $\mathcal{C}(c,-) : \mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{U}$-Set préserve les colimites filtrées $\mathcal{U}$-petites.

A partir d'ici, on travaillera avec un univers $\mathcal{U}$ fixé. Ainsi, on se passera de spécifier l'univers lorsqu'on manipulera les notions définies plus haut. Les objets tels que les groupes abéliens, les anneaux, les modules, etc ... seront supposés $\mathcal{U}$-petits, sauf mention explicite du contraire.

1.2.3 Catégories R-linéaires et rappels d'algèbre homologique

Soit R un anneau commutatif. Il est possible de munir une catégorie d'une structure R-linéaire (voir définition ci-dessous) pour former l'objet d'étude fondamental de ce mémoire. Les catégories linéaires sont essentiellement des catégories pré-additives munies d'une sorte d'action linéaire. Les déformations que l'on souhaite étudier s'inscrivent dans ce contexte et constituent globalement des changements d'anneau de base le long d'un morphisme (voir définitions 55 et 56).

Définition 22 (Catégorie R-linéaire)

Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite **R-linéaire** si :

- $\mathcal{C}$ est pré-additive ;
- il existe un homomorphisme d'anneaux $\rho : R \longrightarrow \mathrm{Nat}(1_{\mathcal{C}}, 1_{\mathcal{C}})$.

Il est équivalent de définir une catégorie R-linéaire comme une catégorie enrichie dans la catégorie Mod(R) des R-modules. En effet, l'existence de ρ entraîne que les Hom-Set (qui sont à priori des groupes abéliens) sont des R-modules : si $r \in R$, alors $\rho(r)$ est une transformation naturelle $1_{\mathcal{C}} \longrightarrow 1_{\mathcal{C}}$, décrite par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\rho(r)_X"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "\rho(r)_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

On déduit donc une action de R sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$:

$$\begin{aligned} R \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \\ (r,f) &\longmapsto \rho(r)_Y \circ f : X \longrightarrow Y. \end{aligned}$$

Une telle application $\rho : R \longrightarrow \mathrm{Nat}(1_{\mathcal{C}}, 1_{\mathcal{C}})$ induit d'autres applications, qu'il ne faut pas confondre :

$$\begin{aligned} \rho_X : R &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X) \\ r &\longrightarrow \rho_X(r) = \rho(r)_X : X \to X. \end{aligned}$$

ρ_X est un morphisme d'anneaux, alors que $\rho_X(r)$ est la composante en X de la transformation naturelle $\rho(r) \in \mathrm{Nat}(1_{\mathcal{C}}, 1_{\mathcal{C}})$.

Lemme 23

Soit $(\mathcal{A}, \rho)$ une catégorie R-linéaire abélienne et $F \in \mathrm{Mod}(\mathcal{A})$. Alors $F(A) \in \mathrm{Ab}$ hérite d'une structure de R-module.

Preuve : On a déjà vu que $\rho : R \longrightarrow \mathrm{Nat}(1_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$ donne une transformation naturelle $\rho(r)$ pour $r \in R$ telle qu'on ait le diagramme commutatif, pour $A, B \in \mathcal{A}$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho(r)_A"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "\rho(r)_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Ainsi, $\rho(r)_A : A \longrightarrow A$ donne une action

$$\begin{aligned} R \times A &\longrightarrow A \\ (r,x) &\longmapsto (\rho(r)_A)(x) \end{aligned}$$

Soit maintenant $F \in \mathrm{Mod}(\mathcal{A})$. en appliquant le foncteur F au diagramme précédent, on obtient

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "F\rho(r)_A"] \arrow[d, "Ff"'] & FA \arrow[d, "Ff"] \\
FB \arrow[r, "F\rho(r)_B"'] & FB
\end{tikzcd}$$

On déduit une action de manière analogue :

$$\begin{aligned} R \times F(A) &\longrightarrow F(A) \\ (r, y) &\longmapsto (F\rho(r)_A)(y) \end{aligned}$$

On a bien muni $F(A) \in$ Ab d'une structure de R-module. □

A partir d'ici, on considère un anneau R cohérent. Mod(R) désigne la catégorie abélienne des R-modules. On définit mod(R) comme la sous catégorie abélienne pleine de Mod(R) constituée des R-modules admettant une présentation finie.

- Une catégorie abélienne $\mathcal{C}$ a suffisamment de projectifs si pour tout objet X de $\mathcal{C}$, il existe P $\in \mathcal{C}$ projectif et un épimorphisme $P \longrightarrow X$.
- La catégorie Mod(R) a suffisamment de projectifs, car tout R-module M est quotient d'un module libre, donc projectif, ismomorphe à R^n, donc il existe une surjection $R^n \longrightarrow M$.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie R-linéaire.

Proposition 24

Les foncteurs adjoints à droite préservent les limites.
Les foncteurs adjoints à gauche préservent les colimites.

Preuve : Soient les foncteurs $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$. G étant l'adjoint à droite de F. Considérons un diagramme $K : J \longrightarrow \mathcal{D}$ admettant une limite notée lim$K$. Pour avoir une représentation visuelle, on va regarder le diagramme très simple suivant :

$$\begin{tikzcd}
& \lim K \arrow[dl, "\lambda_1"'] \arrow[dr, "\lambda_2"] & \\
K_1 \arrow[rr, "f"'] & & K_2
\end{tikzcd}$$

On veut montrer que Glim$K$ est la limite du diagramme GK. Considérons donc un objet X de $\mathcal{D}$ formant un cône sur le diagramme K. Il suffit de montrer qu'il existe un unique morphisme $X \longrightarrow$ Glim$K$ qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, dashed, "?"'] \arrow[ddl] \arrow[ddr] & \\
& G\lim K \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
GK_1 \arrow[rr, "Gf"'] & & GK_2
\end{tikzcd}$$

Comme F et G sont adjoints, on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GK_i) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, K_i)$, donc il existe des morphismes $FX \longrightarrow K_i$ dans $\mathcal{D}$ qui font commuter le cône de sommet FX sur le diagramme K. Or, lim$K$ est la limite de K dans $\mathcal{D}$, donc il existe un unique morphisme $\tau : FX \longrightarrow$ lim$K$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & FX \arrow[d, dashed, "\tau"'] \arrow[ddl] \arrow[ddr] & \\ & \mathrm{lim}K \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ K_1 \arrow[rr, "f"'] & & K_2 \end{tikzcd}$$

Pour conclure, on réutilise l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y)$, pour tout $Y \in \mathcal{D}$. On obtient alors qu'il correspond bijectivement à τ un morphisme $\tau' : X \longrightarrow G\mathrm{lim}K$. On a donc le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, dashed, "\tau'"'] \arrow[ddl] \arrow[ddr] & \\ & \mathrm{Glim}K \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ GK_1 \arrow[rr, "Gf"'] & & GK_2 \end{tikzcd}$$

τ' est bien unique, car c'est l'unique image de τ par la bijection donnée par l'adjonction. Ainsi, tout cône sur GK se factorise à travers Glim$K$. On a donc montré que limG$K = G$lim$K$, donc G préserve les limites. Les adjoints à droite préservent donc les limites. Par dualité, on déduit que les adjoints à gauche préservent les colimites. $\square$

Corollaire 25

Pour tout objet c de $\mathcal{C}$, le foncteur $(- \otimes_R c) : \mathrm{mod(R)} \longrightarrow \mathcal{C}$ préserve les colimites finies et vérifie $R \otimes_R c = c$. Pour tout objet c de $\mathcal{C}$, le foncteur $\mathrm{Hom}_R(-, c) : \mathrm{mod(R)}^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$ préserve les limites finies et vérifie $\mathrm{Hom}_R(R, c) = c$.

On veut maintenant construire

$$\mathrm{Tor}_n^R(-, c) := \mathrm{L}_n(- \otimes_R c) : \mathrm{mod}(R) \longrightarrow \mathcal{C}$$

et

$$\mathrm{Ext}_R^n(-, c) := \mathrm{R}_n(\mathrm{Hom}_R(-, c)) : \mathrm{mod}(R)^{op} \longrightarrow \mathcal{C}.$$

Il est nécessaire que la catégorie mod(R) ait suffisamment de projectifs pour ces constructions. mod(R) est une sous-catégorie pleine de Mod(R), qui contient quant à elle suffisamment de projectifs (tout R-module est quotient d'un R-module libre). Si M est un R-module admettant une présentation finie, alors il existe par définition une surjection $R^{\oplus n} \longrightarrow M$, et $R^{\oplus n}$ admet une présentation finie. Ainsi, mod(R) a bien suffisamment de projectifs.

Un même argument que précédemment prouve que pour tout $X \in \mathrm{mod}(R)$, les foncteurs $\mathrm{Hom}_R(X, -)$ et $X \otimes_R -$ préservent les limites (resp. colimites) finies.

Définition 26 (δ-foncteur (co)homologique)

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories abéliennes.
Un δ-**foncteur cohomologique** est la donnée, pour $n \geqslant 0$ d'une famille $T^n : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ de foncteurs covariants additifs, tels que pour toute suite exacte courte $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{A}$, il existe une famille de transformations naturelles

$$\delta^i : T^i(M'') \longrightarrow T^{i+1}(M')$$

qui donnent une suite exacte longue

$$0 \to T^0(M') \to T^0(M) \to T^0(M'') \to T^1(M') \to ... \to T^i(M) \to T^i(M'') \to T^{i+1}(M') \to ...$$

Un δ-**foncteur homologique** est défini de manière analogie, avec des transformation naturelles $\delta_i : T_i(M'') \longrightarrow T_{i-1}(M')$ donnant des suites exactes longues

$$... \to T_1(M') \to T_1(M) \to T_1(M'') \to T_0(M') \to T_0(M) \to T_0(M'') \to 0$$

Remarque. *Soit $X \in mod(R)$.*
- $Tor_n^R(X,-) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ *est un δ-foncteur homologique.*
- $Ext_R^n(X,-) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ *est un δ-foncteur cohomologique.*

Rappelons la notion de platitude pour des objets de catégories R-linéaires abéliennes :

Définition 27 (Objet (co)plat)

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie R-linéaire abélienne.
- $X \in \mathcal{C}$ est **plat** (sur R) si le foncteur $- \otimes X$: mod(R)$\longrightarrow \mathcal{C}$ est exact.
- $X \in \mathcal{C}$ est **coplat** (sur R) si le foncteur $\mathrm{Hom}(-,X)$: mod(R)$\longrightarrow \mathcal{C}$ est exact.

On a les caractérisations utiles suivantes pour les objets (co)plats :

Proposition 28

Soit $c \in \mathcal{C}$ abélienne R-linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) c est plat.
(2) $\mathrm{Tor}_n^R(-,c) = 0 \ \forall n \geq 1$.
(3) $\mathrm{Tor}_1^R(-,c) = 0$.

Preuve : Commençons par montrer que c plat $\iff ... \to B_o \otimes c \to B_1 \otimes c \to B_2 \otimes c \to ...$ est exacte pour toute suite exacte $... \to B_o \to B_1 \to B_2 \to ...$
Si la suite considérée est exacte, alors le foncteur $- \otimes c$ est exact, et donc c est plat.

Réciproquement, soit $... \to B_o \overset{\mu}{\to} B_1 \overset{\varepsilon}{\to} B_2 \to ...$ une suite exacte. On considère alors la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow B_0/\ker(\mu) \xrightarrow{\bar{\mu}} B_1 \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{Im}(\varepsilon) \longrightarrow 0.$$

Par hypothèse, la suite $0 \longrightarrow (B_0/\ker(\mu)) \otimes c \xrightarrow{\overline{\mu}'} B_1 \otimes c \xrightarrow{\varepsilon'} \mathrm{Im}(\varepsilon) \otimes c \longrightarrow 0$ est exacte, donc
$B_0 \otimes c \xrightarrow{\mu'} B_1 \otimes c \xrightarrow{\varepsilon'} \mathrm{Im}(\varepsilon) \otimes c$ l'est également. Il suffit alors de réitérer ce procédé en chaque $B_i \otimes c$ pour obtenir que $- \otimes c$ est exact, donc c est plat.

(1) $\Rightarrow$ (2) : Supposons c plat et soit $X \in \mathcal{C}$. On prend une résolution projective P de X. Par l'équivalence montrée ci-dessus, la suite $... \to P_2 \otimes c \to P_1 \otimes c \to P_0 \otimes c \to X \otimes c \to 0$ est exacte, donc $\mathrm{Tor}_n^R(X,c) = 0$ pour tout $n \geq 1$.

(2) $\Rightarrow$ (3) : clair.

(3) $\Rightarrow$ (1) : Soit $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$ une suite exacte courte dans $\mathcal{C}$. Par le théorème de connexion, il existe une suite exacte longue

$$... \to \mathrm{Tor}_1^R(B'',c) \to \mathrm{Tor}_0^R(B',c) \to \mathrm{Tor}_0^R(B,c) \to \mathrm{Tor}_0^R(B'',c) \to 0.$$

Or, $\mathrm{Tor}_1^R(B'',c) = 0$ et $\mathrm{Tor}_0^R(X,c) = X \otimes c$ pour tout $X \in \mathcal{C}$, donc c est plat. □

Corollaire 29

Soit $0 \longrightarrow c' \longrightarrow c \longrightarrow c'' \longrightarrow 0$ une suite exacte courte dans $\mathcal{C}$ abélienne R-linéaire.
(1) Si c' et c'' sont plats, alors c l'est.
(2) Si c et c'' sont plats, alors c' l'est.

Preuve :

(1) : supposons c' et c'' plats. Alors par la proposition, $\mathrm{Tor}_1^R(-,c') = \mathrm{Tor}_1^R(-,c'') = 0$. Soit $X \in \mathcal{C}$. Par le théorème de connexion, on obtient une suite exacte $0 \to \mathrm{Tor}_1^R(X,c) \to 0$, donc $\mathrm{Tor}_1^R(-,c) = 0$, d'où la platitude de c.

(2) : preuve similaire à celle du point (1), en utilisant cette fois que $\mathrm{Tor}_2^R(-,c) = 0$ si c est plat.

□

Par dualité, on obtient :

Proposition 30

Soit $c \in \mathcal{C}$ abélienne R-linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) c est coplat.
(2) $\mathrm{Ext}^n_R(-, c) = 0 \ \forall n \geq 1$.
(3) $\mathrm{Ext}^1_R(-, c) = 0$.

Corollaire 31

Soit $0 \longrightarrow c' \longrightarrow c \longrightarrow c'' \longrightarrow 0$ une suite exacte courte dans $\mathcal{C}$ abélienne R-linéaire. Si c et c' sont coplats, alors c'' l'est.

On veut maintenant donner un résultat permettant de "commuter" foncteur exact et foncteur Ext. On a pour cela besoin du lemme suivant.

Lemme 32

Un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ additif et exact entre catégories abéliennes préserve les (co)homologies.

Preuve : On va montrer qu'un tel foncteur préserve les noyaux, images et quotients. Soit $C.$ le complexe de $\mathcal{C}$

$$... \to C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \to ...$$

On note $Z_n = \mathrm{Ker}(d_n)$ et $B_n = \mathrm{Im}(d_{n+1})$. Par fonctorialité de F,

$$\mathrm{Im}(Fd_{n+1}) = F(d_{n+1})(FC_{n+1}) = F\left(d_{n+1}(C_{n+1})\right) = F\left(\mathrm{Im}(d_{n+1})\right) = F\left(\mathrm{Im}(d_{n+1})\right) :$$

$$\begin{tikzcd}
C_{n+1} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "d_{n+1}"'] & FC_{n+1} \arrow[d, "Fd_{n+1}"] \\
\mathrm{Im}(d_{n+1}) \arrow[r, "F"'] & F\mathrm{Im}(d_{n+1}) = \mathrm{Im}F(d_{n+1})
\end{tikzcd}$$

Pour les noyaux, regardons la suite exacte courte $0 \longrightarrow Z_n \xrightarrow{i_n} C_n \xrightarrow{d_n} B_{n-1} \longrightarrow 0$. En appliquant F exact (exact à gauche suffit ici), on obtient la suite exacte :

$$0 \longrightarrow FZ_n \xrightarrow{Fi_n} FC_n \xrightarrow{Fd_n} FB_{n-1} \longrightarrow 0$$

Par exactitude en FC_n, on obtient $\mathrm{Ker}(Fd_n)=\mathrm{Im}(Fi_n)\cong F(\mathrm{Im}(d_n))$, puisque Fi_n est injective.

Pour les quotients, regardons la suite exacte courte $0 \longrightarrow B_n \xrightarrow{j_n} Z_n \xrightarrow{\pi_n} Z_n/B_n \longrightarrow 0$. En appliquant F, on obtient la suite exacte :

$$0 \longrightarrow FB_n \longrightarrow FZ_n \longrightarrow F(Z_n/B_n) \longrightarrow 0.$$

On a donc

$$F(Z_n/B_n) \cong FZ_n/FB_n.$$

Finalement, en combinant ces trois résultats intermédiaires, on obtient

$$H^n(FC.) = F(H^nC.),$$

ce qui prouve le lemme.

□

Proposition 33

Soit $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un foncteur R-linéaire entre catégories abéliennes R-linéaires.
(i) Si F est exact, alors $\mathrm{Ext}^i_R(X, Fc) = F\left(\mathrm{Ext}^i_R(X, c)\right)$ $\forall c \in \mathcal{C}$, $\forall X \in \mathrm{mod(R)}$.
(ii) Si F est exact à gauche, alors $\mathrm{Hom}_R(X, Fc) = F\left(\mathrm{Hom}_R(X, c)\right)$ $\forall c \in \mathcal{C}$, $\forall X \in \mathrm{mod(R)}$.

Preuve : Soit $P.$ une résolution libre (donc projective) de X. On lui applique le foncteur $\mathrm{Hom}_R(-, c)$:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_0, c) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_1, c) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_2, c) \longrightarrow ...$$

Notons cette suite C. On a alors $\mathrm{Ext}^i_R(X, c) = H^i(C.)$. Par le lemme précédent,

$$F\left(\mathrm{Ext}^i_R(X, c)\right) = F\left(H^i(C.)\right) = H^i(FC.). \qquad (*)$$

Comme les P_k sont libres sur R, il existe i_k tel que $P_k \cong R^{i_k}$. Par additivité du foncteur $\mathrm{Hom}(-, c)$, on obtient $\mathrm{Hom}(P_k, c) \cong \mathrm{Hom}(R^{i_k}, c) \cong c^{i_k}$. Comme F est additif, $F(c^{i_k}) = (Fc)^{i_k} \cong \mathrm{Hom}_R(P_k, Fc)$. En utilisant $(*)$, on obtient finalement :

$$F\left(\mathrm{Ext}^i_R(X, c)\right) = H^i(FC.) = \mathrm{Ext}^i_R(X, Fc),$$

ce qui prouve (i).

Pour montrer (ii), on remarque que dans le lemme précédent, l'affirmation portant sur le noyau n'a nécessité que l'exactitude à gauche du foncteur F. Or, pour $\mathrm{Ext}^0_R(-, c)$, il n'y a pas de quotient qui entre en jeu. Ainsi on a bien (ii). $\square$

Corollaire 34

Soit I une petite catégorie, et $\mathcal{C}$ une catégorie R-linéaire. Si les colimites I-finies sont exactes dans $\mathcal{C}$, alors le foncteur $\mathrm{Ext}^i_R(X, c)$ les préserve pour $X \in \mathrm{mod(R)}$.

Soit maintenant $\mathcal{A}$ une catégorie essentiellement petite, R-linéaire et abélienne.
On a $\mathrm{Mod}(\mathcal{A})$=$\{F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ab}$, covariants additifs$\}$. Ici, on arrive même dans $\mathrm{Mod}(R)$, puisque $\mathcal{A}$ est R-linéaire. Soit $X \in \mathrm{mod}(R)$. On définit les foncteurs :

$$\begin{aligned}(X \otimes_R -) : \mathrm{Mod}(\mathcal{A}) &\longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathcal{A}) \\ F &\longmapsto [X \otimes_R F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Mod}(R), A \longmapsto X \otimes_R F(A)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(X, -) : \mathrm{Mod}(\mathcal{A}) &\longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathcal{A}) \\ F &\longmapsto [\mathrm{Hom}_R(X, F) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Mod}(R), A \longmapsto \mathrm{Hom}_R(X, FA)]\end{aligned}$$

Lemme 35

F est plat (resp. coplat) dans $\mathrm{Mod}(\mathcal{A}) \Longleftrightarrow F(A)$ est plat (resp. coplat) dans $\mathrm{Mod}(R)$ $\forall A \in \mathcal{A}$.

Preuve : Supposons F plat dans $\mathrm{Mod}(\mathcal{A})$. Alors, pour toute suite exacte $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ dans $\mathrm{mod}(R)$, la suite

$$0 \longrightarrow X \otimes_R F(A) \longrightarrow Y \otimes_R F(A) \longrightarrow Z \otimes_R F(A) \longrightarrow 0$$

est exacte dans $\mathrm{Mod}(R)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, ce qui est équivalent à l'exactitude du foncteur $- \otimes_R F(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, donc à la platitude de $F(A)$ en tant qu'objet de $\mathrm{Mod}(R)$. La réciproque se fait de la même manière. $\square$

2 Quelques rappels de théorie des déformations d'algèbres associatives

Dans ce court chapitre, on va rappeler les résultats essentiels concernant les déformations d'algèbres associatives, qui sont dûs en premier lieu à Murray Gerstenhaber. On aimerait bien transposer ces résultats aux catégories. Pour $\mathbb{K}$ corps et V $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on suppose connus les espaces $\mathbb{K}[[t]]$ et $V[[t]]$. On suppose également connues les notions de base de cohomologie de Hochschild, même ci ses dernières seront brièvement rappelées au moment opportun. Les références pour cette section sont [G], [LES] et [FS].

2.1 Déformations globales d'algèbres associatives

Dans cette section on considère $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique zéro et B une $\mathbb{K}$-algèbre commutative, associative, unitaire.
On note également $\varepsilon : B \longrightarrow \mathbb{K}$ le morphisme d'augmentation qui envoie 1_B sur $1_{\mathbb{K}}$.
Si m est un idéal maximal de B, on appelle **base de déformation** le couple (B, m).
Les produits tensoriels non labellisés sont pris sur $\mathbb{K}$.

Définition 36 (Déformation globale)

Soit (A, μ_0) une $\mathbb{K}$-algèbre. Une **déformation globale** de base (B, m) (ou simplement B) est la donnée d'une structure de B-algèbre sur le produit tensoriel $B \otimes A$ muni d'une multiplication μ_B qui induit un homomorphisme d'algèbres

$$\varepsilon \otimes \mathrm{id} : B \otimes A \longrightarrow \mathbb{K} \otimes A \cong A.$$

Plus précisément, on doit avoir, pour $b_1, b_2 \in B$ et $a_1, a_2 \in A$:
- $\mu_B(b_1 \otimes a_1, b_2 \otimes y) = (b_1 b_2 \otimes \mathrm{id}) \circ \mu_B(1 \otimes a_1, 1 \otimes a_2)$
- μ_B associative
- $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \mu_B(1 \otimes a_1, 1 \otimes a_2) = 1 \otimes \mu(a_1, a_2)$

Si l'idéal maximal m de B vérifie $m^2 = 0$, la déformation globale est dite **infinitésimale**.

On appelle **déformation globale formelle** de A de base (B, m) une structure de B-algèbre sur l'espace $\varinjlim_n (B/m^n \otimes A)$, où $\varinjlim$ désigne la limite directe (voir tableau paragraphe 1.1.3).

Définition 37 (Notion d'équivalence)

Deux déformations globales de A $(B \otimes A, \mu_1)$ et $(B \otimes A, \mu_2)$ sont dites **équivalentes** s'il existe un isomorphisme d'algèbres
$\varphi : B \otimes A \longrightarrow B \otimes A$ qui vérifie :
- $\varphi\left(\mu_1(b_1 \otimes a_1, b_2 \otimes a_2)\right) = \mu_2\left(\varphi(b_1 \otimes a_1), \varphi(b_2 \otimes a_2)\right)$, $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$,
- $\varphi \circ (\varepsilon \circ \mathrm{id}) = \varepsilon \otimes \mathrm{id}(\varphi \otimes \varphi)$.

On a aussi la notion de **déformation locale** :

Définition 38 (Déformation locale)

Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre et R une $\mathbb{K}$-algèbre commutative locale ($R \setminus R^\times$ est un idéal bilatère).
Une **déformation locale** de A paramétrée par R est une paire (A_R, η), avec A_R une R-algèbre plate commutative et $\eta : \mathbb{K} \otimes_R A_R \longrightarrow A$ un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

Par exemple, prenons $A := \mathbb{K}[x, y]/(xy), R := \mathbb{K}[[t]]$. Alors,

$$A_R := \mathbb{K}[x, y][[t]]/(xy - t)$$

est une déformation locale de A paramétrée par R, via l'isomorphisme $\eta : \mathbb{K} \otimes_R A_R \longrightarrow A$ induit par l'application

$$\begin{aligned} A_R &\longrightarrow A \\ t &\longmapsto 0. \end{aligned}$$

2.2 Cohomologie de Hochschild pour les algèbres associatives

On rappelle rapidement les notions essentielles de la cohomologie de Hochschild, qui intervient de manière substantielle dans la théorie des déformations formelles.

On considère A une algèbre associative sur $\mathbb{K}$ algébriquement clos et M un A-bimodule. On définit alors les **espaces de cochaines** par :

$$\begin{cases} C^n(A,M) &= \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, M), \quad n > 0 \\ C^0(A,M) &= M, \\ C^n(A,M) &= 0, \quad n < 0 \end{cases}$$

On définit un **opérateur cobord**

$$\begin{aligned} d^n : C^n(A,M) &\longrightarrow C^{n+1}(A,M) \\ \varphi &\longmapsto d^n(\varphi), \end{aligned}$$

défini pour tout $(a_1, a_2, ..., a_{n+1}) \in A^{\otimes(n+1)}$ par :

$$(d^n\varphi)(a_1,a_2,...,a_{n+1}) = a_1\varphi(a_2,...,a_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\varphi(a_1,...,a_ia_{i+1},...,a_{n+1}) + (-1)^{n+1}\varphi(a_1,...,a_n)a_{n+1}$$

et pour $n = 0$,

$$(d^0\varphi)(a) = a\varphi - \varphi a, \quad \varphi \in C^0(A,M) = M, \quad a \in A.$$

Cet opérateur vérifie $d^{n+1} \circ d^n = 0$. Les n-cocycles et les n-cobords sont respectivement les espaces $Z^n = \mathrm{Ker}(d^n)$ et $B^n = \mathrm{Im}(d^{n-1})$, qui vérifient $B^n \subset Z^n$. On définit alors le **n-ème groupe de cohomologie de Hochschild**, noté H^n :

$$H^n := Z^n/B^n.$$

2.3 Déformations formelles à un paramètre

Soient A et B des algèbres associatives unitaires de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Un cas particulier important du point 2.1 vient en prenant $B = \mathbb{K}[[t]]$ et $m = t\,\mathbb{K}[[t]]$. On obtient alors une structure de $\mathbb{K}[[t]]$-algèbre sur $\mathbb{K}[[t]] \otimes A \cong A[[t]]$.

Plus précisément, cela revient à munir $A[[t]]$ d'une application $\mathbb{K}[[t]]$-bilinéaire μ_t qui s'écrit sous la forme

$$\mu_t = \sum_i \mu_i t^i,$$

où les μ_i sont des applications $\mathbb{K}[[t]]$-bilinéaires $A \times A \longrightarrow A$, telle que :

$$\mu_t\left(\mu_t(x,y),z\right) = \mu_t\left(x,\mu_t(y,z)\right) \qquad \forall x,y,z \in A.$$

Cette dernière équation est appelée **équation de déformation**.
En développant cette équation, on obtient le résultat suivant :

Théorème 39

- Si (A,μ_0) est une algèbre associative, et $\mu_t = \sum_i \mu_i t^i$ une déformation formelle de A telle que $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_{p-1} = 0$ pour un indice p quelconque, alors μ_p est un 2-cocycle de Hochschild.
- Si $H^3(A,A) = 0$, alors tout 2-cocyle donne une déformation de μ_0.

On peut aussi adapter la notion d'**équivalence de déformations** à ce contexte : on considère μ_t et μ_t' deux déformations formelles de (A,μ_0) algèbre associative. Les deux déformations sont alors dites équivalentes s'il existe un isomorphisme formel :

$$\varphi_t : A[[t]] \longrightarrow A[[t]],$$

$\mathbb{K}[[t]]$-linéaire, tel que

$$\varphi_t(x) = x + \varphi_1(x)t + \varphi_2(x)t^2 + ... \qquad \text{pour } x \in A$$

et vérifiant

$$\varphi_t(\mu_t(x,y)) = \mu_t'(\varphi_t(x),\varphi_t(y)), \qquad \forall x,y \in A.$$

Cette notion d'équivalence permet de montrer que toute déformation formelle d'algèbre associative est équivalente à une déformation formelle telle que le premier terme non-trivial non-nul appartient à $Z^2(A,A)/B^2(A,A)$. Ainsi, on a :

Proposition 40

Soit (A, μ_0) une algèbre associative. Si $H^2(A, A) = 0$, alors toute déformation de μ_0 est triviale.

Déformation de morphismes :

Soient A, B deux $\mathbb{K}$-algèbres associatives et $\phi : A \longrightarrow B$ un morphismes d'algèbres. Une déformation de ϕ est donnée par un triplet $\theta_t = (\mu_{A,t}, \mu_{B,t}, \phi_t)$ où :

- $\mu_{A,t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_{A,n} t^n$ est une déformation de A ;
- $\mu_{B,t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_{B,n} t^n$ est une déformation de B ;
- $\phi_t : A[[t]] \longrightarrow B[[t]]$ est un morphisme d'algèbres associatives de la forme $\phi_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n(x) t^n$, avec $\phi_n : A \longrightarrow B$ $\mathbb{K}$-linéaire et $\phi_0 = \phi$ pour $x \in A$.

Exemple :

On considère $V := \mathbb{C}^2$, de base $\{e_1, e_2\}$. Alors $\{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2,\}$ est une base de $V \otimes V$. On pose :

$$\begin{aligned} \tau : V \otimes V &\longrightarrow V \otimes V \\ v_1 \otimes v_2 &\longmapsto v_2 \otimes v_1, \end{aligned}$$

et pour $q \in \mathbb{C}^\times$, on définit φ par sa matrice

$$\begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$$

Comme q est non nul et par surjectivité de l'application exponentielle, on peut poser $q = \exp t$. Ainsi, $q = 1 \Longrightarrow \varphi = \tau$ et $q = 1 \Longleftrightarrow t = 0$. On va maintenant montrer que φ est une déformation de τ.

On définit pour $n \in \mathbb{N}$ les applications

$$\begin{aligned} \tau_n : V \otimes V &\longrightarrow V \otimes V \\ e_i \otimes e_i &\longmapsto \frac{1}{n!} e_i \otimes e_i \\ e_1 \otimes e_2 &\longmapsto 0 \\ e_2 \otimes e_1 &\longmapsto \frac{2}{n!} e_2 \otimes e_1 \text{ si } n \text{ est impair ; 0 sinon.} \end{aligned}$$

Ainsi, on a l'égalité

$$\varphi = \tau + t\tau_1 + t^2\tau_2 + ... = \tau + \sum_{n \geq 1} t^n \tau_n.$$

φ est donc bien une déformation de τ.

3 Déformations de catégories abéliennes

Le but de cette section est d'entrer dans le vif du sujet, c'est-à-dire d'introduire la notion de déformation pour des catégories linéaires et abéliennes, en exploitant les nombreux pré-requis que l'on a mis en place, et d'en donner certaines propriétés. L'idée est d'adapter un maximum de notions de la section 2 au contexte des catégories abéliennes. On va d'abord construire la bonne définition, puis discuter des déformations nilpotentes (voir définition 60), qui permettent de comprendre assez facilement certaines propriétés.

3.1 Mise en place de la définition

Pour obtenir une bonne définition de déformation pour les catégories abéliennes, on doit mettre en place un certain nombre de notions. La première contribution de l'article [LVB1] est la notion de platitude pour les catégories abéliennes, qui intervient dans un certain nombre de propriétés des déformations. Les deux paragraphes suivants ont pour but de comprendre cette définition, et notamment ses liens avec la notion de Ind-complétion, qui servira aussi plus tard.

3.1.1 Foncteurs effaçables et Ind-complétion

On rappelle (voir définition 21) que si $\mathcal{C}$ est une catégorie, on définit la catégorie $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ comme la catégorie des foncteurs covariants additifs $\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ exacts à gauche. Si $\mathcal{C}$ est localement petite ,un objet $X \in \mathcal{C}$ est dit **compact** ou **admettant une présentation finie** si le foncteur (coreprésentable) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Set}$ préserve les colimites filtrées.

On peut plonger $\mathcal{C}$ dans $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ par le foncteur valant 0 partout sauf en $c \in \mathcal{C}$. On stipule de plus que :
(1) Le plongement $\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ est pleinement fidèle ;
(2) Tout diagramme $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ est colimite de lui-même (vu comme un diagramme dans Ab via le point (1)) ;
(3) Les objets de $\mathcal{C}$ doivent être compacts dans $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$.

Définition 41 (Foncteur (co)effaçable)

(1) Un foncteur $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, avec $\mathcal{B}$ pré-additive est dit **effaçable** si pour tout objet a de $\mathcal{A}$, il existe un monomorphisme $u : a \longrightarrow a'$ tel que $F(u) = 0$.
(1') Il est dit **co-effaçable** si pour tout objet a de $\mathcal{A}$, il existe un épimorphisme $u : a \longrightarrow a'$ tel que $F(u) = 0$.
(2) Un foncteur $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ est dit **faiblement effaçable** si pour tout objet a de $\mathcal{A}$, pour tout élément $x \in F(a)$, il existe un monomorphisme $u : a \longrightarrow a'$ tel que $F(u)(x) = 0$.

Proposition 42

Soit $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif entre catégories abéliennes. Supposons que $\mathcal{A}$ ait suffisamment d'injectifs. Alors :
$$F \text{ est effaçable} \Longleftrightarrow F(I) = 0 \text{ pour tous les injectifs } I de \mathcal{A}.$$

Preuve :
($\Rightarrow$) Soit $I \in \mathcal{A}$ injectif. Supposons F effaçable. Alors il existe $u : I \longrightarrow u(I)$ monomorphisme tel que $F(u) = 0$. Comme I est injectif, on a le diagramme :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & u(I) \arrow[dl, dashed, "\exists\beta"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

β vérifie $id = \beta \circ u$.
En appliquant F à ce diagramme, on obtient $id = F(id) = F(\beta \circ u) = F(\beta) \circ F(u) = 0$, ce qui est impossible sauf si $F(I) = 0$.
Ainsi, si F est effaçable, $F(I) = 0$ pour tous les injectifs I de $\mathcal{A}$.
($\Leftarrow$) Supposons que $F(I) = 0$ pour tous les injectifs I de $\mathcal{A}$. Soit $a \in \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ a suffisamment d'injectifs, il existe $u : a \longrightarrow I$ monomorphisme et I injectif. En appliquant F, on a $F(u) : F(a) \longrightarrow F(I) = 0$, donc $F(u) = 0$. F est donc effaçable. $\square$

Proposition 43

Soit $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif entre catégories abéliennes. Supposons que $\mathcal{A}$ ait suffisamment d'injectifs. Alors :

$$F \text{ effaçable} \iff \mathrm{Ind}(F) \text{ effaçable.}$$

Preuve :

(2) ⇒ (1) : Supposons $\mathrm{Ind}(F)$ effaçable, et soit $c \in \mathcal{C}$. On peut plonger c dans $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$. Il existe donc un monomorphisme $u : c \longrightarrow c'$ dans $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ tel que $\mathrm{Ind}(F)(u) = 0$. c' est un diagramme $(c_i)_i$ que l'on peut identifier avec sa colimite :

$$\begin{tikzcd}
c' : (...) \arrow[r] & c_j \arrow[rr] \arrow[dr, "s_j"'] & & c_{l(j)} \arrow[r] \arrow[dl, "s_{l(j)}"] & (...) \\
& & \mathrm{colim}_i(c_i) & & \\
& & c \arrow[u, "u"] & &
\end{tikzcd}$$

Comme c admet un présentation finie, le foncteur $\mathcal{C}(c, -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Set}$ préserve les colimites filtrées par définition, donc $\mathcal{C}(\mathrm{colim}_i(c_i), c) = \mathrm{colim}_i(\mathcal{C}(c_i, c))$ et il existe alors $f : c \longrightarrow c_j$ tel que $u = s_j \circ f$. s_j est envoyé par $\mathrm{Ind}(F)$ dans la flèche $Fc_j \longrightarrow \mathrm{colim}_i Fc_i$. Or,

$$0 = \mathrm{Ind}(F)(u) = \mathrm{Ind}(F)(s_j \circ f) = \mathrm{Ind}(F)(s_j) \circ \mathrm{Ind}(F)(f),$$

donc $(Fc_j \longrightarrow \mathrm{colim}_i Fc) \circ F(f) = 0$. Puis comme avant, Fc admet une présentation finie dans $\mathrm{Ind}(\mathcal{D})$, donc il existe $s_{jk} : c_j \longrightarrow c_k$ tel que $F(s_{jk}) \circ F(f) = 0$. On a donc $s_{jk} \circ f : c \longrightarrow c_k$ et comme $u = s_k \circ s_{jk} \circ f$, $s_{jk} \circ f$ est un monomorphisme qui convient donc.

(1) ⇒ (2) : Supposons F effaçable. Montrons que $\mathrm{Ind}(F)$ s'annule sur tous les injectifs de $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$. Ceci prouvera en appliquant la proposition précédente, que $\mathrm{Ind}(F)$ est effaçable. Soit I un objet injectif de $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$. Alors I s'écrit $\mathrm{colim}_i(c_i)$, pour c_i objets de $\mathcal{C}$. Puisque F est effaçable, il existe, pour tout $c_i \in \mathcal{C}$, un monomorphisme $u_i : c_i \longrightarrow c_i'$, tel que $F(u_i) = 0$. On dispose toujours des flèches $s_j : c_j \longrightarrow \mathrm{colim}_i(c_i) = I$.
Par injectivité de I, il existe $f_j : c_j' \longrightarrow I$ tel que le diagramme commute :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & c_j \arrow[r, "u_j"] \arrow[d, "s_j"'] & c_j' \arrow[dl, dashed, "\exists f_j"] \\
& I &
\end{tikzcd}$$

En appliquant le foncteur $\mathrm{Ind}(F)$, il vient que toutes les flèches $\mathrm{Ind}(F)(s_j)$ sont nulles. Ainsi, on obtient que $\mathrm{Ind}(F)(I)$= 0, donc $\mathrm{Ind}(F)$ est effaçable par la proposition précédente.

□

Rappelons maintenant la construction des Ext-groupes de Yoneda. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne. On note $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}}(-,-)$ le groupe de Yoneda pour des objets de $\mathcal{C}$. Si $A, B, X_i \in \mathcal{C}$, un élément de $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}}(A, B)$ est une classe d'équivalence de suites exactes de la forme

$$\xi : 0 \to B \to X_n \to ... \to X_1 \to A \to 0.$$

Deux suites exactes ξ et ξ' sont équivalentes s'il existe des morphismes $X_i \longrightarrow X_i'$ tels que tous les diagrammes obtenus commutent simultanément. Si $\mathcal{C}$ a suffisamment de projectifs, les $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}}(A, -)$ sont les foncteurs dérivés de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$.

Proposition 44 ([LVB1])

Soient $\mathcal{C}$ essentiellement petite, et $c, d \in \mathcal{C}$. Alors

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(c, d) = \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})}(c, d).$$

3.1.2 Notion de platitude pour des catégories R-linéaires abéliennes

R désigne un anneau commutatif. On commence par une définition de platitude pour des catégories R-linéaires.

Définition 45 (Platitude pour une catégorie R-linéaire)

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie R-linéaire. $\mathcal{C}$ est dite **plate** si pour tous objets $c, c' \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c')$ est un objet plat de Mod(R).

On va maintenant introduire une notion différente de platitude pour des catégories R-linéaires *abéliennes*. En utilisant les propriétés de la notion d'univers, on peut supposer que toute catégorie est petite.
Dans toute la suite, $\mathcal{C}$ est une catégorie R-linéaire abélienne.

Proposition 46 ([LVB1])

Soit $X \in \mathrm{mod}(\mathrm{R})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :
(1) $\mathrm{Ext}^1_R(X, -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ est effaçable ;
(2) $\mathrm{Ext}^1_R(X, \mathcal{C}(-,-)) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ab}$ est faiblement effaçable ;
(3) $\mathrm{Tor}^R_1(X, -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ est co-effaçable ;

Ces équivalences permettent de donner la définition de platitude pour des catégories abéliennes :

Définition 47 (Platitude pour une catégorie R-linéaire *abélienne*)

Une catégorie R-linéaire abélienne $\mathcal{C}$ est dite **plate** (sur R) si pour tout $X \in \mathrm{mod}(\mathrm{R})$, les conditions équivalentes de la proposition 46 sont satisfaites.

La proposition 46 permet de déduire les propriétés de cette notion.

Proposition 48

- $\mathcal{C}$ est plate sur R si et seulement si $\mathcal{C}^{op}$ l'est.
- Supposons que $\mathcal{C}$ ait suffisamment d'injectifs. Alors $\mathcal{C}$ est plate sur R si et seulement si les injectifs de $\mathcal{C}$ sont coplats.

Preuve du deuxième point :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} \text{ est plate sur R } &\iff \mathrm{Ext}^1_R(X, -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \text{ est effaçable pour tout } X \in \mathrm{mod}(R) \\
&\iff \mathrm{Ext}^1_R(X, I) = 0 \text{ pour tout } X \in \mathrm{mod}(R) \text{ et tout I injectif de } \mathcal{C} \text{ par la proposition 42} \\
&\iff I \text{ est coplat par la proposition 30.}
\end{aligned}$$

□

Proposition 49

Supposons que $\mathcal{C}$ soit essentiellement petite. Alors $\mathcal{C}$ est plate sur R si et seulement si $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ l'est.

Preuve : Par la proposition 33, le foncteur $\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ commute avec Tor^R_i et Ext^i_R. Or, $\mathcal{C}$ est plate si et seulement si $\mathrm{Ind}(\mathrm{Ext}^i_R)$ est effaçable par la proposition 43, ce qui est donc équivalent à $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ plate. □

Proposition 50

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie R-linéaire essentiellement petite. Alors $\mathcal{A}$ est plate sur R si et seulement si la catégorie abélienne $\mathrm{Mod}(\mathcal{A})$ est plate sur R.

Preuve : Soient $E : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Mod}(R)$ un élément de $\mathrm{Mod}(\mathcal{A})$, $X \in \mathrm{Mod}(R)$ et $A \in \mathcal{A}$.

Lemme A : $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}R}(X, E(A)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}\mathcal{A}}(X \otimes_R \mathcal{A}(A,-), E)$.

Preuve du lemme A. Par le lemme de Yoneda,

$$E(A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}\mathcal{A}}(\mathcal{A}(A,-), E).$$

Ainsi,

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}R}(X, E(A)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}R}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}\mathcal{A}}(\mathcal{A}(A,-), E)).$$

En utilisant que Hom et $\otimes$ sont adjoints, on obtient le résultat. □

Lemme B : $\mathrm{Mod}(\mathcal{A})$ est plate $\Longleftrightarrow$ $E(A)$ est coplat pour tout injectif $E \in \mathrm{Mod}(\mathcal{A})$ et tout $A \in \mathcal{A}$.

Preuve du lemme B. $E(A)$ est coplat pour tout injectif $E \in \mathrm{Mod}(\mathcal{A})$ et tout $A \in \mathcal{A}$ si et seulement si E est coplat par la proposition 35. Or, ceci est équivalent à $\mathrm{Mod}(\mathcal{A})$ plate par la proposition 48. □

Lemme C : $\mathcal{A}$ plate $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}(A,-)$ est plat pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Preuve du lemme C. $\mathcal{A}(A,-)$ est plat pour tout $A \in \mathcal{A}$ si et seulement si $\mathcal{A}(A,B)$ est plat dans $\mathrm{Mod}R$ pour tous $A, B \in \mathcal{A}$. Or ceci est la définition de $\mathcal{A}$ plate. □

Notons maintenant que si E est injectif, $\mathrm{Hom}(-,E)$ est toujours exact. Ainsi, l'exactitude de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}\mathcal{A}}(- \otimes_R \mathcal{A}(A,-), E)$ est équivalente à l'exactitude de $- \otimes_R \mathcal{A}(A,-)$. Puis :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mod}(\mathcal{A}) \text{ est plate } &\Longleftrightarrow E(A) \text{ est coplat pour tout injectif } E \in \mathrm{Mod}(\mathcal{A}) \text{ et tout } A \in \mathcal{A} \quad (\mathbf{B})\\
&\Longleftrightarrow \mathrm{Hom}_R(-, E(A)) \text{ est exact pour tout injectif } E \in \mathrm{Mod}(\mathcal{A}) \text{ et tout } A \in \mathcal{A}\\
&\Longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}\mathcal{A}}(X \otimes_R \mathcal{A}(A,-), E) \text{ est exact pour tout injectif } E \in \mathrm{Mod}(\mathcal{A}) \text{ et tout } A \in \mathcal{A} \quad (\mathbf{A})\\
&\Longleftrightarrow - \otimes_R \mathcal{A}(A,-) \text{ est exact pour tout } A \in \mathcal{A}\\
&\Longleftrightarrow \mathcal{A}(A,-) \text{ est plat pour tout } A \in \mathcal{A}\\
&\Longleftrightarrow \mathcal{A} \text{ est plate.} \quad (\mathbf{C})
\end{aligned}$$

□

3.1.3 Changement de base : constructions fonctorielles

Pour arriver à notre notion de déformation d'une catégorie linéaire abélienne, on a besoin de construire de nouvelles catégories et foncteurs. C'est l'objet de ce paragraphe.
Soient R et S deux anneaux commutatifs, et $\theta : R \longrightarrow S$ un homomorphisme d'anneaux.

Définition 51 (Construction $(\overline{-})$)

- Soit $M \in$ Mod(S). On désigne par $\overline{M}$ le module M vu comme R-module via $\theta : R \longrightarrow S$. L'action est donnée par $(r,m) \longmapsto \theta(r) \cdot m$, pour $r \in R$ et $m \in M$.
- Soit $\mathcal{B}$ une catégorie S-linéaire. On désigne par $\overline{\mathcal{B}}$ la catégorie R-linéaire définie par $\mathrm{Ob}(\overline{\mathcal{B}})$=$\mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ et $\overline{\mathcal{B}}(B,B') = \overline{\mathcal{B}(B,B')}$;

Définition 52 (Construction $S \otimes_R (-)$)

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie R-linéaire.
On désigne par $S \otimes_R \mathcal{A}$ la catégorie S-linéaire définie par Ob($S \otimes_R \mathcal{A}$)=Ob($\mathcal{A}$) et $(S \otimes_R \mathcal{A})(A, A') = S \otimes_R \mathcal{A}(A, A')$.

Définition 53 (Catégorie S-linéaire des S-objets)

Soit $(\mathcal{C}, \rho)$ une catégorie R-linéaire. On définit la catégorie S-linéaire des S-objets, notée $\mathcal{C}_S$ par :

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_S) = \{(c, \varphi_c)\}$, où c est un objet de $\mathcal{C}$ et $\varphi_c : S \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c)$ morphisme d'anneaux vérifiant $\varphi_c \circ \theta = \rho_c$ (voir paragraphe 1.2.3).
- Pour les morphismes, on garde les morphismes de $\mathcal{C}$ qui font commuter le diagramme suivant, pour tout $s \in S$:

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\varphi_c(s)"] \arrow[d, "f"'] & c \arrow[d, "f"] \\ d \arrow[r, "\varphi_d(s)"'] & d \end{tikzcd}$$

Avec ce choix pour les morphismes de $\mathcal{C}_S$, on a, pour $s \in S$, que $\varphi(s)$ est une transformation naturelle $1_{\mathcal{C}_S} \longrightarrow 1_{\mathcal{C}_S}$, définie par ses composantes $\varphi_c(s)$, pour tout $c \in \mathcal{C}$. $\mathcal{C}_S$ est une sous catégorie de $\mathcal{C}$, qui n'est cependant pas forcément pleine.

Si l'on dispose d'un morphisme d'anneaux $\theta : R \longrightarrow S$ **surjectif**, alors tout $s \in S$ s'écrit $\theta(r)$, pour un certain $r \in R$. Dès lors, le diagramme de la définition 53 devient

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\varphi_c \circ \theta(r)"] \arrow[d, "f"'] & c \arrow[d, "f"] \\ d \arrow[r, "\varphi_d \circ \theta(r)"'] & d \end{tikzcd}$$

Or, les φ_c vérifient $\varphi_c \circ \theta = \rho_c$, on a donc :

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\rho_c(r)"] \arrow[d, "f"'] & c \arrow[d, "f"] \\ d \arrow[r, "\rho_d(r)"'] & d \end{tikzcd}$$

Comme $\rho(r)$ est une transformation naturelle $1_{\mathcal{C}} \longrightarrow 1_{\mathcal{C}}$, toute flèche $c \longrightarrow d$ fait commuter ce diagramme. On a ainsi obtenu :

$$\theta : R \longrightarrow S \text{ surjectif} \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_S}(c, d) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, d).$$

Dans le cas où θ est surjectif, $\mathcal{C}_S$ est donc une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$. Le foncteur oubli $\mathcal{C}_S \longrightarrow \mathcal{C}$ est donc **pleinement fidèle**.

Voici un tableau récapitulatif de ces nouvelles constructions :

Foncteur	**Catégorie S-linéaire**	**Sens**	**Catégorie R-linéaire**
$(\overline{-})$	$\mathcal{B}$	$\longrightarrow$	$\overline{\mathcal{B}}$
$S\otimes_R(-)$	$S\otimes_R\mathcal{A}$	$\longleftarrow$	$\mathcal{A}$
$(\overline{-})$	$\mathcal{D}$	$\longrightarrow$	$\overline{\mathcal{D}}$
$(.)_S$	$\mathcal{C}_S$	$\longleftarrow$	$\mathcal{C}$

Il est essentiel de remarquer que si $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne, alors $\mathcal{C}_S$ reste abélienne. Dans ce cas, le foncteur oubli $\mathcal{C}_S\longrightarrow\mathcal{C}$ est exact.

Proposition 54

Supposons que $\mathcal{C}$ est une catégorie R-linéaire essentiellement petite. Alors le foncteur

$$H:\mathrm{Ind}(\mathcal{C}_S)\longrightarrow\mathrm{Ind}(\mathcal{C})_S$$

définit une équivalence de catégories.

Preuve. On va montrer que H est pleinement fidèle et essentiellement surjectif. On définit

$$\begin{aligned} H:\mathrm{Ind}(\mathcal{C}_S)&\longrightarrow\mathrm{Ind}(\mathcal{C})_S\\ \mathrm{colim}_i(c_i,\varphi_i)&\longmapsto(\mathrm{colim}_i(c_i),\tilde{\varphi}),\end{aligned}$$

avec $\tilde{\varphi}=(\varphi_i)_i$. Le diagramme suivant donne la fidélité :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "\mathrm{Ind}"] & \mathrm{Ind}(\mathcal{C}) & \\
\mathcal{C}_S \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{Ind}"'] & \mathrm{Ind}(\mathcal{C}_S) \arrow[u, "\mathrm{Ind}F"'] \arrow[r, "H"'] & \mathrm{Ind}(\mathcal{C})_S \arrow[ul, "F'"']
\end{tikzcd}$$

F et F' sont les foncteurs oublis associés, qui sont fidèles. Ainsi, $\mathrm{Ind}(F)$ est également fidèle, donc H aussi.

Soient maintenant $c,d\in\mathrm{Ind}(\mathcal{C}_S)$, et $f:c\longrightarrow d$. c et d sont des diagrammes admettant une colimite, donc on peut identifier $c=\mathrm{colim}_i(c_i,\varphi_i)$ et $d=\mathrm{colim}_j(d_j,\psi_j)$. Regardons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
c:(...) \arrow[r] & (c_i,\varphi_i) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[ddd, dashed, "f_i"] & & (c_{l(i)},\varphi_{l(i)}) \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[ddd, dashed, "f_{l(i)}"] & (...) \\
& & \mathrm{colim}_i(c_i,\varphi_i) \arrow[d, "f"] & & \\
& & \mathrm{colim}_j(d_j,\psi_j) & & \\
d:(...) \arrow[r] & (d_{j(i)},\psi_{j(i)}) \arrow[rr, "g_i"'] \arrow[ur] & & (d_{k(i)},\psi_{k(i)}) \arrow[r] \arrow[ul] & (...)
\end{tikzcd}$$

En utilisant les propriétés des éléments des éléments de $\mathcal{C}_S$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
c_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & d_{j(i)} \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "\psi_{j(i)}"] & d_{k(i)} \arrow[d, "\psi_{k(i)}"] \\
c_i \arrow[r, "f_i"'] & d_{j(i)} \arrow[r, "g_i"'] & d_{k(i)}
\end{tikzcd}$$

On déduit donc que $\psi_{k(i)} \circ (g_i \circ f_i) = (g_i \circ f_i) \circ \varphi_i$, donc $g_i \circ f_i \in \mathcal{C}_S$. De plus, on a $(f_i)_i = (g_i \circ f_i)_i$. On a donc écrit $f = (f_i)_i \in \mathrm{Ind}(\mathcal{C})_S$ comme un élément de $\mathrm{Ind}(\mathcal{C}_S)$, donc H est plein.

Montrons maintenant que H est essentiellement surjectif. Soit $(d, \tilde{\psi}) \in \mathrm{Ind}(\mathcal{C})_S$. $\tilde{\psi}$ induit un épimorphisme $g : S \otimes_R d \longrightarrow d$ de $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})_S$. En notant K le noyau, on a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow S \otimes_R d \longrightarrow d \longrightarrow 0.$$

De même, on obtient un épimorphisme $S \otimes_R K \longrightarrow K$. On obtient donc $f : S \otimes_R K \longrightarrow S \otimes_R d$. Par exactitude, on a

$$d \cong (S \otimes_R d)/K \cong (S \otimes_R d)/\mathrm{Im}(f) = \mathrm{coker}(f).$$

Puis, écrivons d comme colimite : $d = \mathrm{colim}_j(d_j)$. Ainsi, on obtient $S \otimes_R d = \mathrm{colim}_j(S \otimes_R d_j) \in \mathrm{Ind}(\mathcal{C}_S)$. De la même manière, $S \otimes_R K \in \mathrm{Ind}(\mathcal{C}_S)$, donc $\mathrm{coker}(f)$ également par exactitude de Ind. Comme $d \cong \mathrm{coker}(f)$, on a bien montré que tout élément de $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})_S$ est isomorphe à un élément de l'image de H.

Ainsi, H définit une équivalence de catégories.

□

3.1.4 Déformations

On arrive maintenant à définir deux notions de déformation : l'une pour les catégories pré-additives, l'autre pour des catégories qui sont de plus abéliennes. On considère R et S deux anneaux commutatifs, et $\theta : R \longrightarrow S$ un homomorphisme d'anneaux.

Définition 55 (Déformation pour catégories pré-additives)

- Soit $\mathcal{B}$ une catégorie S-linéaire. Une **R-déformation** de $\mathcal{B}$ est une catégorie R-linéaire $\mathcal{A}$ munie d'un foncteur R-linéaire $\mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathcal{B}}$, qui induit une équivalence de catégories $S \otimes_R \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$.
- Si $S \otimes_R \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est un isomorphisme, la déformation est dite **stricte**.
- Si $\mathcal{A}$ est plate sur R (au sens de la définition 45), la déformation est dite **plate**.

Définition 56 (Déformation pour catégories abéliennes)

- Soit $\mathcal{D}$ une catégorie S-linéaire abélienne. Une **R-déformation** de $\mathcal{D}$ est une catégorie R-linéaire $\mathcal{C}$ munie d'un foncteur R-linéaire $\overline{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{C}$, qui induit une équivalence de catégories $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}_S$.
- Si $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}_S$ est un isomorphisme, la déformation est dite **stricte**.
- Si $\mathcal{C}$ est plate sur R (au sens de la définition 47), la déformation est dite **plate**.

Notons que déformer une catégorie R-linéaire abélienne $\mathcal{D}$ en tant que catégorie abélienne, c'est à dire au sens de la définition 56, et la déformer en tant que catégorie R-linéaire (définition 55), sont deux manipulations complètement différentes. Toutefois, la déformation de la définition 56 préserve le fait d'être abélien.

Dans la suite, lorsque la confusion est possible, on parlera des déformations de la définition 55 comme **déformations linéaires** et celles de la définition 56 comme **déformations abéliennes**.

Exemple : Soient $\theta : R \longrightarrow S$ un morphisme surjectif entre deux anneaux commutatifs. Rappelons que l'on peut alors munir les S-modules d'une structure de R-module via le morphisme θ. On a aussi vu que Mod(S) est une catégorie S-linéaire, munie d'un morphisme d'anneaux $\varphi : S \longrightarrow \mathrm{Nat}(1, 1)$. On définit alors le foncteur :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mod}(S) &\longrightarrow \mathrm{Mod}(R)_S \\ M &\longmapsto (\overline{M}, \varphi_M) \end{aligned}$$

Il est clair que ce foncteur est pleinement fidèle et essentiellement surjectif. Il définit donc une équivalence de catégories $\mathrm{Mod}(S) \simeq \mathrm{Mod}(R)_S$. On a donc une déformation $\mathrm{Mod}(S) \longrightarrow \mathrm{Mod}(R)$.

Proposition 57

Soit $\mathcal{B}$ une catégorie S-linéaire essentiellement petite. Une R-déformation linéaire essentiellement petite $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ induit une déformation abélienne $\text{Mod}(\mathcal{B}) \longrightarrow \text{Mod}(\mathcal{A})$. De plus, l'une de ces déformations est plate si et seulement si l'autre l'est.

Preuve : Les catégories $\text{Mod}(S \otimes \mathcal{A})$ et $\text{Mod}(\mathcal{A})_S$ sont équivalentes. En effet, comme $\text{Mod}(S \otimes \mathcal{A})$ est S-linéaire, elle est équipée d'un morphisme $\varphi : S \longrightarrow \text{Nat}(1, 1)$. On considère :

$$\begin{aligned} \text{Mod}(S \otimes \mathcal{A}) &\longrightarrow \text{Mod}(\mathcal{A})_S \\ (F : S \otimes \mathcal{A} \to \text{Ab}) &\longmapsto (\overline{F} : A \longrightarrow \text{Ab}, \varphi_F) \end{aligned}$$

Ce foncteur est pleinement fidèle et essentiellement surjectif, il définit donc une équivalence de catégories. Si maintenant $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est une R-déformation de $\mathcal{B}$ essentiellement petite, on a une équivalence $S \otimes \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. En prenant $\mathcal{B} = S \otimes \mathcal{A}$, ce qu'on a vu au-dessus donne $\text{Mod}(S \otimes \mathcal{A}) \cong \text{Mod}(\mathcal{A})_S$, ce qui donne la déformation abélienne voulue. L'équivalence énoncée est donnée directement par la proposition 50. □

Proposition 58

Toute R-déformation abélienne $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ entre catégories S-linéaires abéliennes essentiellement petites induit une R-déformation abélienne $\text{Ind}(\mathcal{D}) \longrightarrow \text{Ind}(\mathcal{C})$. De plus, l'une de ces déformations est plate si et seulement si l'autre l'est.

Preuve : Comme on a une équivalence de catégories $\mathcal{D} \simeq \mathcal{C}_S$, il suffit donc de montrer que $\text{Ind}(\mathcal{C}_S) \simeq \text{Ind}(\mathcal{C})_S$. Or, ceci est donné par la proposition 54. De plus, si $\mathcal{C}$ est plate (comme catégorie abélienne), alors $\text{Ind}(\mathcal{C})$ l'est aussi par la proposition 49, qui donne également la réciproque. □

3.2 Déformations nilpotentes

Cette section vise à montrer que sous certaines hypothèses, des propriétés sont préservées par des déformations abéliennes. On introduira notamment la notion de **déformation nilpotente**, et on se placera sous cette hypothèse pour déduire les propriétés de préservation souhaitées.

Soit R est un anneau, $\mathcal{C}$ un catégorie R-linéaire, C un objet de $\mathcal{C}$ et $I, J \subset R$ des idéaux. On considère

$$i : I \otimes_R C \longrightarrow C$$

et

$$j : C \longrightarrow \text{Hom}_R(J, C).$$

On note $IC := \text{Im}(i)$ et $CJ := \text{Im}(j)$. On a $(IJ)C = I(JC)$, comme sous-objets de C.

Lemme 59

Si C est plat, alors i est injective ; si C est coplat, alors j est surjective.

Preuve : Comme C est plat, $- \otimes_R C : \text{mod}(R) \longrightarrow \mathcal{C}$ est exact.
Considérons la suite exacte courte $0 \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$. Alors la suite

$$0 \longrightarrow I \otimes_R C \longrightarrow R \otimes_R C \cong C \longrightarrow R/I \otimes_R C \longrightarrow 0$$

est exacte, donc i est bien injective. La même preuve s'adapte pour j. □

On considère un homomorphisme d'anneaux $\theta : R \longrightarrow S$, où S admet une R-présentation finie. On suppose de plus que θ est surjectif, ce qui implique que le foncteur oubli $\mathcal{C}_S \longrightarrow \mathcal{C}$ est pleinement fidèle. Notons $I = \ker(\theta)$, c'est un idéal de R.

Définition 60 (Déformations nilpotentes)

- On dit qu'une R-déformation (linéaire comme abélienne) est **nilpotente** si l'idéal $I = \mathrm{Ker}(\theta)$ est nilpotent, c'est à dire qu'il existe un entier naturel n tel que $I^n = 0$.
- Si $I^n = 0$, on dit que la déformation est **nilpotente d'ordre n**.

Exemple : Soit $\mathbb{K}$ un corps, et $R = \mathbb{K}[x]/x^2$. On définit un morphisme d'anneaux :

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{K}[x]/x^2 &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \overline{1} &\longmapsto \lambda \\ \overline{x} &\longmapsto \mu \end{aligned}$$

Si $a, b \in \mathbb{K}$, on a $\mathrm{Ker}(\theta) = \left\{\overline{ax+b}, \quad a\mu + b = 0\right\} = \left\{\overline{ax+b}, \quad a \neq 0, \quad \frac{b}{a} = -\mu\right\} \cup \left\{\overline{0}\right\}$. On a donc clairement $\mathrm{Ker}(\theta)^2 = \overline{0}$ dans $\mathbb{K}[x]/x^2$. On note $I = \mathrm{Ker}(\theta)$
On pose maintenant $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{C} = \mathrm{Mod}(R)$.
On a une équivalence de catégories $\mathrm{Mod}(R)_{\mathbb{K}} \cong \mathrm{Mod}(\mathbb{K})(= \mathrm{Vect}(\mathbb{K}))$, donc $\mathcal{C}$ est une déformation nilpotente d'ordre 2 de $\mathcal{D}$.

Proposition 61

Si $\mathcal{C}$ est une déformation nilpotente (linéaire ou abélienne) de $\mathcal{D}$, alors il existe des catégories

$$\mathcal{D} = \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_k = \mathcal{C}$$

pour un certain k tel que $\mathcal{C}_{i+1}$ est une déformation nilpotente d'ordre 2 de $\mathcal{C}_i$. Si $\mathcal{C}$ est plate, on peut supposer que les $\mathcal{C}_i$ sont aussi plates.

Preuve (cas linéaire) : Soit $\mathcal{D}$ S-linéaire, $\mathcal{C}$ R-linéaire et $\theta : R \longrightarrow S$ un morphisme d'anneaux surjectif. Supposons que $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ soit une déformation nilpotente d'ordre k. Posons $I = \mathrm{Ker}(\theta)$. On a donc $I^k = 0$. On définit :

$$J := \begin{cases} I^{k/2} \text{ si k est pair}; \\ I^{(k+1)/2} \text{ si k est impair.} \end{cases}$$

Dans les 2 cas, J est un idéal nilpotent d'ordre 2, donné par $J = \mathrm{Ker}(\theta_0 : R \longrightarrow R_1)$, avec $R_1 := R/J$. Comme $J \subset \mathrm{Ker}(\theta)$, la propriété universelle des quotients donne un morphisme $\bar{\theta} : R_1 \longrightarrow S$:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & S \\ R_1 \arrow[ur, dashed, "\exists\bar{\theta}"'] & \end{tikzcd}$$

On a donc $R \xrightarrow{\theta_0} R_1 \xrightarrow{\bar{\theta}} S$. Posons $\mathcal{C}_1 := R_1 \otimes_R \mathcal{C}$. Ainsi, $\mathcal{C}$ est une R-déformation nilpotente d'ordre 2 de $\mathcal{C}_1$. Comme $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est aussi une R-déformation, on a :

$$\begin{aligned} &\mathcal{D} \cong S \otimes_R \mathcal{C}; \\ \Longleftrightarrow\ &\mathcal{D} \cong (S \otimes_{R_1} R_1) \otimes_R \mathcal{C}; \\ \Longleftrightarrow\ &\mathcal{D} \cong S \otimes_{R_1} (R_1 \otimes_R \mathcal{C}); \\ \Longleftrightarrow\ &\mathcal{D} \cong S \otimes_{R_1} \mathcal{C}_1 . \end{aligned}$$

$\mathcal{C}_1$ est donc une R_1-déformation de $\mathcal{D}$. On a donc obtenu deux déformations successives

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_1 \longrightarrow D,$$

avec $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_1$ nilpotente d'ordre 2. On peut ensuite réitérer ce processus sur $\mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{D}$, et cela va s'arrêter à cause des hypothèses sur les anneaux, ce qui achève la preuve dans le cas linéaire. $\square$

Proposition 62

Soit $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ une déformation nilpotente et soit c un objet de $\mathcal{C}$. Si $S \otimes_R c = 0$ ou bien $\mathrm{Hom}_R(S, c) = 0$, alors $c = 0$.

Preuve : Supposons que $S \otimes_R c = 0$. On a une suite exacte $0 \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow S \longrightarrow 0$, qui donne par exactitude de $- \otimes c$, une autre suite exacte

$$0 \longrightarrow I \otimes c \longrightarrow c \longrightarrow S \otimes c \longrightarrow 0.$$

Puisque $S \otimes_R c = 0$, on a donc $Ic = c$. Par récurrence, on obtient $I^n c = c$ pour $n \in \mathbb{N}$. Or, I est nilpotent, donc finalement $c = 0$. Le cas $\mathrm{Hom}_R(S, c) = 0$ est du même acabit. □

On considère maintenant $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ une R-déformation nilpotente plate d'une catégorie S-linéaire $\mathcal{B}$. On va voir comment relever certaines propriétés de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{A}$.

Proposition 63

Supposons que $f \in \mathcal{A}(c, d)$ soit tel que $F(f) \in \mathcal{B}(Fc, Fd)$ soit un isomorphisme. Alors f est un isomorphisme de $\mathcal{A}$.

Preuve : On peut considérer qu'on a affaire à une déformation nilpotente d'ordre 2, et prendre $\mathcal{B} = S \otimes \mathcal{A}$. On a une suite exacte $0 \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow S \longrightarrow 0$. Comme $\mathcal{A}(c, d)$ est plat, la suite $0 \longrightarrow I \otimes \mathcal{A}(c, d) \longrightarrow R \otimes \mathcal{A}(c, d) \longrightarrow S \otimes \mathcal{A}(c, d) \longrightarrow 0$ est exacte, ce qui donne finalement que

$$0 \longrightarrow I\,\mathcal{A}(c, d) \longrightarrow \mathcal{A}(c, d) \longrightarrow (S \otimes \mathcal{A})(c, d) \longrightarrow 0$$

est exacte.
Soit maintenant g telle que $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) = 1_{Fd} = F(1_d)$. On a alors $F(f \circ g - 1_d) = 0$ dans $S \otimes \mathcal{A}(c, d)$. Par exactitude de la dernière suite, $f \circ g - 1_d$ est dans l'image de $I \otimes \mathcal{A}(c, d) \longrightarrow \mathcal{A}(c, d)$. Ainsi $f \circ g - 1_d \in I\,\mathcal{A}(c, d)$. Or, $I^2 = 0$, donc $(f \circ g - 1_d)^2 = 0 = (g \circ f - 1_c)^2$. (La deuxième égalité s'obtient de manière similaire en utilisant $F(g \circ f) = 1_{Fc}$). En développant ces deux égalités, on obtient :

$$\begin{aligned} f \circ (2g - g \circ f \circ g) &= 1_d \\ (2g - g \circ f \circ g) \circ f &= 1_c, \end{aligned}$$

donc f est un isomorphisme de $\mathcal{A}$.

□

Proposition 64

Soit $Z \in \mathcal{A}$ tel que $F(Z)$ soit l'objet nul de $\mathcal{B}$. Alors Z est l'objet nul de $\mathcal{A}$.

Preuve : On prend comme avant $\mathcal{B} = S \otimes \mathcal{A}$. Alors $F(Z) = Z$ en tant qu'objet de $S \otimes \mathcal{A}$. Comme Z est l'objet nul de $\mathcal{A}$, on a

$$0 = (S \otimes \mathcal{A})(A, Z) = S \otimes \mathcal{A}(A, Z) \quad \text{pour tout objet A de } \mathcal{A}.$$

La proposition 62 assure alors que $\mathcal{A}(A, Z) = 0$ pour tout objet A de $\mathcal{A}$. Ainsi, Z est l'objet nul de $\mathcal{A}$. □

Proposition 65

Soit $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ une déformation plate nilpotente. Si $\mathcal{D}$ a suffisamment d'injectifs, alors $\mathcal{C}$ aussi.

Cette proposition est démontrée dans [LVB1] (Theorem 6.16) en utilisant des résultats sur les relèvements et les obstructions qui seront discutés plus loin dans ce travail.

3.3 Equivalence de déformations

Dans ce paragraphe on souhaite adapter la notion d'équivalence de déformations du paragraphe 2.3. Ici il faut être précautionneux avec les univers dans lesquels on travaille. Soit $\mathcal{U}$ un univers. On note $\mathcal{U}$-Rng^0 la catégorie des anneaux cohérents avec les morphismes d'anneaux surjectifs ayant un noyau nilpotent de type fini. Si S est un anneau cohérent fixé dans $\mathcal{U}$, alors on peut regarder la catégorie $\mathcal{U}$-Rng^0/S.

Rappelons qu'un **pseudo-foncteur** est un foncteur F qui ne vérifie pas la relation $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$. Soit $\mathcal{W}$ un univers. Un **pseudo-foncteur de déformation** est par définition un pseudo-foncteur

$$\mathcal{U} - \mathrm{Rng}^0/S \longrightarrow \mathcal{W} - \mathrm{Gd},$$

où Gd désigne la catégorie des groupoïdes. Un groupoïde est pour rappel une catégorie dans laquelle toutes les flèches sont inversibles.

Définition 66 (Équivalence de déformations linéaires)

Soit $\mathcal{B}$ une catégorie S-linéaire et $f_1 : \mathcal{A}_1 \longrightarrow B$, $f_2 : \mathcal{A}_2 \longrightarrow \mathcal{B}$ deux déformations linéaires de $\mathcal{B}$. Alors f_1 et f_2 sont dites **équivalentes** s'il existe une équivalence de catégories R-linéaires $\phi : \mathcal{A}_2 \longrightarrow \mathcal{A}_1$ telle qu'il existe un isomorphisme naturel $f_1 \circ \phi \cong f_2$.

Définition 67 (Équivalence de déformations abéliennes)

Soit $\mathcal{D}$ une catégorie S-linéaire et $F_1 : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}_1$, $F_2 : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}_2$ deux déformations abéliennes de $\mathcal{D}$. Alors F_1 et F_2 sont dites **équivalentes** s'il existe une équivalence de catégories R-linéaires $\phi : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ telle qu'il existe un isomorphisme naturel $\phi \circ F_1 \cong F_2$.

Soit maintenant $R \in \mathcal{U}$-Rng^0/S. On considère $\mathcal{B}$ une $\mathcal{U}$-catégorie S-linéaire plate et $\mathcal{V}$ un univers tel que $\mathcal{B}$ soit essentiellement $\mathcal{V}$-petite et $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$. On définit le groupoïde $\mathcal{V} - \mathrm{def}_{\mathcal{B}}(R)$ par :
- Objets : R-déformations linéaires plates de $\mathcal{B}$ qui sont éléments de $\mathcal{V}$;
- Flèches : équivalences de déformations modulo les isomorphismes naturels de foncteurs.

De même, si $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{U}$-catégorie S-linéaire plate abélienne et $\mathcal{V}$ un univers tel que $\mathcal{D}$ est essentiellement $\mathcal{V}$-petite et $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, on définit le groupoïde $\mathcal{V} - \mathrm{Def}_{\mathcal{D}}(R)$ par
- Objets : R-déformations abéliennes plates de $\mathcal{D}$ qui sont éléments de $\mathcal{V}$;
- Flèches : équivalences de déformations modulo les isomorphismes naturels de foncteurs.

On a $\mathrm{Ob}(\mathcal{V}-\mathrm{def}_{\mathcal{B}}(R)) \subset \mathcal{V}$ et $\mathrm{Ob}(\mathcal{V}-\mathrm{Def}_{\mathcal{D}}(R)) \subset \mathcal{V}$ également. On obtient alors des pseudo-foncteurs de déformation :

$$\mathcal{V} - \mathrm{def}_{\mathcal{B}} : \mathcal{U} - \mathrm{Rng}^0/S \longrightarrow \mathcal{W}\text{-Gd}$$
$$\mathcal{V} - \mathrm{Def}_{\mathcal{D}} : \mathcal{U} - \mathrm{Rng}^0/S \longrightarrow \mathcal{W}\text{-Gd},$$

avec $\mathcal{W}$ un univers tel que $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$. A partir d'ici, on va omettre les univers dans la notation.

Proposition 68 ([LVB1])

(1) Si $\mathcal{B}$ est plate S-linéaire, alors $\theta : \mathrm{def}_{\mathcal{B}} \longrightarrow \mathrm{def}_{\mathcal{B}^{op}}$ est une équivalence ;
(2) Si $\mathcal{B} \cong \mathcal{B}'$, alors $\delta : \mathrm{def}_{\mathcal{B}} \longrightarrow \mathrm{def}_{\mathcal{B}'}$ est une équivalence ;
(3) Si $\mathcal{D}$ est plate S-linéaire abélienne, alors $\theta : \mathrm{Def}_{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathrm{Def}_{\mathcal{D}^{op}}$ est une équivalence ;
(4) Si $\mathcal{D} \cong \mathcal{D}'$, alors $\delta : \mathrm{Def}_{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathrm{Def}_{\mathcal{D}'}$ est une équivalence.

Si $\mathcal{D}$ est une catégorie, on note $\mathrm{Inj}(\mathcal{D})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}$ constituée des objets injectifs.

Théorème 69 ([LVB1])

Si $\mathcal{D}$ a suffisamment d'injectifs, alors $\mathrm{Def}_{\mathcal{D}}$ et $\mathrm{def}_{\mathrm{Inj}(\mathcal{D})}$ sont des pseudo-foncteurs de déformation équivalents.

Ce théorème permet de voir que la théorie des déformations de catégories abéliennes se réduit finalement à la théorie des déformations de catégories linéaires. On verra dans le prochain chapitre que ces pseudo-foncteurs peuvent être décrits par une cohomologie de Hochschild adaptée.

4 Contrôle des déformations par la cohomologie de Hochschild

L'objectif de ce chapitre est de comprendre comment les déformations de catégories abéliennes peuvent être contrôlées par des objets cohomologiques, pour donner un pendant catégorique au théorème 39. On va aussi introduire une notion d'obstruction dans ce contexte. Pour cela, on doit d'abord voir la notion de DG-catégorie et de catégorie dérivée, et la cohomologie de Hochschild dans le cadre des catégories abéliennes. Les éléments de ce chapitre sont exposés dans [LVB2] et [L3]. La première section provient de [KB] et [T].

4.1 DG-catégories

Dans cette section, R est un anneau commutatif et les produits tensoriels non labellisés sont pris sur R. Rappelons que si $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne, un objet de $\mathcal{A}$ gradué s'écrit $M = \bigsqcup_{i\in\mathbb{Z}} M^i$, avec $(M^i)_i$ une suite d'objets de $\mathcal{A}$. On dit qu'un élément x de M est homogène de degré i si $x \in M^i$ (on note parfois $|x| = i$). Ici, $\sqcup$ désigne le coproduit dans $\mathcal{A}$.
Les morphismes homogènes de degré p dans $\mathcal{A}$ sont les $\varphi : M \longrightarrow N$ tels que $\varphi(M^i) \subset N^{i+p}$, $i, p \in \mathbb{Z}$.

4.1.1 Catégories graduées

Commençons par voir la notion de catégorie graduée, avant d'introduire celle de DG-catégorie.

Définition 70 (Catégorie graduée)

Une **catégorie graduée** est une catégorie R-linéaire $\mathcal{A}$ dont les espaces de morphismes sont des R-modules gradués. Plus précisément, on a pour A et B deux objets de $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A}(A,B) = \bigsqcup_p \mathcal{A}(A,B)^p,$$

tel que que la composition $\mathcal{A}(A,B) \otimes \mathcal{A}(B,C)$ est homogène de degré 0.

Par exemple, la catégorie $\mathrm{Modgr}(R)$ des R-modules gradués $M = \bigsqcup_p M^p$ avec

$$\mathrm{Modgr}(M,N)^p = \left\{ f : M \longrightarrow N, f(M^q) \subset N^{p+q}, \forall q \in \mathbb{Z} \right\}.$$

est une catégorie graduée.

- On dit qu'une catégorie graduée $\mathcal{A}$ est **concentrée en degré 0** si $\mathcal{A}(A,B)^p = 0$ dès que $p \neq 0$.
- Un **foncteur gradué** entre deux catégories graduées est un foncteur linéaire $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ tel que les flèches $\mathcal{A}(A,B) \longrightarrow \mathcal{B}(FA,FB)$ sont homogènes de degré 0 pour tous objets A, B de $\mathcal{A}$.
- La **catégorie graduée opposée** $\mathcal{A}^{op}$ d'une catégorie graduée petite $\mathcal{A}$ est la catégorie ayant mêmes objets que $\mathcal{A}$, et dont les espaces de morphismes sont $\mathcal{A}^{op}(A,B) = \mathcal{A}(B,A)$. La composition est donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{op}(A,B)^p \otimes \mathcal{A}^{op}(B,C)^q &\longrightarrow \mathcal{A}^{op}(A,C)^{p+q}\\ g \otimes f &\longmapsto (-1)^{pq} f \circ g.\end{aligned}$$

- Un **$\mathcal{A}$-module gradué (à droite)** est un foncteur gradué $M : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow \mathrm{Modgr}(R)$.

On définit maintenant deux nouvelles catégories :

Définition 71 (Catégorie $(G\,\mathcal{A})$)

Si $\mathcal{A}$ est une catégorie graduée, on définit la catégorie $(G\,\mathcal{A})$ par :
- Objets : $\mathcal{A}$-modules gradués ;
- Flèches : $G\,\mathcal{A}(M,N)$ est l'ensemble des transformations naturelles $\alpha : M \longrightarrow N$ telles que $\alpha_A : MA \longrightarrow NA$ soit homogène de degré 0 pour tout $A \in \mathcal{A}$.

$$\begin{tikzcd} A \\ B \arrow[u, "f"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} MA \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "Mf"'] & NA \arrow[d, "Nf"] \\ MB \arrow[r, "\alpha_B"'] & NB \end{tikzcd}$$

On peut équiper cette catégorie $G\,\mathcal{A}$ d'un shift $M \longmapsto M[1]$, défini comme suit, pour $A \in \mathcal{A}$, $a \in \mathcal{A}(B,A)^p$, $m \in (MA)^q$:

$$(M[1]A)^p := (MA)^{p+1}$$
$$(M[1]a)(m) := (-1)^{pq}(Ma)(m)$$

Si $a : B \longrightarrow A$, alors $Ma : MA \longrightarrow MB$, donc $Ma(m)$ est bien défini. On note $M[n]$ le shift itéré n fois :

$$(M[n]A)^p := (MA)^{p+n}$$
$$(M[n]a)(m) := (-1)^{npq}(Ma)(m)$$

Définition 72 (Catégorie $\mathrm{Gra}(\mathcal{A})$)

Si $\mathcal{A}$ est une catégorie graduée, on définit la catégorie $\mathrm{Gra}(\mathcal{A})$ par :
- Objets : $\mathcal{A}$-modules gradués ;
- Flèches : $\mathrm{Gra}(\mathcal{A})(M,N) = \bigsqcup_p (G\,\mathcal{A})(M,N[p])$
- Composition : si $\alpha : M \longrightarrow N[q]$ et $\beta : L \longrightarrow M[p]$, alors leur composée est définie par $\alpha[p] \circ \beta$.

4.1.2 Catégories graduées différentielles (DG-catégories)

On obtient une catégorie graduée différentielle (ou DG-catégorie, de l'anglais Differential Graded Category) à partir d'une catégorie graduée en rajoutant à celle-ci une différentielle. Précisément :

Définition 73 (DG-catégorie)

Une **DG-catégorie** $\mathcal{A}$ est une catégorie graduée dont les espaces de morphismes sont équipés de différentielles, c'est à dire d'applications homogènes de degré 1

$$d^i : \mathcal{A}(A,B)^i \longrightarrow \mathcal{A}(A,B)^{i+1},$$

telles que $d^{i+1} \circ d^i = 0$ (abrégé souvent en $d^2 = 0$) et vérifiant, pour $f \in \mathcal{A}(B,C)^i$ et $G \in \mathcal{A}(A,B)$,

$$d(fg) = (df)g + (-1)^i f(dg).$$

Dans [T], on trouve une définition qui se suffit à elle-même, qui est la suivante :
Une **DG-catégorie** $\mathcal{A}$ sur R consiste en :
- Un ensemble d'objets $Ob(\mathcal{A})$;
- Pour tous objets A, B de $\mathcal{A}$, un complexe (objet gradué différentiel) $\mathcal{A}(A,B)$;
- Pour tous objets A, B, C, une loi de composition $\mu_{A,B,C} : \mathcal{A}(A,B) \otimes \mathcal{A}(B,C) \longrightarrow \mathcal{A}(A,C)$;
- Pour tout objet $A \in \mathcal{A}$, un morphisme $e_A : R \longrightarrow \mathcal{A}(A,A)$,

qui doivent faire commuter les diagrammes suivant, pour $A, B, C, D \in \mathcal{A}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(A,B)\otimes\mathcal{A}(B,C)\otimes\mathcal{A}(C,D) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mu_{B,C,D}"] \arrow[d, "\mu_{A,B,C}\otimes\mathrm{id}"'] & \mathcal{A}(A,B)\otimes\mathcal{A}(B,D) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mu_{A,B,D}"] \\
\mathcal{A}(A,C)\otimes\mathcal{A}(C,D) \arrow[r, "\mu_{A,C,D}"'] & \mathcal{A}(A,D)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(A,B)\cong R\otimes\mathcal{A}(A,B) \arrow[r, "e_A\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \mathcal{A}(A,A)\otimes\mathcal{A}(A,B) \arrow[d, "\mu_{A,A,B}"] \\
& \mathcal{A}(A,B)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(A,B)\cong R\otimes\mathcal{A}(A,B) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes e_A"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \mathcal{A}(A,B)\otimes\mathcal{A}(A,A) \arrow[d, "\mu_{A,B,B}"] \\
& \mathcal{A}(A,B)
\end{tikzcd}$$

On déduit également que $d(e_A)=0$ et que la composition interagit avec la graduation par

$$\mathcal{A}(A,B)^n\times\mathcal{A}(B,C)^m\longrightarrow\mathcal{A}(A,C)^{n+m}$$

.

Par exemple, la catégorie **Dif(R)** constituée des R-modules gradués différentiels (complexes de chaînes dans $\mathrm{Mod}(R)$), avec les espaces de morphismes $\textbf{Dif(R)}(V,W)\cong\mathrm{Modgr}(R)(V,W)$, pour (V,d) et (W,d') deux complexes de chaînes. Les éléments de degré n de $\textbf{Dif(R)}(V,W)$ sont

$$\textbf{Dif(R)}^n(V,W)=\bigsqcup_i\mathrm{Hom}_R(V^i,W^{i+n}),$$

que l'on équipe de la différentielle

$$\begin{aligned}\textbf{Dif(R)}^n(V,W)&\longrightarrow\textbf{Dif(R)}^{n+1}(V,W)\\ \left\{f^i\right\}_i&\longmapsto\left\{d'\circ f^i-(-1)^nf^{i+1}\circ d\right\}_i.\end{aligned}$$

Définition 74 (DG-foncteur)

Si $(\mathcal{A},d)$ et $(\mathcal{B},d')$ sont deux DG-catégories, un **DG-foncteur** $F:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ est un foncteur gradué qui vérifie $F(df)=d'(Ff)$ pour tout morphisme f de $\mathcal{A}$.

Rappelons qu'un **quasi-isomorphisme** entre deux modules est un morphisme dont le morphisme induit en homologie est un isomorphisme.

Un **quasi-isomorphisme fonctoriel** est un DG-foncteur $F:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ qui induit :
- une bijection $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})\longrightarrow\mathrm{Ob}(\mathcal{B})$;
- un quasi-isomorphisme $\mathcal{A}(A,B)\longrightarrow\mathcal{B}(FA,FB)$ pour tous objets A,B de $\mathcal{A}$.

Soit $\mathcal{A}$ une DG-catégorie. On définit la **catégorie d'homotopie** de $\mathcal{A}$, notée $\langle\mathcal{A}\rangle$:
- $\mathrm{Ob}(\langle\mathcal{A}\rangle)=\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$;
- $\langle\mathcal{A}\rangle(A,B):=H^0(\mathcal{A}(A,B))$ pour tous objets A,B de $\mathcal{A}$.

La composition est donnée en utilisant les morphismes naturels $H^0(\mathcal{A}(A,B))\otimes H^0(\mathcal{A}(B,C))\longrightarrow H^0(\mathcal{A}(A,B)\otimes\mathcal{A}(B,C))$, composés avec les morphismes

$$H^0(\mu_{A,B,C}):H^0(\mathcal{A}(A,B)\otimes\mathcal{A}(B,C))\longrightarrow H^0(\mathcal{A}(A,C)).$$

Définition 75

Soient $F:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ un DG-foncteur, et $A,B\in\mathcal{A}$.
- F est **quasi-pleinement fidèle** si $\mathcal{A}(A,B)\longrightarrow\mathcal{B}(FA,FB)$ est un quasi-isomorphisme ;
- F est **quasi-essentiellement surjectif** si le foncteur induit $\langle F\rangle:\langle\mathcal{A}\rangle\longrightarrow\langle\mathcal{B}\rangle$ est essentiellement surjectif ;
- F est une **quasi-équivalence** s'il est quasi-pleinement fidèle et quasi-essentiellement surjectif.

Pour $\mathcal{A}$ une DG-catégorie, un **DG-$\mathcal{A}$-module** est un DG-foncteur $M : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow \mathbf{Dif(R)}$. On note alors $\underline{M}$ le $\mathcal{A}$-module gradué sous-jacent.

Définition 76 (Catégorie **Dif($\mathcal{A}$)**)

Soit $\mathcal{A}$ une DG-catégorie. On définit la catégorie **Dif($\mathcal{A}$)** :
- Objets : DG$\mathcal{A}$-modules
- **Dif($\mathcal{A}$)**$(M, N) = (\mathrm{Gra}(\mathcal{A}))(\underline{M}, \underline{N})$, munis de la différentielle $df = d \circ f - (-1)^p f \circ d$, pour f homogène de degré p.

On peut induire un foncteur shift des modules gradués aux DG-modules en définissant la différentielle de $M[1]$ comme étant $-d[1]$, où $d : M \longrightarrow M[1]$ est la différentielle de M.

4.1.3 Catégories dérivées

On considère $\mathcal{C}$ une catégorie et S un sous-ensemble des morphismes de $\mathcal{C}$. Une **localisation de $\mathcal{C}$ respectant** S est la donnée d'une catégorie $\mathcal{C}[S^{-1}]$ et d'un foncteur $L : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}[S^{-1}]$ tels que pour toute catégorie $\mathcal{D}$, le foncteur induit par la composition avec L

$$L^* : \mathrm{Func}(\mathcal{C}[S^{-1}], \mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

est pleinement fidèle et que son image essentielle consiste en les foncteurs $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ tels que $F(s)$ soit un isomorphisme pour tout $s \in S$. (Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux catégories, $\mathrm{Func}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ désigne les foncteurs de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$). En résumé, on considère la catégorie où on a "forcé" tous les morphismes de S à être des isomorphismes.

On peut maintenant construire les catégories dérivées. Si $\mathcal{A}$ est abélienne, on note :
- $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes de chaînes d'éléments de $\mathcal{A}$;
- $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ la catégorie ayant mêmes objets que $\mathrm{Ch}(\mathcal{A})$ et pour morphismes les classes de morphismes équivalents par homotopie ;
- Q l'ensemble des quasi-isomorphismes de $\mathrm{K}(\mathcal{A})$.

Définition 77 (Catégorie dérivée)

Avec ces notations, la catégorie dérivée $D(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ est définie par

$$D(\mathcal{A}) := \mathrm{K}[Q^{-1}].$$

4.2 Obstructions

Dans ce paragraphe, on va présenter certains résultats de l'article [L3] concernant les obstructions et les liens avec les déformations. On commence par décrire certains groupoïdes de relèvements le long de foncteurs, puis on les utilise pour contrôler les déformations. On fixe les notations suivantes, pour $\mathcal{C}$ une catégorie R-linéaire (qui reprennent parfois des éléments du paragraphe 4.1) :

- $G(\mathcal{C}) := \mathrm{Func}(\mathbb{Z}, \mathcal{C})$ est la catégorie graduée associée ;
- une pré-différentielle est une flèche d graduée de degré 1 ; si elle vérifie de plus $d^2 = 0$, on parle de différentielle ;
- un (pré)complexe est un objet gradué équipé d'une (pré)différentielle ;
- pour $C, D \in G(\mathcal{C})$, on définit $\mathrm{Hom}(C, D) \in \mathrm{Modgr}(R)$ par $\mathrm{Hom}^n(C, D) := G(\mathcal{C})(C, D[n])$.
- si (C, δ_C) et (D, δ_D) sont des complexes, on fixe une différentielle δ sur $\mathrm{Hom}(C, D)$ par

$$\delta^n(f) := d_D \circ f - (-1)^n f \circ d_C;$$

- pour $f, g \in \mathrm{Hom}^n(C, D)$, une homotopie est une application $H : f \longrightarrow g$ telle que $\delta(H) = g - f$ et $H \in \mathrm{Hom}^{n-1}(C, D)$;
- $P(\mathcal{C})$ est la catégorie des pré-complexes de $\mathcal{C}$; $C(\mathcal{C})$ est la catégorie des complexes de $\mathcal{C}$.

4.2.1 Relèvements

Soient $\overline{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{C}$ deux catégories et $F : \overline{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur. Attention à la notation, elle n'a ici rien à voir avec celle introduite à la définition 51.

Définition 78

Soit $C \in \mathcal{C}$. Un **relèvement de** C **le long de** F est un couple $(\overline{C}, \gamma_C)$, où $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}$ et $\gamma_C : C \cong F(\overline{C})$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}$. On notera ce couple simplement par $\overline{C}$ ou γ_C.

Remarque. *Si F est adjoint à droite d'un foncteur $G : \mathcal{C} \longrightarrow \overline{\mathcal{C}}$, un tel relèvement peut être représenté par une flèche $G(C) \longrightarrow \overline{C}$.*

Définition 79

Soit $f : C \longrightarrow D$ un morphisme de $\mathcal{C}$ et des relèvements $\gamma_C : C \cong F(\overline{C})$ et $\gamma_D : D \cong F(\overline{D})$. Un **relèvement de** f **le long de** F (relativement à γ_C et γ_D) est une flèche $\overline{f} : \overline{C} \longrightarrow \overline{D}$ telle que $F(\overline{f}) \circ \gamma_C = \gamma_D \circ f$. L'ensemble des relèvements de f le long de F relativement à γ_C et γ_D est noté $L_F(f|\gamma_C, \gamma_D)$.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\gamma_C"] \arrow[d, "f"'] & F(\overline{C}) \arrow[d, "F(\overline{F})"] \\ D \arrow[r, "\gamma_D"'] & F(\overline{D}) \end{tikzcd}$$

Définition 80 (Groupoïde $L_F(C)$)

Soit maintenant $C \in \mathcal{C}$. On considère le groupoïde $L_F(C)$ défini par :
- Objets : relèvements de C le long de F ;
- Les flèches $(\overline{C}, \gamma_C) \longrightarrow (\overline{C}', \gamma_{C'})$ sont les éléments de $L_F(1_C|\gamma_C, \gamma_{C'})$ qui sont des isomorphismes de $\overline{\mathcal{C}}$.

Si $F : \overline{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$ est un foncteur additif entre catégories linéaires, on définit différents foncteurs induits :

$$G(F) : G(\overline{\mathcal{C}}) \longrightarrow G(\mathcal{C})$$

$$P(F) : P(\overline{\mathcal{C}}) \longrightarrow P(\mathcal{C})$$

$$C(F) : C(\overline{\mathcal{C}}) \longrightarrow C(\mathcal{C})$$

On appellera **relèvements gradués** les relèvements le long de $G(F)$ et **relèvements** ceux le long de $C(F)$. On va maintenant définir un certain nombre de groupoïdes.

Soient $(C, d_C), (D, d_D) \in P(\mathcal{C})$ deux pré-complexes, $f, g \in \mathrm{Hom}^n(C, D)$ deux flèches graduées et $H : f \longrightarrow g$ une homotopie. Un **relèvement gradué de** H **le long de** F relativement à $\overline{d_C}, \overline{d_D}, \overline{f}, \overline{g}$ est un relèvement gradué $\overline{H}$ de H qui est une homotopie $\overline{H} : \overline{f} \longrightarrow \overline{g}$.

Définition 81 (Groupoïde $L_F(H|\overline{d_C}, \overline{d_D}, \overline{f}, \overline{g})$:)

On a alors le groupoïde $L_F(H|\overline{d_C}, \overline{d_D}, \overline{f}, \overline{g})$:
- Objets : relèvements gradués de H relativement à $\overline{d_C}, \overline{d_D}, \overline{f}, \overline{g}$;
- Morphismes $\overline{H} \longrightarrow \overline{H}'$: relèvements gradués de $0 : H \longrightarrow H$ relativement à $\overline{d_C}, \overline{d_D}, \overline{H}, \overline{H}'$.

Soient $(C, d_C), (D, d_D) \in C(\mathcal{C})$ deux complexes de cochaînes et $f : (C, d_C) \longrightarrow (D, d_D)$ un morphisme de cochaînes. Pour $(\overline{C}, \overline{d_C}), (\overline{D}, \overline{d_D}) \in C(\overline{\mathcal{C}})$ des relèvements, on pose :

Définition 82 (Groupoïde $L_F(f|\overline{d_C}, \overline{d_D})$)

$L_F(f|\overline{d_C}, \overline{d_D}) := L_F(H|\overline{d_C}, \overline{d_D}, 0, 0)$, c'est à dire :
- Objets : relèvements de f le long de $C(F)$ relativement à $(\overline{C}, \overline{d_C}), (\overline{D}, \overline{d_D})$;
- Morphismes $\overline{f} \longrightarrow \overline{f}'$: relèvements gradués de $0 : f \longrightarrow f$ relativement à $\overline{d_C}, \overline{d_D}, \overline{f}, \overline{f}'$.

4.2.2 Théorie des obstructions

On considère $F : \overline{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur additif. On note $\mathrm{Ker}(F)$ la catégorie (sans identités) ayant mêmes objets que $\overline{\mathcal{C}}$ et pour morphismes $\{f \in \overline{\mathcal{C}},\ \ F(f) = 0\}$, et $\mathrm{Ker}(F)^2$ la catégorie avec mêmes objets et pour morphismes $\{h \in \overline{\mathcal{C}},\ \ h = f \circ g,\ \ f, g \in \mathrm{Ker}(F)\}$. On a clairement $\mathrm{Ker}(F)^2 \subset \mathrm{Ker}(F)$.
On suppose à partir d'ici que F est plein et que $\mathrm{Ker}(F)^2 = 0$.

Proposition 83 ([L3])

Soient $C, D \in \mathcal{C}$ et $f : C \longrightarrow D$, $g : D \longrightarrow C$ tels que g et f soient deux isomorphismes inverses l'un de l'autre. Soient $\overline{C}$ et $\overline{D}$ des relèvement de C et D le long de F. Alors pour relèvement $\overline{f} : \overline{C} \longrightarrow \overline{D}$ de f, il existe un relèvement $\overline{g}$ de g qui soit inverse de $\overline{f}$. On a alors en particulier $\overline{C} \cong \overline{D}$.

On ne considère maintenant que des relèvements le long de F.

Soient maintenant (C, d_C) et (D, d_D) deux pré-complexes de $\mathcal{C}$ et des relèvements gradués $\overline{C}$ et $\overline{\mathcal{D}}$. Comme F est supposé plein, $G(F)$ l'est également. Ainsi, la flèche

$$\big(\mathrm{Hom}(\overline{C}, \overline{D}), \overline{\delta}\big) \longrightarrow (\mathrm{Hom}(C, D), \delta)$$

est surjective. (Rappel : $\delta^n(f) := d_D \circ f - (-1)^n f \circ d_C$.) On complète ceci en une suite exacte courte en prenant le noyau de cette flèche surjective, qui est un pré-complexe de $\overline{C}$ noté $(\mathfrak{C}, \overline{\delta})$.

$$0 \longrightarrow (\mathfrak{C}, \overline{\delta}) \longrightarrow \big(\mathrm{Hom}(\overline{C}, \overline{D}), \overline{\delta}\big) \longrightarrow (\mathrm{Hom}(C, D), \delta) \longrightarrow 0.$$

Proposition 84

$(\mathfrak{C}, \overline{\delta})$ est un complexe de cochaînes indépendant du choix des relèvements $\overline{d_C}$ et $\overline{d_D}$.

Preuve : Il s'agit dans un premier temps de montrer que $\delta^2 = 0$. Soit $f \in \mathrm{Hom}^n(\overline{C}, \overline{D})$.

$$\begin{aligned}
\overline{\delta}^{n+1} \circ \overline{\delta}^n(f) &= \overline{\delta}^{n+1}(\overline{d_D} \circ f - (-1)^n f \circ \overline{d_C}) \\
&= \overline{d_D}^2 \circ f - (-1)^{n+1}\overline{d_D} \circ f \circ \overline{d_C} - (-1)^n \overline{d_D} \circ f \circ \overline{d_C} + (-1)^n(-1)^{n+1} f \circ \overline{d_C}^2 \\
&= \overline{d_D}^2 \circ f - f \circ \overline{d_C}^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

En effet, $f, \overline{d_C}, \overline{d_D} \in \mathrm{Ker}(G(F))$ par définition. Comme $\mathrm{Ker}(G(F))^2 = 0$, on déduit que $\overline{d_D}^2 \circ f - f \circ \overline{d_C}^2 = 0$. Ainsi, $\overline{\delta}$ est bien une différentielle.

Soient maintenant $\overline{d_C}'$ et $\overline{d_D}'$ deux autres relèvements gradués de d_C et d_D. On a donc

$$G(F)(\overline{d_C}' - \overline{d_C}) = G(F)(\overline{d_C}') - G(F)(\overline{d_C}) = d_C - d_C = 0.$$

On obtient donc en posant $\partial_C := \overline{d_C}' - \overline{d_C}$ que $\overline{d_C}' = \overline{d_C} + \partial_C$, avec $\partial_C \in \mathrm{Ker}(G(F))$. De même, il existe $\partial_D \in \mathrm{Ker}(G(F))$ tel que $\overline{d_D}' = \overline{d_D} + \partial_D$. Si maintenant $f \in \mathfrak{C}$, on a

$$\delta_{\overline{d_C}', \overline{d_D}'}(f) = \delta_{\overline{d_C}, \overline{d_D}}(f) + \partial_D \circ f - (-1)^n f \circ \partial_C.$$

Or, f, ∂_C et ∂_D sont dans $\mathrm{Ker}(F)$, donc $\partial_D \circ f - (-1)^n f \circ \partial_C = 0$ puisque $\mathrm{Ker}(F)^2 = 0$. On a donc bien

$$\delta_{\overline{d_C}', \overline{d_D}'} = \delta_{\overline{d_C}, \overline{d_D}}.$$

$\square$

Définition 85 (Squelette d'une catégorie)

Une catégorie est dite **squelettique** si chaque objet est seul dans sa classe d'isomorphie. Le **squelette** $\mathrm{Sk}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ est l'unique catégorie squelettique équivalente à $\mathcal{C}$. C'est donc la classe de toutes les classes d'isomorphie d'objets de $\mathcal{C}$.

On va maintenant énoncer et démontrer un théorème d'obstructions aux relèvements. Soient $\mathcal{C}$ et $\overline{\mathcal{C}}$ deux catégories et $F : \overline{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$ comme avant. On considère :

- (C, d_C) et $(D, d_D) \in P(\mathcal{C})$ deux pré-complexes ;
- $f, g \in \mathrm{Hom}^n(C, D)$ deux flèches graduées ;
- $h : f \longrightarrow g$ une homotopie.

On prend $(\overline{C}, \overline{d_C})$ et $(\overline{D}, \overline{d_D})$ deux relèvements de C et D le long de $P(F)$ et on munit $\mathrm{Hom}(\overline{C}, \overline{D})$ de $\overline{\delta}$ comme à la proposition 84. On obtient alors un complexe $\mathfrak{C} = (\mathfrak{C}, \overline{\delta})$.

Théorème 86

Supposons qu'il existe $\overline{f}, \overline{g}, \overline{h}$ des relèvements gradués de f, g, h tels que $\overline{\delta}(\overline{f}) = \overline{\delta}(\overline{g})$. On note $L(h) := L(h|\overline{d_C}, \overline{d_D}, \overline{f}, \overline{g})$. Alors :

(1) Il existe une obstruction $o_n(h) = o_n(h|\overline{d_C}, \overline{d_D}, \overline{f}, \overline{g}) := [\overline{g} - \overline{f} - \overline{\delta}(\overline{h})] \in H^n(\mathfrak{C})$ telle que

$$o_n(h) = 0 \Longleftrightarrow L(h) \neq \emptyset.$$

(2) Si $o_n(h) = 0$, la flèche

$$\begin{aligned} v_{n-1} : L(h)^2 &\longrightarrow H^{n-1}(\mathfrak{C}) \\ (\overline{h}, \overline{h}') &\longmapsto [\overline{h}' - \overline{h}] \end{aligned}$$

vérifie $v_{n-1}(\overline{h}, \overline{h}') = 0 \Longleftrightarrow [\overline{h}] = [\overline{h}'] \in \mathrm{Sk}(L(h))$ et induit une structure $H^{n-1}(\mathfrak{C})$-affine sur $\mathrm{Sk}(L(h))$.

Preuve : Comme ce sont des relèvements, on peut supposer $F(\overline{C}) = C$ et $F(\overline{D}) = D$.

(1)

- $F(\overline{g} - \overline{f} - \overline{\delta}(\overline{h})) = g - f - \delta(h) = 0$ car $\delta(h) = g - f$. Ainsi, $\overline{g} - \overline{f} - \overline{\delta}(\overline{h}) \in \mathrm{Ker}(F)$.
- $\overline{\delta}(\overline{g} - \overline{f} - \overline{\delta}(\overline{h})) = \overline{\delta}(\overline{g}) - \overline{\delta}(\overline{f}) - \overline{\delta}^2(\overline{h}) = \overline{\delta}(\overline{g}) - \overline{\delta}(\overline{f}) = 0$ par hypothèse.

Ces deux points montrent donc que $\overline{g} - \overline{f} - \overline{\delta}(\overline{h}) \in Z^n(\mathfrak{C})$. Puis :

$$\begin{aligned} L(h) \neq \emptyset &\Longleftrightarrow \exists \gamma \in \mathfrak{C}^{n-1} \text{ tel que } \overline{h} + \gamma \text{ soit une homotpie } \overline{f} \longrightarrow \overline{g} \\ &\Longleftrightarrow \overline{\delta}(\overline{h} + \gamma) = \overline{f} - \overline{g} \\ &\Longleftrightarrow \overline{\delta}(\gamma) = \overline{f} - \overline{g} - \overline{\delta}(\overline{h}) \\ &\Longleftrightarrow \overline{f} - \overline{g} - \overline{\delta}(\overline{h}) \in \mathrm{Im}(\overline{\delta}) \\ &\Longleftrightarrow [\overline{f} - \overline{g} - \overline{\delta}(\overline{h})] = 0 \\ &\Longleftrightarrow o_n(h) = 0. \end{aligned}$$

(2) Supposons que $o_n(h) = 0$. on a alors $[\overline{f} - \overline{g} - \overline{\delta}(\overline{h})] = 0$ et donc $\overline{f} - \overline{g} - \overline{\delta}(\overline{h}) \in \mathrm{Im}(\overline{\delta})$. Puisque $o_n(h) = 0$, il existe des relèvements de h par le point précédent. On peut donc considérer l'application v_{n-1} du théorème. Rappelons que

$\overline{0} : \overline{h} \longrightarrow \overline{h}'$ est une homotopie $\iff 0 = \overline{\delta}(\overline{0}) = \overline{h}' - \overline{h}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
[\overline{h}] = [\overline{h}'] \in \mathrm{Sk}(L(h)) &\iff \overline{h}' - \overline{h} = 0 \\
&\iff \overline{0} : \overline{h} \longrightarrow \overline{h}' \text{ est une homotopie} \\
&\iff L(0|\overline{d_C}, \overline{d_D}, \overline{h}, \overline{h}') \neq \emptyset \\
&\iff o_{n-1}(0) = 0 \\
&\iff [\overline{h}' - \overline{h}] = 0 \\
&\iff v_{n-1}(\overline{h}, \overline{h}') = 0.
\end{aligned}$$

Pour trouver une structure affine sur $\mathrm{Sk}(L(h))$, il faut l'équiper d'une action par translation du groupe $(H^{n-1}\mathfrak{C}, +)$ libre et transitive. L'application

$$\begin{aligned}
a_{n-1} : L(h) \times Z^{n-1}\mathfrak{C} &\longrightarrow L(h) \\
(\overline{h}, \gamma) &\longmapsto \overline{h} + \gamma
\end{aligned}$$

est bien définie et induit une action

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{n-1} : \mathrm{Sk}(L(h)) \times H^{n-1}\mathfrak{C} &\longrightarrow \mathrm{Sk}(L(h)) \\
(\overline{h}, \gamma) &\longmapsto \overline{h} + \gamma
\end{aligned}$$

qui convient. □

On peut prouver un peu de la même manière un théorème similaire pour les différentielles :

Théorème 87 ([L3])

Soit (C, d) un complexe de cochaînes et $\overline{C}$ un relèvement. On pose $\mathfrak{C} = (\mathfrak{C}, \overline{\delta}_{d,d})$ et $L(d) = L(d|\overline{C})$.

(1) Il existe une obstruction $o(d) := o(d|\overline{C}) := [\overline{d}^2] \in H^2\mathfrak{C}$ telle que

$$o(d) = 0 \iff L(d) \neq \emptyset.$$

(2) Si $o(d) = 0$, on a une flèche

$$\begin{aligned}
v : L(d)^2 &\longrightarrow H^1\mathfrak{C} \\
(\overline{d}, \overline{d}') &\longmapsto [\overline{d}' - \overline{d}]
\end{aligned}$$

qui satisfait de plus

$$v(\overline{d}, \overline{d}') = 0 \iff [\overline{d}] = [\overline{d}'] \in \mathrm{Sk}(L(d))$$

et qui induit une structure $H^1\mathfrak{C}$-affine sur $\mathrm{Sk}(L(d))$.

On a aussi une théorème pour le catégories d'homotopie (cf. 4.1.2). Soit $F : \overline{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur additif, plein, essentiellement surjectif et tel que $\mathrm{Ker}(F)^2 = 0$. Le foncteur F induit $\langle F \rangle : \langle \overline{\mathcal{C}} \rangle \longrightarrow \langle \mathcal{C} \rangle$ entre les catégories d'homotopie.

Théorème 88 ([L3])

Soit (C, d) un complexe de cochaînes de $\langle \overline{\mathcal{C}} \rangle$ et $\overline{C}$ un relèvement. On pose $\mathfrak{C} = (\mathfrak{C}, \overline{\delta}_{d,d})$.

(1) Il existe une obstruction $o(C, d) \in H^2\mathfrak{C}$ telle que

$$o(C, d) = 0 \iff L_{\langle F \rangle}(C, d) \neq \emptyset.$$

(2) Si $o(C, d) = 0$, $\mathrm{Sk}(L_{\langle F \rangle}(C, d))$ est affine sur $H^1\mathfrak{C}$.

4.2.3 Application aux déformations linéaires

On va montrer qu'il est possible d'appliquer ces résultats aux déformations linéaires. Soient

$$\begin{aligned} \varphi &: \bar{R} \longrightarrow R \\ \psi &: R \longrightarrow S = R_0 \end{aligned}$$

des morphismes d'anneaux surjectifs entre anneaux commutatifs cohérents. On note $J = \mathrm{Ker}(\varphi)$ et $I = \mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi)$. On suppose que $IJ = 0$. Comme $J \subset I$, on a déjà $J^2 = 0$. On a deux suites exactes courtes :

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow \bar{R} \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \bar{R} \longrightarrow S \longrightarrow 0.$$

Ainsi, $R \cong \bar{R}/J$ et $S \cong \bar{R}/I$. Comme J est un $\bar{R}$-module, on a une application

$$\begin{aligned} \sigma : \bar{R} &\longrightarrow \mathrm{Aut}(J) \\ r &\longmapsto (\sigma_r : x \longmapsto rx) \end{aligned}$$

Soit $a \in I$. Alors $\sigma_a(x) = ax = 0$ car $IJ = 0$. Ainsi $I \subset \mathrm{Ker}(\sigma)$ et on peut appliquer la propriété universelle des quotients :

$$\begin{tikzcd} \bar{R} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & \mathrm{Aut}(J) \\ \bar{R}/I \arrow[ur, dashed, "\exists \sigma'"'] & \end{tikzcd}$$

Ainsi, on munit J d'une structure de S-module.

Soient maintenant $\mathcal{C}_0$ une catégorie S-linéaire plate, $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_0$ une R-déformation linéaire plate de $\mathcal{C}_0$ et $F : \overline{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$ une $\bar{R}$-déformation linéaire plate de $\mathcal{C}$. On a en particulier des équivalences $S \otimes_R \mathcal{C} \cong \mathcal{C}_0$ et $R \otimes_{\bar{R}} \overline{\mathcal{C}} \cong \mathcal{C}$. Montrons que $\mathrm{Ker}(F)^2 = 0$.
Par hypothèse, la suite $0 \longrightarrow J \longrightarrow \bar{R} \longrightarrow R \longrightarrow 0$ est exacte. Comme $\overline{\mathcal{C}}$ est une $\bar{R}$-catégorie plate, le foncteur $- \otimes_{\bar{R}} \overline{\mathcal{C}}(\overline{c}, \overline{d})$ est exact pour tous $\overline{c}, \overline{d} \in \overline{\mathcal{C}}$. En l'appliquant à cette suite exacte, on obtient une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow J \otimes_{\bar{R}} \overline{\mathcal{C}}(\overline{c}, \overline{d}) \longrightarrow \bar{R} \otimes_{\bar{R}} \overline{\mathcal{C}}(\overline{c}, \overline{d}) \longrightarrow R \otimes_{\bar{R}} \overline{\mathcal{C}}(\overline{c}, \overline{d}) \longrightarrow 0,$$

Or, $R \otimes_{\bar{R}} \overline{\mathcal{C}}(\overline{c}, \overline{d}) = (R \otimes_{\bar{R}} \overline{\mathcal{C}})(\overline{c}, \overline{d}) \cong \mathcal{C}(F\overline{c}, F\overline{d})$. On a donc finalement une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow J \otimes_{\bar{R}} \overline{\mathcal{C}}(\overline{c}, \overline{d}) \longrightarrow \overline{\mathcal{C}}(\overline{c}, \overline{d}) \longrightarrow \mathcal{C}(F\overline{c}, F\overline{d}) \longrightarrow 0.$$

On note $F_{\overline{c},\overline{d}} : \overline{\mathcal{C}}(\overline{c}, \overline{d}) \longrightarrow \mathcal{C}(F\overline{c}, F\overline{d})$ l'application induite par le foncteur F. On a donc

$$J \otimes_{\bar{R}} \overline{\mathcal{C}}(\overline{c}, \overline{d}) \cong \mathrm{Ker}(F_{\overline{c},\overline{d}}).$$

Comme $J^2 = 0$, on déduit que $\mathrm{Ker}(F)^2 = 0$. On peut donc appliquer les résultats de la partie 4.2.2 à ces déformations linéaires.

Proposition 89

Soient $(C, d_C), (D, d_D)$ deux complexes de $\mathcal{C}$ et $\overline{\mathcal{C}}, \overline{\mathcal{D}}$ deux relèvements le long de F. Alors le complexe $\mathfrak{C}$ défini au paragraphe 4.2.2 est donné par

$$\mathfrak{C} = J \otimes_S \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_0}(C_0, D_0),$$

équipé de la différentielle donnée par celles sur C_0 et D_0.

Preuve : On a deux suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \mathfrak{C} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(\overline{C}, \overline{D}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow \bar{R} \longrightarrow R \longrightarrow 0.$$

Comme $\overline{\mathcal{C}}$ est une catégorie $\bar{R}$-linéaire plate, le foncteur $- \otimes_{\bar{R}} \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(\overline{C}, \overline{D})$ est exact. Ainsi, on obtient comme précédemment une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow J \otimes_{\bar{R}} \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(\overline{C}, \overline{D}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(\overline{C}, \overline{D}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D) \longrightarrow 0.$$

Ainsi, on a

$$\mathfrak{C} \cong J \otimes_{\bar{R}} \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(\overline{C}, \overline{D}) \cong J \otimes_S \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_0}(C_0, D_0),$$

le deuxième isomorphisme étant vrai par changement d'anneaux. □

On peut donc adapter tous les résultats de la partie 4.2.2 avec ce complexe.

4.3 Contrôle des déformations par la cohomologie

4.3.1 Cohomologie de Hochschild des catégories abéliennes

Dans ce paragraphe, on va décrire la cohomologie de Hochschild adaptée aux catégories abéliennes. Dans la suite, R désigne un anneau commutatif cohérent. Les produits tensoriels sont sur R.

Définition 90 (DG-catégorie cofibrante)

- Un complexe M est dit **cofibrant** si ses termes sont projectifs et que les foncteurs $\mathrm{Hom}(M, -)$ et $M \otimes -$ préservent les complexes acycliques.
- Une DG-catégorie est dite **R-cofibrante** si tous ses Hom-sets sont des complexes cofibrants.

Soit maintenant $\mathcal{A}$ une petite DG-catégorie R-cofibrante, et $M \in \mathbf{Dif}(\mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{A})$ (voir définition 76). On définit un complexe double $D(\mathcal{A}, M)$, dont la p-ème colonne est donnée pour $a_i \in \mathcal{A}$ par :

$$\prod_{a_0, \dots, a_p} \mathrm{Hom}_R \left\{ \mathcal{A}(a_{p-1}, a_p) \otimes \mathcal{A}(a_{p-2}, a_{p-1}) \otimes \dots \otimes \mathcal{A}(a_0, a_1), M(a_0, a_p) \right\},$$

muni de la différentielle de Hochschild usuelle horizontale. Le complexe de Hochschild de $\mathcal{A}$, noté $C(\mathcal{A}, M)$ est alors défini comme le complexe produit total de $D(\mathcal{A}, M)$. On note $C(\mathcal{A}) := C(\mathcal{A}, \mathcal{A})$.

Voici un dessin des premiers termes du complexe double :

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{a_0} M(a_0,a_0)^0 \arrow[r] \arrow[d] & \prod\limits_{a_0,a_1} \mathrm{Hom}_R\left(\mathcal{A}(a_0,a_1), M(a_0,a_1)\right)^0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dash, dashed, "n=1"'] & \prod\limits_{a_0,a_1,a_2} \mathrm{Hom}_R\left(\mathcal{A}(a_2,a_1)\,\mathcal{A}(a_0,a_1), M(a_0,a_2)\right)^0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dash, dashed, "n=2"'] & \dots \arrow[dl, dash, dashed, "n=3"'] \\
\prod\limits_{a_0} M(a_0,a_0)^1 \arrow[r] \arrow[d] & \prod\limits_{a_0,a_1} \mathrm{Hom}_R\left(\mathcal{A}(a_0,a_1), M(a_0,a_1)\right)^1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dash, dashed, "n=2"'] & \prod\limits_{a_0,a_1,a_2} \mathrm{Hom}_R\left(\mathcal{A}(a_2,a_1)\,\mathcal{A}(a_0,a_1), M(a_0,a_2)\right)^1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dash, dashed, "n=3"'] & \dots \arrow[dl, dash, dashed, "n=4"'] \\
\prod\limits_{a_0} M(a_0,a_0)^2 \arrow[r] \arrow[d] & \prod\limits_{a_0,a_1} \mathrm{Hom}_R\left(\mathcal{A}(a_0,a_1), M(a_0,a_1)\right)^2 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dash, dashed, "n=3"'] & \prod\limits_{a_0,a_1,a_2} \mathrm{Hom}_R\left(\mathcal{A}(a_2,a_1)\,\mathcal{A}(a_0,a_1), M(a_0,a_2)\right)^2 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dash, dashed, "n=4"'] & \dots \\
\dots & \dots & \dots &
\end{tikzcd}$$

Pour $\mathcal{C}$ une petite DG-catégorie, il existe un quasi-isomorphisme $\overline{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$ surjectif sur les Hom-sets, tel que $\overline{\mathcal{C}}$ est R-cofibrante. On appelle ceci une **résolution R-cofibrante de** $\mathcal{A}$. On pourra consulter [LVB2] et [D] pour plus de détails à ce sujet.

Si une DG-catégorie $\mathcal{A}$ n'est pas cofibrante, il faut adapter la définition de la cohomologie ci-dessus. Soit $M \in$ **Dif**$(\mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{A})$. On prend une résolution R-cofibrante $\overline{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{A}$ et on considère le complexe de Shukla (voir [Sh]) :

$$C_{sh}(\mathcal{A}, M) := C(\overline{\mathcal{A}}, M); \quad C_{sh}(\mathcal{A}) := C_{sh}(\mathcal{A}, \mathcal{A}).$$

On peut montrer que $C_{sh}(\mathcal{A}, M)$ est indépendant du choix de la résolution cofibrante.

Soient maintenant $\mathcal{A}$ une catégorie R-linéaire abélienne, essentiellement petite, $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}(\mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{A})$ et $M \in$ **Dif**$(\mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{A})$. On pose $\mathfrak{i} := \mathrm{Inj}(\mathrm{Ind}(\mathcal{A}))$. On définit la **cohomologie de Hochschild de la catégorie abélienne** $\mathcal{A}$ par :

$$C_{ab}(\mathcal{A}, M) := C_{sh}(\mathfrak{i}, M); \quad C_{ab}(\mathcal{A}) := C_{ab}(\mathcal{A}, \mathcal{A}).$$

Ainsi, la cohomologie de Hochschild d'une catégories abéliennes se ramène par cette définition à la cohomologie d'une DG-catégorie adaptée.

4.3.2 Un théorème de contrôle

On reprend certaines notations de la partie 3.3. On note Rng^0 la catégorie des anneaux cohérents commutatifs avec pour flèches les morphismes d'anneaux surjectifs ayant un noyau nilpotent de type fini. Soit $\theta : R \longrightarrow S$ un tel morphisme.

Soit $\mathcal{D}$ une catégorie abélienne S-linéaire. On considère une déformation abélienne plate $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ de $\mathcal{D}$. On a donc $\mathcal{D} \cong \mathcal{C}_S$. On note à nouveau $\mathrm{Def}_{\mathcal{D}}(R)$ le groupoïde ayant pour objets les R-déformations plates de $\mathcal{D}$ et pour morphismes les équivalences de déformations (à isomorphismes naturels près). On a donc un (pseudo) foncteur

$$\mathrm{Def}_{\mathcal{D}} : \mathrm{Rng}^0/S \longrightarrow \mathrm{Gd}.$$

Le théorème suivant donne une contrôle des déformations relativement à ce foncteur :

Théorème 91 ([LVB2])

Soit $\sigma : R' \longrightarrow R$ une flèche de Rng^0/S. On note $J = \mathrm{Ker}(\sigma), I = \mathrm{Ker}(\theta \circ \sigma)$ et on suppose que $IJ = 0$. Soit $\mathcal{C} \in \mathrm{Def}_{\mathcal{D}}(R)$. Si $\mathrm{Def}_{\mathcal{D}}(\sigma)^{-1}(\mathcal{C})$ est le groupoïde dont les objets sont les R$'$-déformations plates de $\mathcal{C}$, alors :

(1) Il existe une obstruction $o(\mathcal{C}) \in HC^3_{ab}(\mathcal{D}, J \otimes_S \mathcal{D})$ telle que

$$o(\mathcal{C}) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Ob}(\mathrm{Def}_{\mathcal{D}}(\sigma)^{-1}(\mathcal{C})) \neq \emptyset.$$

(2) Si $o(\mathcal{C}) = 0$, alors $\mathrm{Sk}\left(\mathrm{Def}_{\mathcal{D}}(\sigma)^{-1}(\mathcal{C})\right)$ est un espace affine sur $HC_{ab}(\mathcal{D}, J \otimes_S \mathcal{D})$.

Ce théorème donne l'existence d'une obstruction permettant de contrôler la déformation, mais n'en donne pas d'expression concrète, ce qui est quelque peu frustrant. On remarque pourtant des similitudes avec le théorème 39, telles que l'intervention du troisième groupe de cohomologie. Une esquisse de preuve très elliptique est donnée dans [LVB2], et utilise un résultat marginal de [LVB1] qui ne figure pas dans ce mémoire. L'esquisse donnée est valable sur des corps, ce qui reste toutefois assez large dans le contexte des déformations.

Conclusion

Ce travail a permis d'explorer quelques pistes de la théorie des déformations de catégories abéliennes et de comprendre comment adapter certains résultats de Gerstenhaber à ce nouveau contexte. On a vu que la définition reste assez proche de celle concernant les algèbres, bien qu'un travail préparatoire important a été nécessaire. De même, on retrouve certains résultats de contrôle par la cohomologie de Hochschild, même si ces derniers sont moins précis qu'espéré.

Une étude plus poussée de la cohomologie semble donc nécessaire pour parvenir à une compréhension plus exhaustive de ces déformations. Notamment, il serait intéressant de mettre en place des méthodes efficaces de calcul de cohomologie de DG-catégories afin de pouvoir traiter concrètement des exemples. Des pistes sont largement traitées dans [LVB2], mais exploitent des notions qui dépassent assez largement le cadre et le niveau de ce mémoire.

Un autre aspect du travail de Van den Bergh et Lowen qui n'a pas du tout été discuté ici est la notion de catégorie de Grothendieck et ses liens avec les déformations. Ceci constitue une large partie de l'article [LVB1]. Il a cependant fallu faire des choix afin de pouvoir traiter l'essentiel de la théorie en un volume raisonnable, et cette spécialisation aux catégories de Grothendieck, bien que de grande importance, m'a semblé inadaptée dans ce mémoire.

Une dernière idée qui peut être développée est une adaptation de la notion de **déformation formelle** : que peut-on dire en prenant par exemple $S = \mathbb{K}$ un corps et $R = \mathbb{K}[[t]]$? Peut-on trouver des expressions très concrètes sous formes de séries entières ? Cet aspect a été discuté dans la thèse de Floris Něcas-Niessner *Infinitesimal Deformation Theory of Algebraic Structures* dirigée par Ieke Moerdijk à l'Université de Utrecht (2010). On y trouve des résultats intéressants sur la question, mais malheureusement encore une fois peu d'exemples. Il met aussi en place une théorie de déformation des foncteurs et des transformations naturelles, aspect totalement absent des articles de Lowen et Van den Bergh. Une piste possible de suite à ce mémoire serait de se plonger dans les travaux de Něcas-Niessner, que j'ai découvert beaucoup trop tard, afin d'étendre les déformations à ces objets catégoriques classiques.

Références

[A] Dhyan Aranha, *On Hochschild cohomology, Koszul Duality and DG Categories*, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der Rheinischen Friedrich Wilhelms Universität Bonn, 2015.

[B1] Francis Borceux, *Handbook of Categorical Algebra I*, Encyclopedia of Mathematics, Cambridge University Press, 1994.

[B2] Francis Borceux, *Handbook of Categorical Algebra II*, Encyclopedia of Mathematics, Cambridge University Press, 1994.

[F] Peter Freyd, *Abelian Categories, an Introduction to the Theory of Fonctors*, Harper International edition, 1964.

[FS] Alice Fialowski, , Martin Schlichenmaier, *Global Geometric Deformations of Current Algebras as Krichever-Novikov Type Algebras*, Communications in Mathematical Physics, Vol.260, Springer Science and Business Media LLC, Sep.2005.

[D] Vladimir. Drinfeld, *DG quotients of DG categories*, J. Algebra 272 (2), 2004, 643-691.

[G] Murray Gerstenhaber, *On the deformations of rings and algebras*, Annals of Mathematics, Vol.79, January 1964.

[K] G.Max Kelly, *Basic Concepts of Enriched Category Theory*, London Mathematical Society Lecture Notes Series, Cambridge University Press, 1982.

[KB] Berhard Keller, *Deriving DG-categories*, Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 4ème série, T.27, p.63-102, 1994.

[LES] Olav Arnfinn Laudal, EIvind Eriksen, Arvid Siqueland, *Non-commutative deformation theory*, Chapman and Hall, CRC Monographs and Research Notes in Mathematics, 2017.

[LVB1] Wendy Lowen et Michel Van Den Bergh, *Deformation Theory of Abelian Categories*, Transactions of the American Mathematical Society, Volume 358, Number 12, December 2006, pages 5441-5483, S-0002-9947(06)03871-2.

[LVB2] Wendy Lowen et Michel Van Den Bergh, *Hochschild cohomology of abelian categories and ringed spaces*, Advances in Mathematics 198 (2005) 172 – 221, Elsevier.

[L3] Wendy Lowen, *Obstruction theory for objects in abelian and derived categories*, Communications in Algebra, 33.10.1081/AGB-200066155.

[McL] Saunders MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, 1971.

[NN] Floris Něcas-Niessner, *Infinitesimal Deformation Theory of Algebraic Structures*, Master Thesis, Universiteit Utrecht, 2010.

[R] Emily Riehl, *Category Theory in Context*, Cambridge University Press, 2014.

[RJ1] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Second Edition, Springer Science+Business Media, 2009.

[RJ2] Joseph J. Rotman, *Advanced Mordern Algebra*, First Edition, Second Printing, Prentice Hall, 2003.

[Sh] Umeshachandra Shukla, *Cohomologie des algèbres associatives*, Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 78 (3), 1961, 163-209.

[T] Bertrand Toën, *Lectures on dg-categories*, Topics in Algebraic and Topological K-Theory,Springer Berlin Heidelberg, pp.243-301, 2011, Lecture Notes in Mathematics 2008, 78-3-642-15707-3.10.1007/978-3-642-15708-0.

[W] Charles A. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, 1994.