La Formule de Weyl

Mémoire de M1 Mathématiques Fondamentales

Quentin EHRET

Sous la direction de Yohann LE FLOCH

18 juin 2018

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Hermann Weyl (1885-1955)

source : Wikipedia

Le laplacien

- Le laplacien est un opérateur différentiel, noté Δ, qui agit sur une fonction u de plusieurs variables $x_1, x_2, ...x_n$, de classe C^2, de la manière suivante :

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_j},$$

où $\frac{\partial^2}{\partial^2 x_j}$ désigne la dérivée seconde par rapport à la variable x_j.

- Dans le cas $n = 2$ qui va nous intéresser, on a

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}(x,y).$$

Conditions de bord

- On dit qu'un fonction u définie sur Ω est soumise à la condition de Dirichlet au bord de Ω si u est identiquement nulle sur le bord : $u_{|\partial\Omega} = 0$.

- Soit η un vecteur normal au bord $\partial\Omega$. On dit qu'un fonction u définie et de classe C^1 sur Ω est soumise à la condition de Neumann au bord de Ω si sa dérivée par rapport à η est identiquement nulle sur le bord : $\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{|\partial\Omega} = 0$.

Equation

L'équation aux dérivées partielles qui nous intéresse est, pour $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur Ω et $\lambda \in \mathbb{R}$ à priori :

$$-\Delta u = \lambda u. \tag{1}$$

On associe à cette équation sur Ω une condition de bord qui sera une de celles présentées au dessus : *Dirichlet* ou *Neumann*.

Les scalaires λ qui vérifient cette équation sont appelés *valeurs propres*.

Les fonctions $u \neq 0$ associées sont appelées *vecteurs propres*.

$-\Delta$ possède une suite *infinie* de valeurs propres qui vérifie :

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n \leq ...$$

Première formule de Green
Soient u et v deux fonctions de (x, y) définies et de classe C^2 sur Ω. Alors :

$$\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial\eta}dS = \iint_{\Omega} \nabla v.\nabla u \, dxdy + \iint_{\Omega} v\Delta u \, dxdy.$$

Deuxième formule de Green
Soient u et v deux fonctions de (x, y) définies et de classe C^2 sur Ω. Alors :

$$\iint_{\Omega}(u\Delta v - v\Delta u)dxdy = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\eta} - v\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)dS.$$

Théorème : Formule de Weyl

Soit Ω un domaine plan borné de $\mathbb{R}^2$, d'aire $\mathcal{A}(\Omega)$, et $n \in \mathbb{N}$. On note λ_n les valeurs propres de $-\Delta$ sur Ω avec les conditions au bord de Dirichlet ou de Neumann.

Alors :

$$\frac{\lambda_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{4\pi}{\mathcal{A}(\Omega)}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $N(\lambda)$ le nombre de valeurs propres inférieures ou égales à λ. Alors le théorème se reformule de la manière suivante :

$$\frac{N(\lambda)}{\lambda} \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathcal{A}(\Omega)}{4\pi}.$$

Valeurs propres et vecteurs propres sur le rectangle avec les conditions de Dirichlet

Sur un rectangle $R = [0, a] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$, avec aux bords les conditions de Dirichlet $u_{|\delta R} = 0$, les valeurs propres du laplacien sont données par :

$$\lambda = \pi^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)$$

et les vecteurs propres associés sont :

$$u(x, y) = \sin\left(\frac{l\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right)$$

pour l, m entiers naturels strictement positifs.

Valeurs propres et vecteurs propres sur le rectangle avec les conditions de Neumann

Pour Neumann, on a les mêmes valeurs propres

$$\lambda = \pi^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right),$$

mais associées aux vecteurs propres

$$u(x, y) = \cos\left(\frac{l\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right).$$

La seule différence notable, en plus d'avoir des cosinus au lieu des sinus, est que l et m sont des entiers naturels quelconques.

Formule de Weyl sur un rectangle

Soient λ un réel strictement positif et λ_k une valeur propre.
$N(\lambda) := \mathrm{card}\,\{k \in \mathbb{N}, \lambda_k \leq \lambda\}$.
Il existe alors $l, m > 0$ entiers tels que $\lambda_k = \pi^2(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2})$.
Supposons que $\lambda_k \leq \lambda$. Alors :

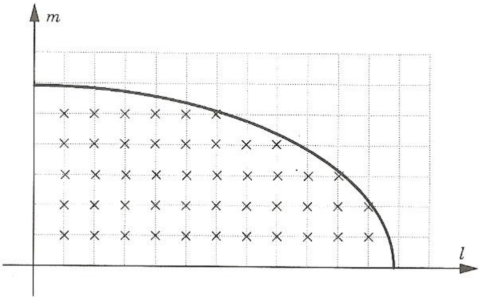
$$\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) \leq \frac{\lambda}{\pi^2}.$$

Formule de Weyl sur un rectangle

Les λ_k recherchés correspondent donc aux points à coordonnées entières situés dans le quadrant $x > 0, y > 0$ de l'ellipse d'équation $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}) = \frac{\lambda}{\pi^2}$.

L'aire de ce quadrant est $\frac{\lambda ab}{4\pi}$.

Formule de Weyl sur un rectangle



Points à coordonnées entières à l'intérieur de l'ellipse (Dirichlet) - source : [Str92]

$$N(\lambda) \leq \frac{\lambda ab}{4\pi}$$

Formule de Weyl sur un rectangle

$$N(\lambda) \leq \frac{\lambda ab}{4\pi}$$

$$\frac{\lambda ab}{4\pi} - C\sqrt{\lambda} \leq N(\lambda) \leq \frac{\lambda ab}{4\pi}$$

Formule de Weyl sur un rectangle

$$N(\lambda) \leq \frac{\lambda ab}{4\pi}$$

$$\frac{\lambda ab}{4\pi} - C\sqrt{\lambda} \leq N(\lambda) \leq \frac{\lambda ab}{4\pi}$$

$$\frac{ab}{4\pi} - \frac{C\sqrt{\lambda}}{\lambda} \leq \frac{N(\lambda)}{\lambda} \leq \frac{ab}{4\pi}.$$

Formule de Weyl sur un rectangle

$$N(\lambda) \leq \frac{\lambda ab}{4\pi}$$

$$\frac{\lambda ab}{4\pi} - C\sqrt{\lambda} \leq N(\lambda) \leq \frac{\lambda ab}{4\pi}$$

$$\frac{ab}{4\pi} - \frac{C\sqrt{\lambda}}{\lambda} \leq \frac{N(\lambda)}{\lambda} \leq \frac{ab}{4\pi}.$$

d'où :

$$\lim_{\lambda \to \infty} \left(\frac{N(\lambda)}{\lambda} \right) = \frac{ab}{4\pi}$$

Formule de Weyl sur un rectangle

$$N(\lambda) \leq \frac{\lambda ab}{4\pi}$$

$$\frac{\lambda ab}{4\pi} - C\sqrt{\lambda} \leq N(\lambda) \leq \frac{\lambda ab}{4\pi}$$

$$\frac{ab}{4\pi} - \frac{C\sqrt{\lambda}}{\lambda} \leq \frac{N(\lambda)}{\lambda} \leq \frac{ab}{4\pi}.$$

d'où :

$$\lim_{\lambda \to \infty} \left(\frac{N(\lambda)}{\lambda} \right) = \frac{ab}{4\pi}$$

donc :

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\lambda_n}{n} \right) = \frac{4\pi}{ab}$$

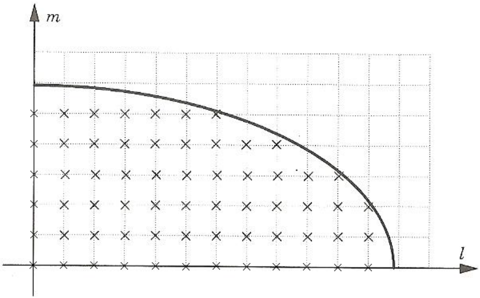
Théorème : Formule de Weyl
Soit Ω un domaine plan borné de $\mathbb{R}^2$, d'aire $\mathcal{A}(\Omega)$, et $n \in \mathbb{N}$. On note λ_n les valeurs propres de $-\Delta$ sur Ω avec les conditions au bord de Dirichlet ou de Neumann.
Alors :

$$\frac{\lambda_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{4\pi}{\mathcal{A}(\Omega)}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $N(\lambda)$ le nombre de valeurs propres inférieures ou égales à λ. Alors le théorème se reformule de la manière suivante :

$$\frac{N(\lambda)}{\lambda} \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \frac{\mathcal{A}(\Omega)}{4\pi}.$$

Formule de Weyl sur un rectangle



Points à coordonnées entières à l'intérieur de l'ellipse (Neumann) - adapté de [Str92]

Formule de Weyl sur un rectangle

$$N(\lambda) \geq \frac{\lambda ab}{4\pi}$$

$$\frac{\lambda ab}{4\pi} \leq N(\lambda) \leq \frac{\lambda ab}{4\pi} + C\sqrt{\lambda}$$

D'où finalement :

$$\lim_{\lambda \to \infty} \left(\frac{N(\lambda)}{\lambda} \right) = \frac{ab}{4\pi}.$$

Espaces de fonctions test

Définitions : Soit D un domaine plan borné arbitraire.

1. On dit que $\omega : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\omega \neq 0$, est une fonction test pour les conditions de Dirichlet si ω est de classe C^2 sur D et vérifie $\omega_{|\partial D} = 0$. On notera l'espace de toutes ces fonctions $\mathcal{T}_0(D)$.

2. On dit que $\omega' : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\omega' \neq 0$, est une fonction test pour les conditions de Neumann si ω' est de classe C^2 sur D. On notera l'espace de toutes ces fonctions $\mathcal{T}(D)$.

Définition :
Soit D un domaine plan borné arbitraire. Soit $\omega \in \mathcal{T}_0(D)$ (ou bien $\mathcal{T}(D)$. Le quotient de Rayleigh Q est défini par :

$$Q = \frac{\|\nabla\omega\|^2}{\|\omega\|^2},$$

où ∇ désigne le gradient de ω et $\|.\|$ la norme 2.

On va dans un premier temps considérer le problème de minimisation, pour $\omega \in \mathcal{T}_0(D)$,

$$m = \min(Q(\omega)). \tag{2}$$

On *admet* que ce minimum existe. On ordonne les valeurs propres de $-\Delta$ sur D par ordre croissant $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n \leq ...$

Théorème : Principe du minimum pour la première valeur propre

Soit $u \in \mathcal{T}_0(D)$ réalisant le minimum (2), autrement dit $m = \frac{\|\nabla u\|^2}{\|u\|^2}$.
Alors :

$$\lambda_1 = m.$$

Preuve :
Notons $m = \min(Q(\omega))$ et soit $u \in \mathcal{T}_0(D)$ réalisant ce minimum.
On a donc, $\forall \omega \in \mathcal{T}_0(D)$,

$$m = \frac{\iint_D |\nabla u|^2 dxdy}{\iint_D |u|^2 dxdy} \leq \frac{\iint_D |\nabla \omega|^2 dxdy}{\iint_D |\omega|^2 dxdy}.$$

Preuve :
Notons $m = \min(Q(\omega))$ et soit $u \in \mathcal{T}_0(D)$ réalisant ce minimum.
On a donc, $\forall \omega \in \mathcal{T}_0(D)$,

$$m = \frac{\iint_D |\nabla u|^2 dxdy}{\iint_D |u|^2 dxdy} \leq \frac{\iint_D |\nabla \omega|^2 dxdy}{\iint_D |\omega|^2 dxdy}.$$

Soient maintenant $v \in \mathcal{T}_0(D)$, $v \neq u$, et $\varepsilon \in \mathbb{R}$.
Posons $\omega = u + \varepsilon v$, et par souci de lisibilité, notons
$\int ... := \iint_D ...dxdy$. Enfin notons

$$f(\varepsilon) = \frac{\int |\nabla(u+\varepsilon v)|^2}{\int |u+\varepsilon v|^2}.$$

Preuve du principe du minimum

$$f(\varepsilon) = \frac{\int |\nabla(u + \varepsilon v)|^2}{\int |u + \varepsilon v|^2}.$$

f admet un minimum pour $\varepsilon = 0$, donc $f'(0) = 0$.

Preuve du principe du minimum

$$f(\varepsilon) = \frac{\int |\nabla(u+\varepsilon v)|^2}{\int |u+\varepsilon v|^2}.$$

f admet un minimum pour $\varepsilon = 0$, donc $f'(0) = 0$.
En développant l'expression de f, en dérivant et en évaluant la dérivée en 0, on a :

$$0 = \frac{2(\int u^2)(\int \nabla u.\nabla v) - 2(\int |\nabla u|^2)(\int uv)}{(\int u^2)^2}.$$

Preuve du principe du minimum

$$f(\varepsilon) = \frac{\int |\nabla(u+\varepsilon v)|^2}{\int |u+\varepsilon v|^2}.$$

f admet un minimum pour $\varepsilon = 0$, donc $f'(0) = 0$.
En développant l'expression de f, en dérivant et en évaluant la dérivée en 0, on a :

$$0 = \frac{2(\int u^2)(\int \nabla u.\nabla v) - 2(\int |\nabla u|^2)(\int uv)}{(\int u^2)^2}.$$

Par conséquent :

$$\int \nabla u.\nabla v = \frac{\int |\nabla u|^2}{\int u^2} \times \int uv = m \int uv.$$

En exploitant la première identité de Green et le fait que $v_{|\partial D} = 0$, on a :

$$\int \nabla u . \nabla v + \int v \Delta u = 0$$

Preuve du principe du minimum

En exploitant la première identité de Green et le fait que $v_{|\partial D} = 0$, on a :

$$\int \nabla u . \nabla v + \int v \Delta u = 0$$

Rappel : formule de Green. Soient u et v deux fonctions de (x, y) définies et de classe C^2 sur Ω. Alors :

$$\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} dS = \iint_{\Omega} \nabla v . \nabla u \; dxdy + \iint_{\Omega} v \Delta u \; dxdy .$$

Preuve du principe du minimum

En exploitant la première identité de Green et le fait que $v_{|\partial D} = 0$, on a :

$$\int \nabla u . \nabla v + \int v \Delta u = 0$$

Preuve du principe du minimum

En exploitant la première identité de Green et le fait que $v_{|\partial D} = 0$, on a :

$$\int \nabla u . \nabla v + \int v \Delta u = 0$$

$$\Rightarrow m \int uv + \int v \Delta u = 0$$

Preuve du principe du minimum

En exploitant la première identité de Green et le fait que $v_{|\partial D} = 0$, on a :

$$\int \nabla u . \nabla v + \int v \Delta u = 0$$

$$\Rightarrow m \int uv + \int v \Delta u = 0$$

$$\Rightarrow \iint_D (mu + \Delta u) v \; dxdy = 0.$$

En exploitant la première identité de Green et le fait que $v_{|\partial D} = 0$, on a :

$$\int \nabla u . \nabla v + \int v \Delta u = 0$$

$$\Rightarrow m \int uv + \int v \Delta u = 0$$

$$\Rightarrow \iint_D (mu + \Delta u) v \, dxdy = 0.$$

$$\Rightarrow mu + \Delta u = 0.$$

Preuve du principe du minimum

Soient λ_j une valeur propre et v_j le vecteur propre associé.

Soient λ_j une valeur propre et v_j le vecteur propre associé.

$$m \leq \frac{\int |\nabla v_j|^2}{\int v_j^2} = \frac{\int (-\Delta v_j) v_j}{\int v_j^2},$$

la dernière égalité résultant de la première formule de Green : $\int \nabla v_j \nabla v_j + \int v_j \Delta v_j = 0$, donc $\int (-\Delta v_j) v_j = \int |\nabla v_j|^2$.

Preuve du principe du minimum

Soient λ_j une valeur propre et v_j le vecteur propre associé.

$$m \leq \frac{\int |\nabla v_j|^2}{\int v_j^2} = \frac{\int (-\Delta v_j) v_j}{\int v_j^2},$$

la dernière égalité résultant de la première formule de Green :
$\int \nabla v_j \nabla v_j + \int v_j \Delta v_j = 0$, donc $\int (-\Delta v_j) v_j = \int |\nabla v_j|^2$.
Donc :

$$m \leq \frac{\int (-\Delta v_j) v_j}{\int v_j^2} = \frac{\int (\lambda_j v_j) v_j}{\int v_j^2} = \lambda_j, \ \ \forall j \geq 1$$

Preuve du principe du minimum

Soient λ_j une valeur propre et v_j le vecteur propre associé.

$$m \leq \frac{\int |\nabla v_j|^2}{\int v_j^2} = \frac{\int (-\Delta v_j) v_j}{\int v_j^2},$$

la dernière égalité résultant de la première formule de Green :
$\int \nabla v_j \nabla v_j + \int v_j \Delta v_j = 0$, donc $\int (-\Delta v_j) v_j = \int |\nabla v_j|^2$.
Donc :

$$m \leq \frac{\int (-\Delta v_j) v_j}{\int v_j^2} = \frac{\int (\lambda_j v_j) v_j}{\int v_j^2} = \lambda_j, \quad \forall j \geq 1$$

donc : $m = \lambda_1$, ce qui achève la preuve.

Sur le carré $D = [0,\pi] \times [0,\pi]$.
On choisit comme fonction $g(x,y) = xy(\pi - x)(\pi - y) \in \mathcal{T}_0(D)$.

On est censé trouver : $\lambda_1 = \pi^2(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2}) = 2$.

Exemple de calcul

Sur le carré $D = [0, \pi] \times [0, \pi]$.
On choisit comme fonction $g(x, y) = xy(\pi - x)(\pi - y) \in \mathcal{T}_0(D)$.

On est censé trouver : $\lambda_1 = \pi^2(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2}) = 2$.

Le calcul est le suivant :

Sur le carré $D = [0, \pi] \times [0, \pi]$.
On choisit comme fonction $g(x, y) = xy(\pi - x)(\pi - y) \in \mathcal{T}_0(D)$.

On est censé trouver : $\lambda_1 = \pi^2(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2}) = 2$.

Le calcul est le suivant :

$$\frac{\|\nabla g\|^2}{\|g\|^2} = \frac{\iint_D y^2(\pi - y)^2(\pi - 2x)^2 + x^2(\pi - x)^2(\pi - 2y)^2 dxdy}{\iint_D x^2y^2(\pi - x)^2(\pi - y)^2 dxdy}$$

Exemple de calcul

```python
def integrale2d(meth,f, a, b, n):     #les entrées sont ici des vecteurs de dim=2
    (X,W1)=meth[0](n[0],a[0],b[0])
    (Y,W2)=meth[1](n[1],a[1],b[1])
    I=0
    for i in X:
        for j in Y:
            I+=W1[np.where(X==i)]*W2[np.where(Y==j)]*f(i,j) #on applique la technique décrite plus haut.
    return (I)
#on retourne la valeur numérique de l'intégrale double
```

```python
def dw(x,y):
    return (y*y*(pi-2*x)**2*(pi-y)**2+x*x*(pi-2*y)**2*(pi-x)**2)

def w(x,y):
    return((x*x*y*y*(pi-x)**2)*(pi-y)**2)

A=integrale2d([simpson,simpson],dw,[0,0],[pi,pi],[101,101])
B=integrale2d([simpson,simpson],w,[0,0],[pi,pi],[101,101])
print(A)
print (B)
print(A/B)
```

```
[ 210.85625324]
[ 104.05339441]
[ 2.02642359]
```

Théorème : Principe du minimum pour la n^{eme} valeur propre
Soient $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_{n-1}$ les $n-1$ premières valeurs propres, associées aux vecteurs propres v_1, v_2, ..., v_{n-1}. Sous réserve d'existence du minimum,

$$\lambda_n = \min\left\{\frac{\|\nabla\omega\|^2}{\|\omega\|^2} \mid \ <\omega, v_i>= 0 \ \forall i \in [|1, n-1|]\right\} := m_n$$

Remarque : la condition d'orthogonalité supplémentaire vient du fait que les vecteurs propres sont orthogonaux.

Deux autres résultats

- Les deux théorèmes précédents restent vrais avec les conditions de Neumann.
- Les vecteurs propres forment une partie dense de $L^2(D)$.

Définition : Espace $H^1(\Omega)$
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Notons C_c^∞ l'espace des fonctions infiniment dérivables à support compact. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ (ou $W^{1,2}(\Omega)$) est défini par :

$$H^1(\Omega) =: \left\{ u \in L^2(\Omega) \mid \exists\, g_1,\ g_2 \in L^2(\Omega), \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \phi\ , \ \ \forall \phi \in C_c^\infty \right\}$$
$(i = 1, 2)$

Définition : Espace $H_0^1(\Omega)$
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On désigne par $C_c^1(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^1 à support compact dans Ω.

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^1(\Omega)}.$$

Théorème : Principe du maximin

Soit n un entier ≥ 2.
Soient $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ des fonctions tests *arbitraires* (pour Dirichlet).
Soit $\lambda_n^* = \min \left(\frac{\|\nabla \omega\|^2}{\|\omega\|^2} \right)$, ω fonction test *arbitraire* pour Dirichlet telle que $\forall j \leq n-1, < \omega, y_j >= 0$.
Alors :

$$\lambda_n = \max_{\{y_1, y_2, ..., y_{n-1}\}} (\lambda_n^*).$$

Théorème : Principe du maximin

Soit n un entier ≥ 2.
Soient $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ des fonctions tests *arbitraires* (pour Dirichlet).
Soit $\lambda_n^* = \min\left(\frac{\|\nabla\omega\|^2}{\|\omega\|^2}\right)$, ω fonction test *arbitraire* pour Dirichlet telle que $\forall j \leq n-1, <\omega, y_j>= 0$.
Alors :

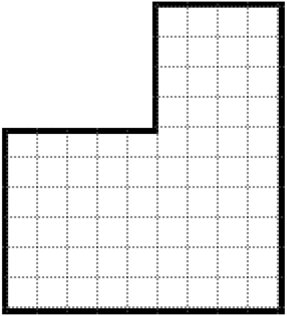
$$\lambda_n = \max_{\{y_1,y_2,...,y_{n-1}\}}(\lambda_n^*).$$

Ce théorème est aussi vrai pour les conditions de Neumann.

Formule sur un quadrillage

- Soient D et D' deux domaines plans tels que $D \subset D'$.
  On note $\tilde{\lambda}_n$ et λ_n les valeurs propres pour Neumann et Dirichlet respectivement sur D et $\tilde{\lambda}'_n$ et λ'_n les valeurs propres pour Neumann et Dirichlet respectivement sur D'.
  Alors :
  $$\tilde{\lambda}'_n \leq \tilde{\lambda}_n \quad \forall n \geq 1$$
  $$\lambda'_n \leq \lambda_n \quad \forall n \geq 1$$
- Soit D un domaine plan borné.
  Avec les notations précédentes, on a :
  $$\tilde{\lambda}_n \leq \lambda_n \quad \forall n \geq 1.$$

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et D un tel domaine. $D = \bigcup_{i=1}^{m} D_i$, chaque D_i étant un carré de côté $a > 0$. On va appeler D "quadrillage".



Un exemple de quadrillage

On note :
$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n \leq ...$ les valeurs propres sur D avec les conditions de Dirichlet ;
$\tilde{\lambda_1} \leq \tilde{\lambda_2} \leq ... \leq \tilde{\lambda_n} \leq ...$ les valeurs propres sur D avec les conditions de Neumann.

On note :
$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n \leq ...$ les valeurs propres sur D avec les conditions de Dirichlet ;
$\tilde{\lambda_1} \leq \tilde{\lambda_2} \leq ... \leq \tilde{\lambda_n} \leq ...$ les valeurs propres sur D avec les conditions de Neumann.

Chaque domaine D_i possède sa propre suite croissante de valeurs propres. L'idée est de ressembler *toutes* les valeurs propres de *tous* les D_i dans une unique suite croissante :
$\mu_1 \leq \mu_2 \leq ... \leq \mu_n \leq ...$ pour Dirichlet ;
$\tilde{\mu}_1 \leq \tilde{\mu}_2 \leq ... \leq \tilde{\mu}_n \leq ...$ pour Neumann.

Formule sur un quadrillage

Proposition : Avec les notations introduites juste avant, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \lambda_n \leq \mu_n \quad \textit{et} \quad \tilde{\mu}_n \leq \tilde{\lambda}_n$$

Proposition : Avec les notations introduites juste avant, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \lambda_n \leq \mu_n \qquad et \qquad \tilde{\mu}_n \leq \tilde{\lambda}_n$$

Corollaire : Avec les notations précédentes,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \tilde{\mu}_n \leq \tilde{\lambda}_n \leq \lambda_n \leq \mu_n.$$

Théorème :
Notons $\mathcal{A}(D)$ l'aire du domaine D et reprenons les notations de ce paragraphe. Alors :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)=\frac{4\pi}{\mathcal{A}(D)}$$

et :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\tilde{\lambda}_n}{n}\right)=\frac{4\pi}{\mathcal{A}(D)}.$$

Formule sur un quadrillage : éléments de preuve

$$M(\lambda) = \mathrm{card}\,\{k \in \mathbb{N}, \mu_k \leq \lambda\} = \sum_{i=1}^{m} N_i(\lambda)$$

.

Formule sur un quadrillage : éléments de preuve

$$M(\lambda) = \mathrm{card}\left\{k \in \mathbb{N}, \mu_k \leq \lambda\right\} = \sum_{i=1}^{m} N_i(\lambda)$$

.

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{M(\lambda)}{\lambda}\right) = \sum_{i=1}^{m}\lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{N_i(\lambda)}{\lambda}\right) = \sum_{i=1}^{m}\frac{\mathcal{A}(D_i)}{4\pi} = \frac{\mathcal{A}(D)}{4\pi}.$$

Formule sur un quadrillage : éléments de preuve

$$M(\lambda) = \mathrm{card}\,\{k \in \mathbb{N}, \mu_k \leq \lambda\} = \sum_{i=1}^{m} N_i(\lambda)$$

.

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{M(\lambda)}{\lambda}\right) = \sum_{i=1}^{m} \lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{N_i(\lambda)}{\lambda}\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathcal{A}(D_i)}{4\pi} = \frac{\mathcal{A}(D)}{4\pi}.$$

donc :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\mu_n}{n}\right) = \frac{4\pi}{\mathcal{A}(D)}.$$

$$M(\lambda) = \mathrm{card}\left\{k \in \mathbb{N}, \mu_k \leq \lambda\right\} = \sum_{i=1}^{m} N_i(\lambda)$$

.

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{M(\lambda)}{\lambda}\right) = \sum_{i=1}^{m}\lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{N_i(\lambda)}{\lambda}\right) = \sum_{i=1}^{m}\frac{\mathcal{A}(D_i)}{4\pi} = \frac{\mathcal{A}(D)}{4\pi}.$$

donc :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\mu_n}{n}\right) = \frac{4\pi}{\mathcal{A}(D)}.$$

Pour le cas des valeurs propres de Neumann $\tilde{\mu}_n$, le même argument donne

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\tilde{\mu}_n}{n}\right) = \frac{4\pi}{\mathcal{A}(D)}.$$

En divisant par $n \geq 1$ les inégalités du corollaire, on obtient :

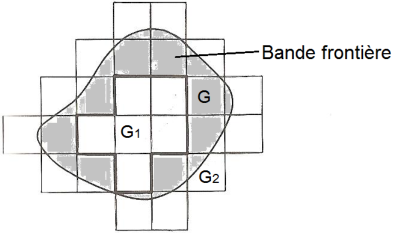
$$\frac{\tilde{\mu}_n}{n} \leq \frac{\tilde{\lambda}_n}{n} \leq \frac{\lambda_n}{n} \leq \frac{\mu_n}{n}.$$

En divisant par $n \geq 1$ les inégalités du corollaire, on obtient :

$$\frac{\tilde{\mu}_n}{n} \leq \frac{\tilde{\lambda}_n}{n} \leq \frac{\lambda_n}{n} \leq \frac{\mu_n}{n}.$$

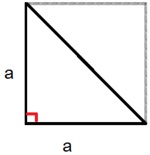
Par encadrement, on a bel et bien :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right) = \frac{4\pi}{\mathcal{A}(D)} \qquad et \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\tilde{\lambda}_n}{n}\right) = \frac{4\pi}{\mathcal{A}(D)}.$$

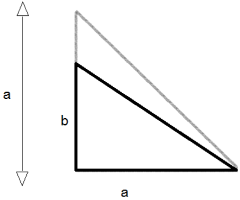


Approximation d'un domaine G par deux quadrillages - adapté de [Gar86, Figure 41, chap. 11]

Approximation au sens fort



$$N_\Delta(\lambda) \leq N_\square(\lambda)$$



$$N_T(\lambda) \leq N_{T'}(\lambda)$$

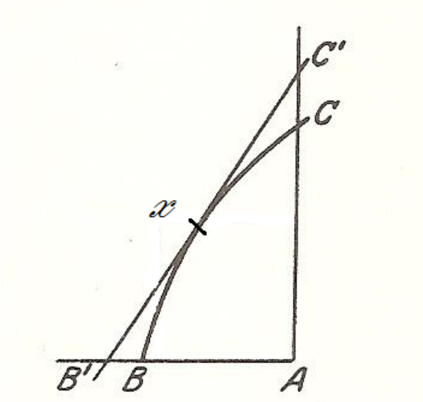
Définition : Approximation au sens fort.
Soient G et G' deux domaines de $\mathbb{R}^2$. On dit que G' *approche* G *au sens fort* si il existe $\varepsilon \geq 0$, et deux fonctions $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient $\forall (x, y) \in G$:

$$\begin{aligned} |g(x,y)| &\leq \varepsilon, & |h(x,y)| &\leq \varepsilon, \\ |\frac{\partial}{\partial x} g(x,y)| &\leq \varepsilon, & \frac{\partial}{\partial x}|h(x,y)| &\leq \varepsilon, \\ |\frac{\partial}{\partial y} g(x,y)| &\leq \varepsilon, & \frac{\partial}{\partial y}|h(x,y)| &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

et telles qu'on puisse passer de G à G' par les changements de variables : $x' = x + g(x, y)$ et $y' = y + h(x, y)$.
On dit que G' approche G avec la précision ε. Si $\varepsilon \longrightarrow 0$, on dit que G' est déformé continûment en G.

On a le théorème suivant :

Théorème :
Quelle que soit la condition de bord, la n^{eme} valeur propre de $-\Delta$ varie continument lorsque le domaine G est déformé en G' au sens fort défini ci-dessus.



adapté de [CH53, Figure 6, chap. 5]

Il est possible de généraliser à une dimension d finie quelconque :

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{d/2}} = (2\pi)^{-d} \omega_d \mathcal{V}(\Omega),$$

où $\mathcal{V}(\Omega)$ désigne le volume de Ω et ω_d le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$.

Références :

R. Courant and D. Hilbert.
Methods of Mathematical Physics. Vol. I.
Interscience Publishers, Inc., New York, N.Y., 1953.

P. R. Garabedian.
Partial Differential Equations.
Chelsea Publishing Co., New York, second edition, 1986.

Walter A. Strauss.
Partial Differential Equations.
John Wiley & Sons, Inc., New York, 1992.
An introduction.

[CH53] [Gar86] [Str92]