Recueil d'exercices d'analyse numérique

Pour le cours de CPB2 ENSISA maths renfort S3.

1 Suites récurrentes et méthode de Newton

1.1 Exercice

Étudier chacune des suites suivantes (monotonie, limite...)

1. $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ sur $I = [1,2]$;
2. $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n^3 + \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{9}$ sur $I = [0, \frac{1}{2}]$;
3. $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{\pi}\cos(\frac{\pi u_n}{2})$ sur $I = [0,1]$;
4. $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\exp(-u_n)$ sur $I = [0,1]$.

1.2 Exercice

Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la suite donnée par $u_0 = a$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

1.3 Exercice (Suites arithmético-géométriques)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ On considère la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

1. Trouver un réel l tel que $v_n := (u_n - l)$ soit géométrique.
2. Pour quelles valeurs de a, b la suite (un) converge-t-elle ?

1.4 Exercice

1. Étudier la suite $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ en utilisant l'inégalité des accroissements finis.
2. Soit $v_0 \in \mathbb{R}$ et $v_{n+1} = v_n - v_n^2$. Étudier cette suite (v_n) en étudiant séparément selon que $v_0 \in]0,1[$ ou non.

1.5 Exercice

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto \frac{x^3+1}{3}$ et la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Justifier que l'équation $f(x) = x$ possède 3 solutions réelles.
2. Étudier le signe de $f(x) - x$ ainsi que la monotonie de f.
3. Déduire le comportement de la suite (u_n) selon la valeur de u_0.

1.6 Exercice

Soit $a > 0$. On regarde $u_0 > 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})$.

1. Étudier la convergence de la suite (u_n).
2. On pose $v_n := \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et déduire une expression de v_n en fonction de n et v_0.
3. Supposons que $u_0 > a$. Montrer alors que $|u_n - \sqrt{a}| \leq 2u_0 v_0^{2^n}$.

1.7 Exercice

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 \in \mathbb{R},\ u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}, \quad v_0 \in \mathbb{R},\ v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

Montrer que $\lim(u_n) = \lim(v_n) = \frac{u_0+v_0}{2}$.

Indications : Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes, puis que $(v_n - u_n)$ est géométrique, et que $(u_n + v_n)$ est constante. En déduire que

$$u_n = \frac{1}{2}\left(v_0 + u_0 - \frac{1}{3^n}(v_0 - u_0)\right)$$

et que

$$v_n = \frac{1}{2}\left(v_0 + u_0 + \frac{1}{3^n}(v_0 - u_0)\right).$$

1.8 Exercice

En utilisant $x \longmapsto \sin(x)$ sur le segment $[2, 4]$, essayer d'estimer π.

1.9 Exercice (Estimation d'inverses)

En utilisant $f(x) = \frac{1}{x} - c$, $c > 0$, calculer les premiers termes de la suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée qui approche $\frac{1}{c}$ dans les cas suivants :

1. $c = 9$ avec $x_0 = \frac{1}{10}$.
2. $c = 11$ avec $x_0 = \frac{1}{10}$.
3. $c = 5$ avec $x_0 = \frac{1}{10}$.

1.10 Exercice (Estimation de racines carrées)

En utilisant $f(x) = x^2 - c$, $c > 0$, calculer les premiers termes de la suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée qui approche $\sqrt{c}$:

1. $c = 10$ avec $x_0 = 3$.
2. $c = 5$ avec $x_0 = 2$.
3. $c = 5$ avec $x_0 = 3$.

Estimer l'erreur.

1.11 Exercice (Estimation de racines quatrièmes)

En utilisant $f(x) = x^4 - c$, $c > 0$, calculer les premiers termes de la suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée qui approche $\sqrt[4]{c}$:

1. $c = 10$ avec $x_0 = \frac{3}{2}$.
2. $c = 5$ avec $x_0 = 1$.
3. $c = 5$ avec $x_0 = \frac{7}{5}$.

Estimer l'erreur.

1.12 Exercice

L'objectif de cet exercice est d'approximer sur $\mathbb{R}_+^*$ la solution de $x = -\ln(x)$.

1. Montrer que l'équation admet une solution unique sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Trouver une approximation de la solution avec la méthode de Newton. Bien choisir l'intervalle et donner la précision.

1.13 Exercice (Autour du calcul de $\sqrt{2}$)

On considère $f : x \longmapsto x^2 - 2$. On a déjà vu comment calculer une valeur approchée, l'idée de cet exercice est d'estimer la vitesse de convergence.

1. On prend $x_0 = 1$. Donner l'expression de la fonction φ associée et justifier que tout est bien défini.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $x_n \geqslant 1$ et que $|x_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}|^2$.
3. Déduire que $|x_n - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2^{2^n}}$.

1.14 Problème (Contrôle 2020)

Dans cet exercice on s'intéresse à la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} f : [0,4] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x+3}. \end{aligned}$$

1. Justifier que la suite est bien définie.
2. Faire un dessin des premiers termes de la suite.
3. Montrer que $0 \leq |f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}$ sur $[0,4]$.
4. Donner la définition d'une fonction contractante. Montrer qu'une fonction contractante est continue.
5. Déduire de la question 3. que f est contractante.
6. Montrer que (u_n) est croissante. Justifier qu'elle est majorée.
7. Déduire de ce qui précède que (u_n) converge et montrer que la limite est
$$\lim(u_n) = \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$
8. On souhaite obtenir une valeur approchée de la limite. On va utiliser la méthode de Newton sur la fonction $g : x \longmapsto x^2 - 13$ pour approcher $\sqrt{13}$. On se place sur $[3,4]$.
   (a) Montrer que la fonction φ à itérer est donnée par
   $$\varphi(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{13}{x}\right).$$
   (b) Itérer la fonction φ en partant de $x_0 = 4$. Donner autant de termes que possible.
   (c) Donner une majoration de l'erreur.
   (d) Conclusion : donner une valeur approchée de la limite de la suite (u_n).

1.15 Problème (Substitution 2020)

Dans cet exercice on s'intéresse à la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

1. Montrer que f est décroissante. Déduire que $[0,1]$ est stable par f.
2. Faire un dessin des premiers termes de (u_n). Déduire de la question 1. les variations de (u_n).
3. Donner la définition d'un point fixe de f.
4. Calculer $\sup|f'|$ sur $[0,1]$, et déduire que f est contractante.
5. Est-ce que (u_n) converge ? Si oui, vers quelle limite ? (Il n'est pas nécessaire d'en donner la valeur)

1.16 Problème (Contrôle 2021)

Dans cet exercice on s'intéresse à la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{u_n+1}}. \end{cases}$$

1. **[2 pts]** Montrer que l'intervalle $I = [0,1]$ est stable par $f : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.
2. **[2]** Faire un dessin des premiers termes de (u_n).
3. **[2]** Calculer $\sup|f'|$ sur I, et déduire que f est contractante sur I.
4. **[1]** Conclure que (u_n) converge.
5. (a) **[2]** Justifier que calculer la limite de (u_n) revient à résoudre l'équation $x^3 + x^2 - 1 = 0$ sur I.
   (b) **[2]** Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [0.75, 1]$ tel que $\alpha^3 + \alpha^2 - 1 = 0$.
6. On va maintenant appliquer la méthode de Newton sur la fonction $g : x \longmapsto x^3 + x^2 - 1$ sur $[0.75, 1]$ pour trouver une approximation de α. On rappelle que la fonction φ du cours est donnée par
$$\varphi(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}.$$
   (a) **[2]** Montrer que $\varphi(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 + 1}{3x^2 + 2x}$.
   (b) **[1]** Itérer φ en partant de $x_0 = 1$. Donner autant de termes que possible.
   (c) **[2]** Donner une majoration de l'erreur ainsi qu'une une valeur approchée de la limite de (u_n).

1.17 Problème (Substitution 2021)

Dans cet exercice on s'intéresse à la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n+1}. \end{cases}$$

1. **[2 pts]** Montrer que l'intervalle $I = [\frac{1}{2}, 1]$ est stable par $f : x \longmapsto \frac{1}{x+1}$.
2. **[2]** Faire un dessin des premiers termes de (u_n).
3. **[2]** Calculer $\sup|f'|$ sur I, et déduire que f est contractante sur I.
4. **[2]** Conclure que (u_n) converge.
5. (a) **[2]** Justifier que calculer la limite de (u_n) revient à résoudre l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ sur I.
   (b) **[1]** Déduire la valeur de la limite.
6. Si vous avez correctement répondu à la question précédente, vous constatez que pour avoir une idée d'une valeur approchée de la limite, on a besoin d'une estimation du réel $\sqrt{5}$. On va maintenant appliquer la méthode de Newton sur la fonction $g : x \longmapsto x^2 - 5$ sur $[2,3]$ pour en trouver une approximation. On rappelle que la fonction φ du cours est donnée par
$$\varphi(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}.$$
   (a) **[2]** Montrer que $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{5}{x}\right)$.
   (b) **[1]** Itérer φ en partant de $x_0 = 3$. Donner autant de termes que possible.
   (c) **[2]** Donner une majoration de l'erreur ainsi qu'une une valeur approchée de la limite de (u_n).

1.18 Problème (Contrôle 2022)

1. Étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ sur l'intervalle $[1, 2]$:

   (a) [**2 points**] Calculer f' et f''.
   (b) [**3**] Utiliser f'' pour étudier les variations et le signe de f'. En déduire les variations de f. Résumer les résultats dans un tableau de variations.
   (c) [**2**] Utiliser ce qui précède pour calculer $\sup|f'|$ sur $[1, 2]$ et déduire que f est contractante.
   (d) [**1**] Montrer que $\sqrt{2}$ est un point fixe de f.

2. Étude de la suite $x_0 = 2,\ x_{n+1} = f(x_n)$:

   (a) [**1**] Montrer que l'intervalle $[\sqrt{2}, 2]$ est stable par f.
   (b) [**2**] Faire un dessin de premiers termes de la suite (x_n).
   (c) [**2**] Étudier les variations de la suite (x_n), en vous aidant de la question 1.
   (d) [**2**] Montrer que la suite (x_n) converge. Vers quelle valeur ?

3. Approximation de la limite :

   (a) [**1**] On pose $g(x) = x^2 - 2$. On rappelle que dans la méthode de Newton, la fonction φ à itérer est donnée par
   $$\varphi(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}.$$
   Montrer que $\varphi = f$.
   (b) [**1**] Itérer φ en partant de $x_0 = 2$. Donner autant de termes que possible.
   (c) [**2**] Donner une majoration de l'erreur (prendre $a = 1$ et $b = 2$)
   (d) [**1**] Conclusion : donner une approximation de la valeur de la limite de la suite (x_n).

2 Interpolation de Lagrange

2.1 Exercice

Trouver le polynôme d'interpolation de degré 3 interpolant la fonction f, cette dernière vérifiant :
$$f(-1) = -1; \quad f(0) = 1; \quad f(1) = 0; \quad f(2) = 0.$$

2.2 Exercice

Calculer le polynôme d'interpolation pour la fonction $f(x) = \frac{1}{x+1}$ sur le segment $[0, 1]$ avec les points :
1. $\{0, 1\}$ (linéaire),
2. $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ (quadratique),
3. $\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ (cubique).

et calculer chaque fois l'erreur.

2.3 Exercice

Calculer le polynôme d'interpolation pour la fonction $g(x) = e^{-x^2}$ sur le segment $[-1, 1]$ avec les points :
1. $\{-1, 1\}$,
2. $\{-1, 0, 1\}$,
3. $\{-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\}$.

et calculer chaque fois l'erreur.

2.4 Exercice (Théorique mais facile !)

Soient P un polynôme de degré quelconque et $(x_i)_{i=0}^n$ une famille de $n+1$ points de $\mathbb{R}$. Montrer que le polynôme d'interpolation de P aux points x_i est le reste de la division euclidienne de P par $\pi_{n+1} = \prod_{i=0}^n (X - x_i)$. Que se passe t-il si $\deg(P) \leq n$?

2.5 Problème (Pour aller plus loin)

Pour $x \in [-1,1]$, on définit les **polynômes de Tchebychev** par $t_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

1. Calculer t_0 et t_1.
2. En posant $\theta = \arccos(x)$, montrer que $t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x) = 2xt_n(x)$. Déduire que t_n est bien un polynôme. Quel est son degré ?
3. Montrer que t_n admet exactement n racines distinctes dans $[-1,1]$, données par
$$\cos\left(\frac{2i+1}{2n}\pi\right), \quad 0 \leq i \leq n-1.$$
On appelle **points d'interpolation de Tchebychev** les racines de t_{n+1}.
4. Montrer que $t_{n+1}(x) = 2^n \pi_{n+1}(x)$.
5. Expliquer que l'application
$$\begin{aligned} [-1,1] &\longrightarrow [a,b] \\ u &\longmapsto x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}u \end{aligned}$$
permet de se ramener à un intervalle quelconque $[a,b]$, et montrer que les images des points d'interpolation de Tchebychev sont données par
$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right), \quad 0 \leq i \leq n.$$
6. Montrer que pour $x \in [a,b]$, on a
$$\pi_{n+1}(x) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \prod_{i=0}^n (u - u_i),$$
où $\prod_{i=0}^n (u-u_i) = \frac{1}{2^n} t_{n+1}$ est le polynôme $\pi_{n+1}(u)$ correspondant à $[-1,1]$.
7. Montrer que
$$\pi_{n+1}(x) = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} t_{n+1}\left(\frac{2}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right).$$
8. Utiliser la formule d'erreur du cours pour estimer l'erreur effectuée en utilisant les points de Tchebychev pour une fonction f quelconque.

3 Intégration numérique

3.1 Exercice

On considère
$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx.$$
On souhaite obtenir une valeur approchée de $\ln(2)$. On considère la subdivision $1 < 4/3 < 5/3 < 2$.

1. Donner une valeur approchée de $\ln(2)$ en utilisant la méthode des rectangles ;
2. Donner une valeur approchée de $\ln(2)$ en utilisant la méthode du point milieu ;
3. Donner une valeur approchée de $\ln(2)$ en utilisant la méthode des trapèzes ;
4. Avec la méthode des trapèzes, quelle valeur de n choisir pour la subdivision de sorte à avoir une erreur inférieure à 10^{-4} ?

3.2 Exercice

Calculer

$$\int_2^3 e^{-x^2} dx,$$

en utilisant les 3 méthodes du cours et une subdivision à 3 pas. Évaluer l'erreur à chaque fois. Que peut-on dire ?

3.3 Exercice

Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. Évaluer

$$\int_0^y x^3$$

avec les trois méthodes et estimer l'erreur à chaque fois. On prendra une subdivision régulière à n pas. *Indication 1 :* Montrer par récurrence que

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^3 = \frac{(n-1)^2 n^2}{4}.$$

Indication 2 : On admet ensuite que

$$\sum_{i=0}^{n-1} (2i+1)^3 = n^2(2n^2-1).$$

3.4 Exercice

1. **[1]** Vérifier que $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2}{1+t^2} dt = \pi$.
2. **[1]** En utilisant la méthode d'intégration numérique de votre choix sur la fonction $t \longmapsto \dfrac{2}{1+t^2}$ sur $[-1,1]$, donner une approximation de π.
   On utilisera la subdivision $-1 < -\frac{2}{3} < -\frac{1}{3} < 0 < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1$.
3. **[1]** Estimer l'erreur.

Exercice

1. **[1 pt]** Pour quel(s) type(s) de fonction(s) la méthode des rectangles est-elle exacte ? Et celle du point milieu ?
2. **[2 pts]** Calculer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \ln(\sin(x))dx$ avec la méthode des rectangles, en utilisant la subdivision régulière à 4 pas $\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} < \frac{5\pi}{6}$.
3. **[2 pts]** Évaluer l'erreur commise à la question précédente. Comment améliorer ce résultat en gardant la méthode des rectangles ?
4. *BONUS [+2 **pts**] : Montrer que* $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(x))dx = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$ *en valeur exacte. Vous pouvez justifier que* $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))dx$*, puis montrer que* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))dx$*, puis que* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))dx$*, et enfin conclure en vous rappelant que* $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

3.5 Exercice

On considère la fonction $f(x) = x^3 + x$.

1. **[1]** Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)dx$.
2. **[1]** Calculer une valeur approchée de cette intégrale avec la méthode des rectangles et $n = 5$ sous-intervalles.
3. **[1]** Dresser le tableau de variations de f sur $[-1, 2]$ et déduire une constante M telle que $|f'(x)| \leq M$ pour $x \in [-1, 2]$.
4. **[1]** Estimer l'erreur commise à la question 2. Est-ce cohérent avec la valeur exacte ?
5. **[1]** Trouver n tel que la méthode des rectangles à n sous-intervalles donne un encadrement de I à 10^{-2} près.

3.6 Problème : sommes de Riemann

Dans ce problème, on s'intéresse à la notion de somme de Riemann, qui a beaucoup à voir avec la méthodes des rectangles qu'on a vue en cours.

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $n \in N^*$ et $0 \leq k \leq n$, on définit la subdivision régulière

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}.$$

On a en particulier $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$, $x_0 = a$ et $x_n = b$. On rappelle la relation de Chasles pour les intégrales :

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt.$$

On définit la **somme de Riemann d'ordre n** :

$$S_n(f) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k).$$

L'objectif du problème est de montrer que les sommes de Riemann convergent vers $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$.

1. Montrer que

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (x, y) \in [a, b]^2,\ |x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall n \geq N,\ \forall 0 \leq k \leq n-1,\ \forall t \in [x_k, x_{k+1}],\ |f(t) - f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

3. Déduire que

$$\forall n \geq N,\ \forall 0 \leq k \leq n-1,\ \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\, dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{n}.$$

4. (a) Montrer que

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)dt.$$

   (b) Déduire de 3 et 4(a) que

$$\forall n \geq N,\ \left|\int_a^b f(t)dt - (b-a)S_n(f)\right| \leq \varepsilon\,.$$

(c) Conclure quant à la convergence de $S_n(f)$.

5. A partir d'ici, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

   (a) Justifier qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $\forall t \in [a,b]$, $|f'(t)| \leq M$.

   (b) Déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall 0 \leq k \leq n-1,\ \forall t \in [x_k, x_{k+1}],\ |f(t) - f(x_k)| \leq M|t - x_k|.$$

   (c) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall 0 \leq k \leq n-1,\ \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\, dt \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n^2}.$$

   (d) Déduire finalement que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left| \int_a^b f(t)dt - (b-a)S_n(f) \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}.$$

4 Intégrales généralisées

4.1 Exercice

Montrer que
$$\int_0^1 \ln(t)dt \text{ converge}\,;\ \int_0^1 \frac{1}{t}dt \text{ diverge.}$$

4.2 Exercice

Étudier la convergence et calculer
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}.$$

4.3 Exercice

Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :
$$\int_1^{\infty} x^{\alpha} dx; \quad \int_0^1 x^{\alpha} dx; \quad \int_0^{\infty} e^{-x^{\beta}} dx; \quad .$$
(discuter selon la valeur des paramètres)

4.4 Exercice (Intégrales de Bertrand)

Une intégrale de Bertrand est de la forme
$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ln(t)^{\beta}}.$$

1. Étudier sa convergence selon la valeur de β.
2. Application : convergence de l'intégrale
$$\int_2^{+\infty} \sqrt{t^2+3t}\,\ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)\sin^2\left(\frac{1}{\ln t}\right) dt.$$

4.5 Exercice (Une intégrale semi-convergente classique)

1. Montrer par une intégration par parties que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \quad \text{converge.}$$

2. Montrer que pour tout $t \geq 1$, on a l'inégalité $\frac{|\sin(t)|}{t} \geq \frac{1-\cos(2t)}{2t}$.
3. Déduire de la question précédente et d'une intégration par parties que l'intégrale de la question 1 ne converge pas absolument.

4.6 Exercice (La fonction Gamma)

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$: $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$.

1. Montrer que l'intégrale qui définit $\Gamma(\alpha)$ converge quel que soit $\alpha > 0$.
2. Montrer que $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
3. Montrer que $\Gamma(n + 1) = n!$
4. Montrer que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

4.7 Exercice (Comparaison série / intégrale)

Étudier la convergence des séries suivantes en les comparant avec les intégrales généralisées associées :
1. $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$; 2. $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(k+1)(k+2)}$; 3. $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{1+\epsilon}}$ avec $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$;
4. $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k\ln(k)}$; 5. $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k(\ln(k))^{1+\epsilon}}$; 6. $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k^2+1}$.

4.8 Exercice

1. **[1.5]** Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-\sqrt{t})dt = 2$, avec le changement de variables $x = \sqrt{t}$.
2. **[1]** Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\exp(-t^2)dt = \frac{1}{2}$.
3. **[1]** Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos(t)}{t}dt$ diverge.
4. **[1.5]** En admettant (ou justifiant !) que $\lim_{t\to 0} \ln(t)\sqrt{t} = 0$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}dt = -4$.

4.9 Exercice : Transformée de Laplace de fonctions polynomiales

1. Soient $\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N}$.
   (a) **[2 pts]** Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^n e^{-\lambda t}dt$ converge. *Indication : changement de variables* $x = \lambda t$.
   (b) **[1 pt]** Déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t}dt$ converge.
2. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$.
   (a) **[1 pt]** Calculer I_0.
   (b) **[2 pts]** Montrer que $I_{n+1} = (n + 1)I_n$.
   (c) **[1 pt]** Montrer que $I_n = n!$ *Rappel :* $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 3 \times 2 \times 1$.
   (d) **[2 pts]** Montrer que $\forall\lambda > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t}dt = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$.

4.10 Exercice

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. **[1]** Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}}dt$ est convergente.
2. **[2]** Avec le changement de variables $x = \sin(t)$ et en vous rappelant que $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$, calculer
$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$
3. **[2]** Avec une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}dt$. *On admettra que* $\lim\limits_{t\to 0} \ln(t)\sqrt{t} = 0$.

4.11 Problème : intégrales de Gauss (adapté de http ://vonbuhren.free.fr)

L'objectif de ce problème est d'étudier l'intégrale de Gauss, qui est très importante en probabilités et en statistiques. Une intégrale de Gauss est définie pour $a > 0$ par :

$$I(a) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}dt.$$

1. On considère la fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto t^2e^{-t^2}$.
   (a) Dresser le tableau de variations de h sur $[0, +\infty[$.
   (b) Déduire l'inégalité pour $t > 0$:
   $$0 \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{et^2}.$$
   (c) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge.
   (d) En déduire que l'intégrale $I(1)$ est convergente.
   (e) Soit $a > 0$. Par un changement de variables, montrer que $I(a)$ converge également et qu'elle vérifie
   $$I(a) = \frac{I(1)}{\sqrt{a}}.$$

   Pour la suite, on définit les intégrales de Wallis :
   $$W_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta)d\theta.$$
   On **admet** que $W_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $W_n \underset{n\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
2. Soit $n > 0$. On considère les intégrales
   $$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt, \quad I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt, \quad J_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$$
   (a) On *admet* que $J_n \sim \frac{1}{t^{2n}}$. Déduire que J_n est une intégrale convergente pour tout $n > 0$.
   (b) Avec une étude de fonction, montrer que $\ln(1 + x) \leq x$ pour $x > -1$.
   (c) A l'aide de l'inégalité précédente, montrer que
   $$I_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt \leq J_n \text{ pour } n > 0.$$
   Conseil : ne vous lancez pas dans une récurrence.

(d) En posant $t = \sqrt{n}.\sin(\theta)$, montrer que $I_n = \sqrt{n}.W_{2n+1}$ pour $n > 0$.

(e) En posant $t = \sqrt{n}.\tan(\theta)$, montrer que $J_n = \sqrt{n}.W_{2n-2}$ pour $n > 0$. Justifier auparavant que $1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$ pour $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(f) On *admet* que $\sqrt{n}W_{2n+1} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et que $\sqrt{n}W_{2n-2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (lorsque $n \to +\infty$). Déduire de ce qui précède la valeur de I.

(g) Quelle est la valeur de l'intégrale de Gauss pour tout réel $a > 0$?