Recueil d'exercices d'analyse réelle

Pour le cours de CPB1 ENSISA maths renfort S2.

1 Propriétés des nombres réels

1.1 Exercice

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}; \quad \min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

2. Soient A, B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On définit $A + B := \{a + b, \quad a \in A, \quad b \in B\}$. Montrer que $\sup(A) + \sup(B)$ est un majorant de $A + B$, puis que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
3. Trouver les majorants, minorants, max, min, sup et inf de :
   (a) $[0, 1] \bigcap \mathbb{Q}$
   (b) $]0, 1[\bigcap \mathbb{Q}$
   (c) $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

1.2 Exercice

Donner, s'ils existent, le maximum, le minimum et les bornes supérieures et inférieures de

$$\mathcal{A} = \left\{(-1)^n + \frac{1}{2n+1}, \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

1.3 Exercice

On considère la partie de $\mathbb{R}$ suivante :

$$\mathcal{A} = \left\{(-1)^n + \frac{n+1}{n+2}, \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Etudier ses bornes inférieures et supérieures. Si elles existent, sont-elles atteintes ?

1.4 Exercice

On considère la partie de $\mathbb{R}$ suivante :

$$\mathcal{A} = \left\{(-1)^n - \frac{1}{n+1}, \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

1. **[2]** Justifier que les bornes supérieures et inférieures de A existent. Les calculer.
2. **[1]** La borne supérieure est-elle un maximum ? L'inférieure un minimum ?
3. **[2]** La suite $v_n = (-1)^n - \frac{1}{n+1}$ converge-t-elle ? *Pensez aux suites extraites.*

1.5 Exercice

Soit A une partie de $\mathbb{R}_+$ non vide et bornée. On note $B = \{\sqrt{x}, \ x \in A\}$.
Montrer que $\sup(B) = \sqrt{\sup(A)}$. *Indication : prendre $m \in B, \ m < \sqrt{sup(A)}$ et montrer que m n'est pas un majorant de B.*

2 Suites numériques

2.1 Exercice (suites géométriques)

Soit $a \in \mathbb{R}$, on pose $u_n = a^n$.

1. Montrer : si $a > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$.
2. Montrer : si $-1 < a < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 0$.
3. Montrer : si $a \leq -1$, alors (u_n) diverge.

2.2 Exercice

Soit (u_n) une suite réelle.

1. Montrer que si $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (1/u_n) = 0$.
2. Montrer que toute suite convergente est bornée.
3. Soit (v_n) une suite réelle convergeant vers 0. Montrer que si (u_n) est bornée, alors $(u_n v_n)$ converge aussi vers 0.
4. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n v_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) \times \lim\limits_{n \to +\infty} (v_n)$ pour u et v deux suites convergeant vers une limite réelle finie. *Indication :* remarquer que $ab - cd = (a-c)b + c(b-d)$, pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

2.3 Exercice (calculs de limites)

Calculer les limites (si elles existent) des suites suivantes :

1. $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$;
2. (u_n) définie par $u_1 = 0.23$, $u_2 = 0.233$, $u_3 = 0.2333$, etc ;
3. $\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$;
4. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$;
5. (v_n) définie par $v_1 = \sqrt{2}$, $v_n = \sqrt{2v_{n-1}}$. Utiliser ln et le point 4 ;
6. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
7. $\frac{n^2-3n+2}{2n^2+5n-34}$; $\sqrt{n + \sin(n)}$; $\frac{1}{n+(-1)^n}$; $\frac{3n}{n+\cos(n)}$.

2.4 Exercice

1. Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer (par récurrence) que $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$. Déduire que (u_n) converge.
2. (Série harmonique) Soit $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (a) Avec une intégrale, montrer que $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire que $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$. Limite de H_n ?
   (c) On pose $v_n = H_n - \ln(n)$. Montrer que (v_n) est positive et décroissante. Conclusion ?

2.5 Exercice

Montrer que la suite $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ ne converge pas.

2.6 Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer la limite de $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$?
2. On pose

$$v_n = \frac{1}{1 + \sqrt{n+1} + (-1)^n \sqrt{n-1}}.$$

En utilisant les suites extraites v_{2n} et v_{2n+1}, montrer que la suite (v_n) ne converge pas.

2.7 Exercice (somme de Cesàro)

Pour $n \in N$, soit (u_n) une suite réelle que l'on suppose convergente vers $l \in \mathbb{R}$. L'objectif est de montrer que

$$v_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k \to l.$$

1. Montrer que

$$v_n - l = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (u_k - l).$$

2. Écrire la définition de $u_n \to l$.
3. On fixe $\varepsilon > 0$. Montrer que

$$|v_n - l| \leq \frac{A}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N}^{n} |u_k - l|, \qquad \text{avec } A = \sum_{k=0}^{N-1} |u_k - l| \in \mathbb{R}$$

et $N \in \mathbb{N}$ bien choisi. *Indication :* On utilisera l'inégalité triangulaire "généralisée" : pour a_i des réels,

$$\left| \sum_{i=0}^{n} a_i \right| \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i|$$

4. Écrire la définition de $\frac{A}{n+1} \to 0$. A partir de quel rang N_{max} est-on sûr d'avoir à la fois $\frac{A}{n+1} \leq \varepsilon$ et $\frac{1}{n+1} \sum_{k=N}^{n} |u_k - l| \leq \varepsilon$?
5. Déduire que $\forall n \geq N_{max}$, $|v_n - l| \leq 2\,\varepsilon$. Conclure.

2.8 Exercice

1. **[2]** Étudier la convergence de $a_n = \sqrt{n + \sin(n)}$.
2. **[2]** Étudier la convergence de $b_n = \sqrt{n^2+1} - n$.
3. **[3]** On considère $u_n = \dfrac{n\ln(n) - 1}{n}$. Montrer que (u_n) est minorée par la suite $v_n = \ln(n) - 1$. Conclure quant à la convergence de (u_n).

2.9 Exercice

Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$.

1. **[2]** Montrer que u_n est croissante, que v_n est décroissante et que $u_n - v_n \longrightarrow 0$.
2. **[1]** Conclure quant à la convergence de u_n et v_n (on ne cherchera pas à calculer leur limite).

2.10 Exercice

Pour $n \geq 1$, on considère la suite
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}.$$

1. Montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. Conclure quant à la convergence de (S_n).

3 Continuité de fonctions réelles

3.1 Exercice

1. Montrer que toute fonction périodique non constante n'admet pas de limite en $+\infty$;
2. Montrer que toute fonction croissante majorée admet une limite en $+\infty$.

3.2 Exercice

Peut-on prolonger par continuité les fonctions suivantes ?

1. $f(x) = \sin(x)\sin(1/x)$;
2. $g(x) = \dfrac{\ln(\mathrm{ch}(x))}{x}$;
3. $h(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$.

3.3 Exercice

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$. On dit que x_0 est un **point fixe** de f si $f(x_0) = x_0$.

1. Comment peut-on traduire graphiquement le fait que f admette un point fixe ?
2. Montrer que si f est continue, alors f admet un point fixe. (Poser $h(x) = f(x) - x$).
3. Trouver une fonction $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ décroissante sans point fixe.
4. Montrer que si $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ est croissante, alors elle admet un point fixe. *Indication :* Considérer $A := \{x \in [0,1], g(x) \geq x\}$ et montrer que le sup de A (existence ?) est un point fixe de g.

3.4 Exercice

On considère $f : \mathbb{R} \setminus \{1/3\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, trouver δ tel que ($x \neq 1/3$ et $|x| \leq \delta$) $\Longrightarrow |f(x) + 3| \leq \varepsilon$.

3.5 Exercice

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(a) = f(b)$. On pose $g(t) = f(t + \frac{b-a}{2}) - f(t)$.

1. Montrer que g s'annule en au moins un point de l'intervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$.
2. Application : une personne parcourt 4km en 1h. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 minutes durant lequel elle parcourt exactement 2km.

3.6 Exercice

Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(x)^2 = 1$ pour tout $x \in I$. Montrer que f est constante égale à 1 ou -1.

3.7 Exercice

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée. Les bornes sont-elles forcément atteintes ?

3.8 Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et telle que $f(x) = f(2x)$ pour tout x réel. Montrer que f est constante. *Indication :* Montrer que pour tout x, on a l'égalité $f(x) = f(\frac{x}{2^n})$.

3.9 Problème

Soit $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$. On considère

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^n + x^{n-1} + ... + x - 1. \end{aligned}$$

1. (a) Soit $n \geq 1$. Justifier que f_n est continue.
   (b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on notera a_n.
   (c) Calculer a_1 et a_2.
   (d) Montrer que $\forall n \geq 2$, on a l'encadrement $0 \leq a_n \leq 1$.
   La suite du problème est consacrée à l'étude de la convergence de la suite (a_n).
2. (a) Exprimer $f_{n+1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$ et de x^{n+1}.
   (b) Montrer que $f_n(a_{n+1}) < 0$.
   (c) Déduire que $a_{n+1} < a_n$.
   (d) Conclure quant à la convergence de (a_n).
3. Dans cette question, on va calculer la valeur de la limite l de (a_n). On suppose que $n \geq 2$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_n)^i = 1$.
   (b) Déduire que $\dfrac{a_n(1 - a_n^n)}{1 - a_n} = 1$, puis que $a_n = \frac{1}{2}(1 + a_n^{n+1})$.
   (c) Justifier que $a_n^{n+1} < a_2^{n+1}$. Déduire que $a_n^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Conclure.

3.10 Problème

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue qui vérifie $f(x) = f(x^2)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. (a) Montrer que f est une fonction paire, c'est-à-dire telle que $f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $f(x) = f(\sqrt{x})$.
2. Soit x_0 un réel strictement positif. On définit une suite réelle par $u_0 = x_0,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (x_0)^{\frac{1}{2^n}}$. On rappelle que $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ (pour x positif).
   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 0$. Déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_n) = 1$.
3. (a) Justifier que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(1)$.
   (b) Montrer que la suite $(f(u_n))$ est constante, égale à $f(x_0)$, et déduire que $\forall x > 0,\ f(x) = f(1)$.
   (c) En utilisant 1.(a), montrer que $\forall x < 0,\ f(x) = f(1)$.
   (d) Justifier que $f(0) = f(1)$.
   (e) Conclusion : quelle propriété remarquable de f avons-nous montré ?

3.11 Exercice

Montrer que $x \longmapsto \cos(x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

4 Dérivabilité de fonctions réelles

4.1 Exercice

Soient $g : I \longrightarrow J$ dérivable en $x_0 \in I$ et $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $g(x_0) \in J$, avec I, J deux intervalles réels.
En utilisant un lemme du cours, montrer que $f \circ g$ est dérivable en x_0 et que

$$(f \circ g)'(x_0) = g'(x_0)f'(g(x_0)).$$

4.2 Exercice

Soit $P(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)...(X - \alpha_n)$ un polynôme à n racines réelles distinctes 2 à 2.

1. Montrer que P' admet $n - 1$ racines distinctes.
2. Montrer que $P + P'$ admet $n - 1$ racines distinctes. *Indication : utiliser* $f : x \longmapsto P(x)\exp(x)$
3. Déduire que toutes les racines de $P + P'$ sont réelles.

4.3 Exercice (Règle de l'Hospital)

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables, et $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose :

- $f(x_0) = g(x_0) = 0$;
- $\forall x \in I \setminus \{x_0\}\,, g'(x) = 0$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$.

Montrer que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Indication : Considérer $h : x \mapsto g(a)f(x) - f(a)g(x)$ pour $a \in I \setminus \{x_0\}$.

4.4 Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Supposons que pour tout x, $f'(x) < 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)) = 0$.
Montrer que f ne s'annule jamais.

4.5 Exercice

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Supposons que $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Posons $g(x) = f(x + 1) - f(x)$.
Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

4.6 Exercice

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable et telle que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$. Montrer qu'il existe un élément c de $]a, b[$ tel que $f(c) = f''(c)$.
Indication : appliquer le théorème de Rolle à la fonction $g(x) = e^x(f(x) - f'(x))$.

4.7 Exercice

On considère $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $f(1) = 0$. L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c}$.

1. On pose $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ si $x \in]0, 1[$, $g(0) = 0$ sinon.
   (a) **[1]** Justifier que g est continue et dérivable sur $]0, 1]$.

(b) **[2]** Montrer que g est continue en 0.

2. (a) **[1]** Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0,1]$.

   (b) **[2]** Vérifier que g satisfait aux hypothèses du théorème de Rolle, puis montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $g'(c) = 0$.

   (c) **[1]** Conclure.

4.8 Exercice

On considère $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[0,1]$, dérivables sur $]0,1[$ et vérifiant les conditions : $\forall\ x \in]0,1[,\ g'(x) \neq 0$ et $f(0) = g(0) = 0$.

1. **[2]** Soit $x \in]0,1]$. En appliquant le théorème des accroissements finis à g sur $[0,x]$, montrer que $g(x) \neq 0$.
2. Soit $x \in]0,1]$. On pose

$$\begin{aligned} \varphi : [0,x] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(x)g(t) - g(x)f(t) \end{aligned}$$

   (a) **[1]**Justifier que φ est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x]$.

   (b) **[1]** Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(x)$.

   (c) **[2]** Quel théorème peut-on appliquer ? Montrer qu'il existe $c \in]0,x[$ tel que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$