Introduction à la théorie des catégories

Mémoire de Master Agrégation
Réalisé sous la direction de Dragos FRATILA

L'objectif de ce mémoire est d'avoir une ouverture sur le M2 recherche 2019/2020. La théorie des catégories permet d'avoir une vision globale des choses, de faire des liens entre des notions à priori différentes et d'organiser des structures et objets similaires. L'idée directrice est, en plus d'étudier la théorie, de comprendre comment des objets ou résultats déjà connus peuvent être compris comme des manifestations catégoriques.

1 Catégories, foncteurs et transformations naturelles

Définition 1. *Une **catégorie** $\mathcal{C}$ est la donnée :*
- *d'une collection d'objets $Ob(\mathcal{C})$;*
- *pour tous $x, y \in Ob(\mathcal{C})$, une collection $Hom_{\mathcal{C}}(x, y)$ de **flèches** ou **morphismes** ;*
- *pour tout $x \in Ob(\mathcal{C})$, une fonction identité $1_x \in Hom_{\mathcal{C}}(x, x)$;*
- *pour tous $x, y, z \in Ob(\mathcal{C})$, une fonction composition*

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{C}}(y, z) \times Hom_{\mathcal{C}}(x, y) &\to Hom_{\mathcal{C}}(x, z) \\ (g, f) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

qui doivent de plus satisfaire les deux axiomes suivants :
- *pour tous morphismes h, g, f composables, on a $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$;*
- *pour tout $f \in Hom_{\mathcal{C}}(x, y)$, $f \circ 1_x = 1_y \circ f = f$.*

Exemples : Set (objets : ensembles, flèches : applications) ; **Grp** (groupes, morphismes de groupes) ; **Top***(espaces topologiques pointés, fonctions continues) ; $\mathbf{Vect}_K$ (K-espaces vectoriels, applications linéaires).

Définition 2. *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un **foncteur** $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est la donnée :*
- *d'une fonction objet $T : Ob(\mathcal{C}) \longrightarrow Ob(\mathcal{D})$, $c \longmapsto Tc$;*
- *d'une fonction flèche :*

$$\begin{aligned} T : Hom(\mathcal{C}) &\longrightarrow Hom(\mathcal{D}) \\ [f : c \to c'] &\longmapsto [Tf : Tc \to Tc'] \end{aligned}$$

satisfaisant les propriétés : pour tout objet c, $T(1_c) = 1_{T(c)}$; pour f et g composables, $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$.

Soit $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un foncteur.
Il est dit **plein** si, pour tous objets X, Y, $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ est surjectif ;
Il est dit **fidèle** si, pour tous objets X, Y, $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ est injectif ;
Il est dit **essentiellement surjectif** si pour tout objet Y de $\mathcal{D}$, il existe $X \in \mathcal{C}$ tel que $Y \simeq F(X)$.

Exemples : foncteur "oubli" : $U : \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Set}$, $G \longmapsto G$; $(f : G \to H) \longmapsto (Uf : G \to H)$;
groupe fondamental π_1 : $\mathbf{Top^*} \longrightarrow \mathbf{Grp}$, $(X, x_0) \longmapsto \pi_1(X, x_0)$, $f \longmapsto f \circ -$.

Si D^2 et S^1 désignent respectivement le disque et le cercle unité de $\mathbb{R}^2$, la fonctorialité de π_1 permet de montrer qu'il n'existe pas de rétraction par déformation $D^2 \longrightarrow S^1$, ce qui permet de montrer un théorème de point fixe :

Théorème 3 (Théorème de Brouwer)**.** *Toute fonction continue $f : D^2 \longrightarrow D^2$ admet au moins un point fixe.*

Définition 4. *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories et T, S deux foncteurs $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$. Une **transformation naturelle** est une collection $\{\eta_X : S(X) \longrightarrow T(X)\}_{X \in Ob(\mathcal{C})}$ telle que pour chaque flèche $f : X \longrightarrow Y$, le diagramme commute :*

$$\begin{tikzcd} S(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "Sf"'] & T(X) \arrow[d, "Tf"] \\ S(Y) \arrow[r, "\eta_Y"'] & T(Y) \end{tikzcd}$$

Si tous les η_X sont des isomorphismes, on dit que η est un isomorphisme naturel et on note $T \simeq S$.

Définition 5. *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Une **équivalence de catégories** est une paire de foncteurs $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ tels que $1_{\mathcal{C}} \simeq G \circ F$ et $1_{\mathcal{D}} \simeq F \circ G$.*

Application : reformulation du théorème de Galois.
Soit K/F une extension galoisienne, et $G = \mathrm{Gal}(K/F)$. On note $\mathcal{L}$ la catégorie ayant pour objets les corps $F \subseteq L \subseteq K$ et pour flèches les morphismes de corps et $\textbf{G-Fin}^{tr}$ celle avec pour objets les ensembles finis munis d'une action de G transitive et pour flèches les fonctions qui préservent l'action de G.

Théorème 6 (Galois)**.** *Le foncteur* $\psi : \mathcal{L}^{op} \longrightarrow \textbf{G-Fin}^{tr}$, $L \mapsto Hom_F(L, K)$ *définit une équivalence de catégories.*

Cette formulation a l'avantage de suggérer des généralisations de ce théorème. Par exemple, en topologie, on peut penser à {revêtements connexes de X} $\simeq \textbf{G-Fin}^{tr}$, avec $G = \pi_1(X)$.

2 Lemme de Yoneda

Définition 7. *Soit* $\mathcal{C}$ *une catégorie et* $c \in Ob(\mathcal{C})$*. Le **foncteur représenté par c**, noté* $\mathcal{C}(c, -)$ *est :*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(c,-) : \mathcal{C} &\longrightarrow \textbf{Set} \\ x \longmapsto Hom_{\mathcal{C}}(c,x), &\quad [f : x \longrightarrow y] \longmapsto [f \circ - : Hom_{\mathcal{C}}(c,x) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(c,y)] \end{aligned}$$

Définition 8. *Un foncteur* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ *est **représentable** si il existe* $c \in \mathcal{C}$ *et un isomorphisme naturel* $F \simeq \mathcal{C}(c, -)$.

Exemples : Le foncteur oubli $U : \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Set}$ est représenté par le groupe $\mathbb{Z}$. Si X est un ensemble fini, l'espace vectoriel libre sur X représente $\mathbf{Vect}_K \longrightarrow \mathbf{Set}$, $V \mapsto Hom_{\mathbf{Set}}(V, X)$.

Théorème 9 (Yoneda)**.** *Pour tout foncteur* $F : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$*, on a une bijection* $Hom(\mathcal{C}(c, -), F) \simeq Fc$*, qui identifie une transformation naturelle* $\eta : \mathcal{C}(c, -) \longrightarrow F$ *avec l'élément* $\eta_c(1_c)$ *de* Fc.

3 Produits et coproduits

Les notions de *produit* et de *coproduit* permettent de faire des liens des notions connues, mais à priori différentes.

Définition 10. *Soit* $\mathcal{C}$ *une catégorie et* $x, y \in Ob(\mathcal{C})$*. Un **produit** de* x *et* y *est un objet* $x \sqcap y$ *et deux morphismes* $p : x \sqcap y \longrightarrow x$; $q : x \sqcap y \longrightarrow y$ *qui vérifient la propriété universelle suivante : pour tout objet* z *de* $\mathcal{C}$*, pour tous morphismes* α, β *comme ci-dessous, il existe un unique* γ *tel que le diagramme commute :*

$$\begin{tikzcd} & z \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, dashed, "\exists!\gamma"] \arrow[dr, "\beta"] & \\ x & x \sqcap y \arrow[l, "p"] \arrow[r, "q"'] & y \end{tikzcd}$$

Proposition 11. *Dans **Set**, le produit est le produit cartésien ; dans **Grp**, c'est le produit direct ; dans* $\mathbf{Vect}_K$*, c'est la somme directe* $\oplus$ *; dans les préordres* $(\mathbb{R}, \leq)$ *et* $(\mathbb{N}, |)$*, c'est respectivement le* min et le pgcd.

Proposition 12. *Dans la catégorie **Fields** dont les objets sont les corps et les flèches les homomorphismes de corps, le produit n'existe pas toujours.*

Par exemple, $\mathbb{Q}(i) \sqcap \mathbb{Q}(i)$ n'existe pas à cause du morphisme donné par la conjugaison complexe.

Proposition 13. *Soient* $\mathcal{C}$ *une catégorie et* $X, Y \in \mathcal{C}$*. Alors le foncteur* $P : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \textbf{Set}$*,*
$Z \longmapsto Hom_{\mathcal{C}}(Z, X) \times Hom_{\mathcal{C}}(Z, Y)$ *est représentable par* c *si et seulement si* $X \sqcap Y$ *existe, auquel cas* $P \simeq \mathcal{C}(-, c)$.

Remarque : la notion duale de **coproduit** $x \sqcup y$ se définit de manière symétrique, avec le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & z & \\ x \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, "i"'] & x \sqcup y \arrow[u, dashed, "\exists!\gamma"] & y \arrow[ul, "\beta"'] \arrow[l, "j"] \end{tikzcd}$$

Dans **Grp**, le coproduit est le produit libre. Dans $\mathbf{Vect}_K$, c'est la somme directe !

Références

[McL] Saunders MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, 1971.
[R] Emily Riehl, *Category Theory in Context*, Cambridge University Press, 2014.
[L] Tom Leinster, *Basic Category Theory*, Cambridge University Press, 2014.