Déformations de catégories abéliennes

Mémoire de Master Mathématiques Fondamentales

Quentin EHRET

Sous la direction du Pr. Abdenacer MAKHLOUF

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

UNIVERSITÉ HAUTE-ALSACE

[LVB1] *Deformation Theory of Abelian Categories*, Van Den Bergh, Loewen, Transactions of the American Mathematical Society, 2006 ;

[LVB2] *Hochschild cohomology of abelian categories and ringed spaces*, Van Den Bergh, Loewen, Advances in Mathematics, 2005 ;

[L3] *Obstruction Theory of objects in abelian and derived Categories*, Lowen, Communications in Algebra, 2004.

Déformations d'algèbres associatives : définition

Soient $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique 0 et (A, μ_0) une algèbre associative sur $\mathbb{K}$. Alors, déformer (A, μ_0) revient à munir $A[[t]]$ d'une application $\mathbb{K}[[t]]$-bilinéaire μ_t qui s'écrit sous la forme

$$\mu_t = \sum_{i \geq 0} \mu_i t^i,$$

où les μ_i sont des applications $\mathbb{K}[[t]]$-bilinéaires $A \times A \longrightarrow A$, telle que :

$$\mu_t\left(\mu_t(x, y), z\right) = \mu_t\left(x, \mu_t(y, z)\right) \qquad \forall x, y, z \in A.$$

Déformations d'algèbres associatives : cohomologie de Hochschild

Soit M un A-bimodule. On définit alors les **espaces de cochaines** par :

$$\begin{cases} C^n(A, M) &= \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, M), \qquad n > 0 \\ C^0(A, M) &= M, \\ C^n(A, M) &= 0, \qquad n < 0 \end{cases}$$

Déformations d'algèbres associatives : cohomologie de Hochschild

On définit un **opérateur cobord** d^n
défini pour tout $(a_1, a_2, ..., a_{n+1}) \in A^{\otimes(n+1)}$ par :

$$\begin{aligned}(d^n\varphi)(a_1, a_2, ..., a_{n+1}) &= a_1\varphi(a_2, ..., a_{n+1}) \\ &+ \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\varphi(a_1, ..., a_i a_{i+1}, ..., a_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1}\varphi(a_1, ..., a_n)a_{n+1}\end{aligned}$$

et pour $n = 0$,

$$(d^0\varphi)(a) = a\varphi - \varphi a, \quad \varphi \in C^0(A, M) = M, \quad a, a_i \in A.$$

Déformations d'algèbres associatives : contrôle par la cohomologie

Théorème (39)

- *Si* (A, μ_0) *est une algèbre associative, et* $\mu_t = \sum_i \mu_i t^i$ *une déformation formelle de* A *telle que* $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{p-1} = 0$ *pour un indice* p *quelconque, alors* μ_p *est un 2-cocycle de Hochschild.*
- *Si* $H^3(A, A) = 0$*, alors tout 2-cocyle donne une déformation de* μ_0*.*

Déformations d'algèbres associatives : équivalence

On considère μ_t et μ'_t deux déformations formelles de (A, μ_0) algèbre associative. Les deux déformations sont alors dites équivalentes s'il existe un isomorphisme formel :

$$\varphi_t : A[[t]] \longrightarrow A[[t]],$$

$\mathbb{K}[[t]]$-linéaire, tel que

$$\varphi_t(x) = x + \varphi_1(x)t + \varphi_2(x)t^2 + \dots \qquad \text{pour } x \in A$$

et vérifiant

$$\varphi_t(\mu_t(x, y)) = \mu'_t(\varphi_t(x), \varphi_t(y)), \qquad \forall x, y \in A.$$

Rappels de théorie des catégories : catégories linéaires

Soit R un anneau commutatif.

Définition (Catégorie R-linéaire)

*Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite **R-linéaire** si :*

- *$\mathcal{C}$ est pré-additive ;*
- *il existe un homomorphisme d'anneaux $\rho : R \longrightarrow Nat(1_{\mathcal{C}}, 1_{\mathcal{C}})$.*

Rappels de théorie des catégories : catégories linéaires

Soit R un anneau commutatif.

Définition (Catégorie R-linéaire)

*Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite **R-linéaire** si :*

- *$\mathcal{C}$ est pré-additive ;*
- *il existe un homomorphisme d'anneaux $\rho : R \longrightarrow Nat(1_{\mathcal{C}}, 1_{\mathcal{C}})$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\rho(r)_X"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "\rho(r)_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

Rappels de théorie des catégories : catégories abéliennes

Définition (Catégorie abélienne)

*Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite **abélienne** lorsqu'elle satisfait :*

(1) *Pour tout objet $C \in \mathcal{C}$, il existe une loi $+$ additive ;*

(2) *$\mathcal{C}$ a un objet nul ;*

(3) *Toute paire d'objets a un produit et un coproduit ;*

(4) *Toute flèche a un noyau et un conoyau ;*

(5) *Tout monomorphisme de $\mathcal{C}$ est un noyau et tout épimorphisme de $\mathcal{C}$ est un conoyau.*

Rappels de théorie des catégories : objet (co)plat

Définition

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie R-linéaire abélienne.

- *$X \in \mathcal{C}$ est **plat** (sur R) si le foncteur $- \otimes X : mod(R) \longrightarrow \mathcal{C}$ est exact.*
- *$X \in \mathcal{C}$ est **coplat** (sur R) si le foncteur $Hom(-, X) : mod(R) \longrightarrow \mathcal{C}$ est exact.*

Rappels de théorie des catégories : objet (co)plat

Proposition

Soit $c \in \mathcal{C}$ abélienne R-linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) *c est plat.*

(2) $Tor_n^R(-, c) = 0 \; \forall n \geq 1$.

(3) $Tor_1^R(-, c) = 0$.

Rappels de théorie des catégories : objet (co)plat

Proposition

Soit $c \in \mathcal{C}$ abélienne R-linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) *c est plat.*

(2) $Tor_n^R(-, c) = 0 \ \forall n \geq 1$.

(3) $Tor_1^R(-, c) = 0$.

Proposition

Soit $c \in \mathcal{C}$ abélienne R-linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) *c est coplat.*

(2) $Ext_R^n(-, c) = 0 \ \forall n \geq 1$.

(3) $Ext_R^1(-, c) = 0$.

Vers la définition : foncteurs (co)effaçables

Définition

(1) *Un foncteur $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, avec $\mathcal{B}$ pré-additive est dit **effaçable** si pour tout objet a de $\mathcal{A}$, il existe un monomorphisme $u : a \longrightarrow a'$ tel que $F(u) = 0$.*

(1') *Il est dit **co-effaçable** si pour tout objet a de $\mathcal{A}$, il existe un épimorphisme $u : a \longrightarrow a'$ tel que $F(u) = 0$.*

(2) *Un foncteur $F : \mathcal{A} \longrightarrow Ab$ est dit **faiblement effaçable** si pour tout objet a de $\mathcal{A}$, pour tout élément $x \in F(a)$, il existe un monomorphisme $u : a \longrightarrow a'$ tel que $F(u)(x) = 0$.*

Vers la définition : foncteurs (co)effaçables

Proposition (42)

Soit $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif entre catégories abéliennes. Supposons que $\mathcal{A}$ ait suffisamment d'injectifs. Alors :

$$F \text{ est effaçable} \iff F(I) = 0 \text{ pour tous les injectifs } I \text{de} \mathcal{A}.$$

Vers la définition : foncteurs (co)effaçables

Proposition (42)

Soit $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif entre catégories abéliennes. Supposons que $\mathcal{A}$ ait suffisamment d'injectifs. Alors :

$$F \text{ est effaçable} \iff F(I) = 0 \text{ pour tous les injectifs } I \text{ de } \mathcal{A}.$$

$(\Longrightarrow)$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r, "u"] \arrow[d, "id"'] & u(I) \arrow[dl, dashed, "\exists\beta"] \\
 & I &
\end{tikzcd}$$

Vers la définition : foncteurs (co)effaçables

Proposition (42)

Soit $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif entre catégories abéliennes. Supposons que $\mathcal{A}$ ait suffisamment d'injectifs. Alors :

$$F \text{ est effaçable} \Longleftrightarrow F(I) = 0 \text{ pour tous les injectifs } I de \mathcal{A}.$$

$(\Longrightarrow)$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(I) \arrow[r, "F(u)"] \arrow[d, "id"'] & F(u(I)) \arrow[dl, dashed, "F(\beta)"] \\
 & F(I) &
\end{tikzcd}$$

Vers la définition : foncteurs (co)effaçables

Proposition (42)

Soit $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur additif entre catégories abéliennes. Supposons que $\mathcal{A}$ ait suffisamment d'injectifs. Alors :

$$F \text{ est effaçable} \Longleftrightarrow F(I) = 0 \text{ pour tous les injectifs } I de \mathcal{A}.$$

$(\Longleftarrow)$

Soit $a \in \mathcal{A}$. Il existe $u : a \longrightarrow I$ monomorphisme et I injectif. En appliquant F, on a $F(u) : F(a) \longrightarrow F(I) = 0$, donc $F(u) = 0$.

Vers la définition : platitude

Définition (Platitude pour une catégorie R-linéaire)

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie R-linéaire. $\mathcal{C}$ est dite ***plate*** *(sur R) si pour tous objets $c, c' \in \mathcal{C}$, $Hom_{\mathcal{C}}(c, c')$ est un objet plat de $Mod(R)$.*

Définition (Platitude pour une catégorie R-linéaire *abélienne*)

Une catégorie R-linéaire abélienne $\mathcal{C}$ est dite ***plate*** *(sur R) si pour tout $X \in mod(R)$, $Ext^1_R(X, -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ est effaçable.*

Vers la définition : platitude

Proposition (48)

Soit $\mathcal{C}$ R-linéaire abélienne. Supposons que $\mathcal{C}$ ait suffisamment d'injectifs. Alors $\mathcal{C}$ est plate sur R si et seulement si les injectifs de $\mathcal{C}$ sont coplats.

Vers la définition : platitude

Proposition (48)

Soit $\mathcal{C}$ R-linéaire abélienne. Supposons que $\mathcal{C}$ ait suffisamment d'injectifs. Alors $\mathcal{C}$ est plate sur R si et seulement si les injectifs de $\mathcal{C}$ sont coplats.

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} \text{ est plate sur R } &\iff \mathrm{Ext}^1_R(X,-) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \text{ est effaçable } \forall X \in \mathrm{mod}(R) \\
&\iff \mathrm{Ext}^1_R(X,I) = 0 \ \ \forall X \in \mathrm{mod}(R), \ \ \forall I \text{ injectif de } \mathcal{C} \\
&\iff I \text{ est coplat.}
\end{aligned}$$

Vers la définition : constructions fonctorielles

Soient R et S deux anneaux commutatifs, et $\theta : R \longrightarrow S$ un homomorphisme d'anneaux.

Définition (Construction $(\overline{\ })$)

- *Soit $M \in Mod(S)$. On désigne par $\overline{M}$ le module M vu comme R-module via $\theta : R \longrightarrow S$. L'action est donnée par $(r, m) \longmapsto \theta(r) \cdot m$, pour $r \in R$ et $m \in M$.*
- *Soit $\mathcal{B}$ une catégorie S-linéaire. On désigne par $\overline{\mathcal{B}}$ la catégorie R-linéaire définie par $Ob(\overline{\mathcal{B}})=Ob(\mathcal{B})$ et $\overline{\mathcal{B}}(B, B') = \overline{\mathcal{B}(B, B')}$;*

Vers la définition : constructions fonctorielles

Définition (Construction $S \otimes_R (-)$)

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie R-linéaire.
On désigne par $S \otimes_R \mathcal{A}$ la catégorie S-linéaire définie par $Ob(S \otimes_R \mathcal{A})=Ob(\mathcal{A})$ et $(S \otimes_R \mathcal{A})(A, A') = S \otimes_R \mathcal{A}(A, A')$.

Vers la définition : constructions fonctorielles

Définition (Catégorie S-linéaire des S-objets)

Soit $(\mathcal{C}, \rho)$ une catégorie R-linéaire. On définit la catégorie S-linéaire des S-objets, notée $\mathcal{C}_S$ par :

- *$Ob(\mathcal{C}_S) = \{(c, \varphi_c)\}$, où c est un objet de $\mathcal{C}$ et $\varphi_c : S \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(c, c)$ morphisme d'anneaux vérifiant $\varphi_c \circ \theta = \rho_c$.*
- *Pour les morphismes, on garde les morphismes de $\mathcal{C}$ qui font commuter le diagramme suivant, pour tout $s \in S$:*

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\varphi_c(s)"] \arrow[d, "f"'] & c \arrow[d, "f"] \\ d \arrow[r, "\varphi_d(s)"'] & d \end{tikzcd}$$

Définition : déformation linéaire

On considère R et S deux anneaux commutatifs, et $\theta : R \longrightarrow S$ un homomorphisme d'anneaux.

Définition (Déformation pour catégories pré-additives)

- *Soit $\mathcal{B}$ une catégorie S-linéaire. Une* ***R-déformation*** *de $\mathcal{B}$ est une catégorie R-linéaire $\mathcal{A}$ munie d'un foncteur R-linéaire $\mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathcal{B}}$, qui induit une équivalence de catégories $S \otimes_R \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$.*
- *Si $S \otimes_R \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est un isomorphisme, la déformation est dite* ***stricte****.*
- *Si $\mathcal{A}$ est plate sur R, la déformation est dite* ***plate****.*

Définition : déformation abélienne

On considère R et S deux anneaux commutatifs, et $\theta : R \longrightarrow S$ un homomorphisme d'anneaux.

Définition (Déformation pour catégories abéliennes)

- *Soit $\mathcal{D}$ une catégorie S-linéaire abélienne. Une **R-déformation** de $\mathcal{D}$ est une catégorie R-linéaire $\mathcal{C}$ munie d'un foncteur R-linéaire $\overline{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{C}$, qui induit une équivalence de catégories $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}_S$.*
- *Si $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}_S$ est un isomorphisme, la déformation est dite **stricte**.*
- *Si $\mathcal{C}$ est plate sur R, la déformation est dite **plate**.*

Un exemple

Exemple : Soient $\theta : R \longrightarrow S$ un morphisme surjectif entre deux anneaux commutatifs. On définit alors le foncteur :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mod}(S) &\longrightarrow \mathrm{Mod}(R)_S \\ M &\longmapsto (\overline{M}, \varphi_M) \end{aligned}$$

Il définit une équivalence de catégories $\mathrm{Mod}(S) \simeq \mathrm{Mod}(R)_S$.
On a donc une déformation $\mathrm{Mod}(S) \longrightarrow \mathrm{Mod}(R)$.

Déformations nilpotentes

Définition

- *On dit qu'une R-déformation (linéaire comme abélienne) est* ***nilpotente*** *si l'idéal $I = Ker(\theta)$ est nilpotent, c'est à dire qu'il existe un entier naturel n tel que $I^n = 0$.*
- *Si $I^n = 0$, on dit que la déformation est* ***nilpotente d'ordre n***.

Exemple :

Soit $\mathbb{K}$ un corps, et $R = \mathbb{K}[x]/x^2$.

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{K}[x]/x^2 &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \overline{1} &\longmapsto \lambda \\ \overline{x} &\longmapsto \mu \end{aligned}$$

Exemple :

Soit $\mathbb{K}$ un corps, et $R = \mathbb{K}[x]/x^2$.

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{K}[x]/x^2 &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \overline{1} &\longmapsto \lambda \\ \overline{x} &\longmapsto \mu \end{aligned}$$

$\mathrm{Ker}(\theta)^2 = \overline{0}$ dans $\mathbb{K}[x]/x^2$.

Exemple :

Soit $\mathbb{K}$ un corps, et $R = \mathbb{K}[x]/x^2$.

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{K}[x]/x^2 &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \overline{1} &\longmapsto \lambda \\ \overline{x} &\longmapsto \mu \end{aligned}$$

$\mathrm{Ker}(\theta)^2 = \overline{0}$ dans $\mathbb{K}[x]/x^2$.
$\mathrm{Mod}(R)_{\mathbb{K}} \cong \mathrm{Mod}(\mathbb{K})(= \mathrm{Vect}(\mathbb{K}))$, donc $\mathrm{Mod}(R)$ est une déformation nilpotente d'ordre 2 de $\mathrm{Vect}(\mathbb{K})$.

Équivalence de déformations abéliennes

Définition

Soit $\mathcal{D}$ une catégorie S-linéaire et $F_1 : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}_1$, $F_2 : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}_2$ deux déformations abéliennes de $\mathcal{D}$. Alors F_1 et F_2 sont dites ***équivalentes*** *s'il existe une équivalence de catégories R-linéaires $\phi : \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ telle qu'il existe un isomorphisme naturel $\phi \circ F_1 \cong F_2$.*

Relèvements

Soient $\overline{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{C}$ deux catégories et $F : \overline{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur.

Définition

Soit $C \in \mathcal{C}$. Un ***relèvement de** C **le long de** F* *est un couple $(\overline{C}, \gamma_C)$, où $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}$ et $\gamma_C : C \cong F(\overline{C})$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}$.*

Relèvements

Définition

Soit $f : C \longrightarrow D$ un morphisme de $\mathcal{C}$ et des relèvements $\gamma_C : C \cong F(\overline{C})$ et $\gamma_D : D \cong F(\overline{D})$. Un ***relèvement de*** *f* ***le long de*** *F (relativement à γ_C et γ_D) est une flèche $\overline{f} : \overline{C} \longrightarrow \overline{D}$ telle que $F(\overline{f}) \circ \gamma_C = \gamma_D \circ f$.*
L'ensemble des relèvements de f le long de F relativement à γ_C et γ_D est noté $L_F(f|\gamma_C, \gamma_D)$.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\gamma_C"] \arrow[d, "f"'] & F(\overline{C}) \arrow[d, "F(\overline{f})"] \\ D \arrow[r, "\gamma_D"'] & F(\overline{D}) \end{tikzcd}$$

Relèvements

Soient $(C, d_C), (D, d_D)$ deux pré-complexes, $f, g \in \mathrm{Hom}^n(C, D)$ deux flèches graduées et $H : f \longrightarrow g$ une homotopie. Un **relèvement gradué de H le long de F** relativement à $\overline{d_C}, \overline{d_D}, \overline{f}, \overline{g}$ est un relèvement gradué $\overline{H}$ de H qui est une homotopie $\overline{H} : \overline{f} \longrightarrow \overline{g}$.

Relèvements

Soient $(C, d_C), (D, d_D)$ deux pré-complexes, $f, g \in \mathrm{Hom}^n(C, D)$ deux flèches graduées et $H : f \longrightarrow g$ une homotopie. Un **relèvement gradué de H le long de F** relativement à $\overline{d_C}, \overline{d_D}, \overline{f}, \overline{g}$ est un relèvement gradué $\overline{H}$ de H qui est une homotopie $\overline{H} : \overline{f} \longrightarrow \overline{g}$.

Définition

On a alors le groupoïde $L_F(H|\overline{d_C}, \overline{d_D}, \overline{f}, \overline{g})(=: L_F(H))$:

- *Objets : relèvements gradués de H relativement à $\overline{d_C}, \overline{d_D}, \overline{f}, \overline{g}$;*
- *Morphismes $\overline{H} \longrightarrow \overline{H}'$: relèvements gradués de $0 : H \longrightarrow H$ relativement à $\overline{d_C}, \overline{d_D}, \overline{H}, \overline{H}'$.*

Notations pour le théorème suivant

- $F : \overline{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$ un foncteur additif.
- $\mathrm{Ker}(F)$ la catégorie (sans identités) ayant mêmes objets que $\overline{\mathcal{C}}$ et pour morphismes $\left\{f \in \overline{\mathcal{C}},\ \ F(f) = 0\right\}$
- $\mathrm{Ker}(F)^2$ la catégorie avec mêmes objets et pour morphismes $\left\{h \in \overline{\mathcal{C}},\ \ h = f \circ g,\ \ f, g \in \mathrm{Ker}(F)\right\}$.

On suppose F **plein** et $\mathrm{Ker}(F)^2 = 0$.

Notations pour le théorème suivant

Soient (C, d_C) et (D, d_D) deux pré-complexes de $\mathcal{C}$ et des relèvements gradués $\overline{C}$ et $\overline{\mathcal{D}}$.

$\left(\mathrm{Hom}(\overline{C}, \overline{D}), \overline{\delta}\right) \longrightarrow (\mathrm{Hom}(C, D), \delta)$ est surjective.

Rappel : $\delta^n(f) := d_D \circ f - (-1)^n f \circ d_C$.

Notations pour le théorème suivant

Soient (C, d_C) et (D, d_D) deux pré-complexes de $\mathcal{C}$ et des relèvements gradués $\overline{C}$ et $\overline{\mathcal{D}}$.

$\left(\mathrm{Hom}(\overline{C}, \overline{D}), \overline{\delta}\right) \longrightarrow (\mathrm{Hom}(C, D), \delta)$ est surjective.

Rappel : $\delta^n(f) := d_D \circ f - (-1)^n f \circ d_C$.

$$0 \longrightarrow (\mathfrak{C}, \overline{\delta}) \longrightarrow \left(\mathrm{Hom}(\overline{C}, \overline{D}), \overline{\delta}\right) \longrightarrow (\mathrm{Hom}(C, D), \delta) \longrightarrow 0.$$

Notations pour le théorème suivant

Soient (C, d_C) et (D, d_D) deux pré-complexes de $\mathcal{C}$ et des relèvements gradués $\overline{C}$ et $\overline{\mathcal{D}}$.

$(\mathrm{Hom}(\overline{C}, \overline{D}), \overline{\delta}) \longrightarrow (\mathrm{Hom}(C, D), \delta)$ est surjective.

Rappel : $\delta^n(f) := d_D \circ f - (-1)^n f \circ d_C$.

$$0 \longrightarrow (\mathfrak{C}, \overline{\delta}) \longrightarrow (\mathrm{Hom}(\overline{C}, \overline{D}), \overline{\delta}) \longrightarrow (\mathrm{Hom}(C, D), \delta) \longrightarrow 0.$$

Proposition (84)

$(\mathfrak{C}, \overline{\delta})$ est un complexe de cochaînes indépendant du choix des relèvements $\overline{d_C}$ et $\overline{d_D}$.

Un théorème d'obstruction (86)

Soient $f, g \in \mathrm{Hom}^n(C, D)$; $h : f \longrightarrow g$ une homotopie.
Supposons qu'il existe $\overline{f}, \overline{g}, \overline{h}$ des relèvements gradués de f, g, h tels que $\overline{\delta}(\overline{f}) = \overline{\delta}(\overline{g})$. Alors :

Un théorème d'obstruction (86)

Soient $f, g \in \mathrm{Hom}^n(C, D)$; $h : f \longrightarrow g$ une homotopie.
Supposons qu'il existe $\overline{f}, \overline{g}, \overline{h}$ des relèvements gradués de f, g, h tels que $\overline{\delta}(\overline{f}) = \overline{\delta}(\overline{g})$. Alors :

(1) Il existe une obstruction $o_n(h) = o_n(h|\overline{d_C}, \overline{d_D}, \overline{f}, \overline{g}) := [\overline{g} - \overline{f} - \overline{\delta}(\overline{h})] \in H^n(\mathfrak{C})$ telle que

$$o_n(h) = 0 \Longleftrightarrow L(h) \neq \emptyset.$$

Un théorème d'obstruction (86)

Soient $f, g \in \mathrm{Hom}^n(C, D)$; $h : f \longrightarrow g$ une homotopie.
Supposons qu'il existe $\overline{f}, \overline{g}, \overline{h}$ des relèvements gradués de f, g, h tels que $\overline{\delta}(\overline{f}) = \overline{\delta}(\overline{g})$. Alors :

(1) Il existe une obstruction $o_n(h) = o_n(h|\overline{d_C}, \overline{d_D}, \overline{f}, \overline{g}) := [\overline{g} - \overline{f} - \overline{\delta}(\overline{h})] \in H^n(\mathfrak{C})$ telle que

$$o_n(h) = 0 \Longleftrightarrow L(h) \neq \emptyset.$$

(2) Si $o_n(h) = 0$, la flèche

$$v_{n-1} : L(h)^2 \longrightarrow H^{n-1}(\mathfrak{C})$$
$$(\overline{h}, \overline{h}') \longmapsto [\overline{h}' - \overline{h}]$$

vérifie $v_{n-1}(\overline{h}, \overline{h}') = 0 \Longleftrightarrow [\overline{h}] = [\overline{h}'] \in \mathrm{Sk}(L(h))$ et induit une structure $H^{n-1}(\mathfrak{C})$-affine sur $\mathrm{Sk}(L(h))$.

Perspectives

- Méthodes efficaces de calcul de cohomologie ;

Perspectives

- Méthodes efficaces de calcul de cohomologie ;
- Déformations de catégories de Grothendieck ;

Perspectives

- Méthodes efficaces de calcul de cohomologie ;
- Déformations de catégories de Grothendieck ;
- Déformations de foncteurs, transformations naturelles.