Introduction à la théorie des catégories

Mémoire de M2 Agrégation

Quentin EHRET

Sous la direction de Dragos FRATILA

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Structure de la présentation

1. **Catégories**
   - Définition
   - Exemples

Structure de la présentation

1. **Catégories**
   - Définition
   - Exemples
2. **Foncteurs**
   - Définition ; application : théorème de Brouwer
   - Propriétés ; théorème de Galois

Structure de la présentation

1. **Catégories**
   - Définition
   - Exemples
2. **Foncteurs**
   - Définition ; application : théorème de Brouwer
   - Propriétés ; théorème de Galois
3. **Produits et coproduits**
   - Définitions
   - Exemples

Catégorie : définition

Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée :

- d'une collection d'objets $Ob(\mathcal{C})$;

Catégorie : définition

Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée :

- d'une collection d'objets $Ob(\mathcal{C})$;
- $\forall\ x, y \in Ob(\mathcal{C})$, un ensemble $Hom_{\mathcal{C}}(x, y)$ de *flèches* ou *morphismes* ;

Catégorie : définition

Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée :

- d'une collection d'objets $Ob(\mathcal{C})$;
- $\forall\ x, y \in Ob(\mathcal{C})$, un ensemble $Hom_{\mathcal{C}}(x, y)$ de *flèches* ou *morphismes* ;
- $\forall\ x \in Ob(\mathcal{C})$, une flèche *identité* $1_x \in Hom_{\mathcal{C}}(x, x)$;

Catégorie : définition

Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée :

- d'une collection d'objets $Ob(\mathcal{C})$;
- $\forall\ x, y \in Ob(\mathcal{C})$, un ensemble $Hom_{\mathcal{C}}(x, y)$ de *flèches* ou *morphismes* ;
- $\forall\ x \in Ob(\mathcal{C})$, une flèche *identité* $1_x \in Hom_{\mathcal{C}}(x, x)$;
- $\forall\ x, y, z \in Ob(\mathcal{C})$, une fonction *composition*

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{C}}(y, z) \times Hom_{\mathcal{C}}(x, y) &\to Hom_{\mathcal{C}}(x, z) \\ (g, f) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

Catégorie : définition

qui doivent de plus satisfaire les deux axiomes suivants :

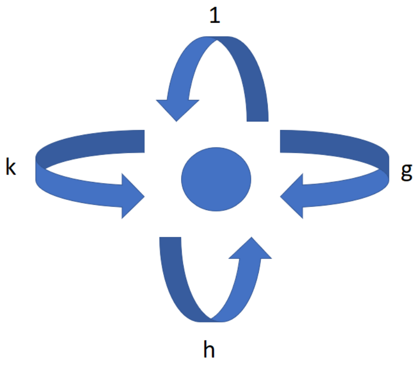
- $\forall\ f, g, h$ composables, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$;
- $\forall f \in Hom_{\mathcal{C}}(x, y),\ \ f \circ 1_x = 1_y \circ f = f.$

Exemples de catégories

- **Set** : objets : ensembles ; flèches : applications ;
- **Grp** : groupes ; homomorphismes de groupes ;
- **Top** : espaces topologiques ; applications continues ;
- $\mathbf{Vect}_{\mathbf{K}}$: K-espaces vectoriels ; applications K-linéaires.

Autres exemples : catégorie à 1 objet

Un groupe peut être vu comme une catégorie :
elle comporte 1 élément, noté $\bullet$ et ses flèches sont les éléments du groupe.



Préordre

Si $\mathcal{P}$ est une catégorie telle que, pour tous objets p et q, il existe *au plus* une flèche $p \longrightarrow q$, alors $\mathcal{P}$ est un **préordre**.

Préordre

Si $\mathcal{P}$ est une catégorie telle que, pour tous objets p et q, il existe *au plus* une flèche $p \longrightarrow q$, alors $\mathcal{P}$ est un **préordre**.

On peut écrire, pour $p, q \in Ob(\mathcal{P})$:

$$p \leq q \Longleftrightarrow \text{il existe une flèche } p \longrightarrow q.$$

Tout ensemble $\mathcal{P}$ muni d'une telle relation $\leq$ définit un préordre. On le note alors $(\mathcal{P}, \leq)$.

Autres exemples : préordres

Exemples de préordres :

- $(\mathbb{R}, \leq)$: $x \longrightarrow y \Longleftrightarrow x \leq y$;

Autres exemples : préordres

Exemples de préordres :

- $(\mathbb{R}, \leq)$: $x \longrightarrow y \iff x \leq y$;
- $(\mathbb{N}, |)$: $n \longrightarrow k \iff n \mid k$;

Autres exemples : préordres

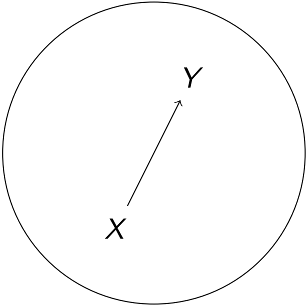
Exemples de préordres :

- $(\mathbb{R}, \leq)$: $x \longrightarrow y \iff x \leq y$;
- $(\mathbb{N}, |)$: $n \longrightarrow k \iff n \mid k$;
- si X est un ensemble, on note $P(X)$ l'ensemble des parties de X. Alors $(P(X), \subseteq)$ est un préordre :

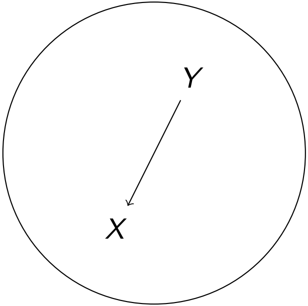
$$A \longrightarrow B \iff A \subseteq B$$

Catégorie opposée

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie.
Catégorie opposée $\mathcal{C}^{op}$: mêmes objets que $\mathcal{C}$, flèches inversées.



$\mathcal{C}$



$\mathcal{C}^{op}$

Foncteurs : définition

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un *foncteur* $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est la donnée :

- d'une fonction objet $T : Ob(\mathcal{C}) \longrightarrow Ob(\mathcal{D})$, $c \longmapsto T(c)$;

Foncteurs : définition

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un *foncteur* $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est la donnée :

- d'une fonction objet $T : Ob(\mathcal{C}) \longrightarrow Ob(\mathcal{D})$, $c \longmapsto T(c)$;
- d'une fonction flèche :

$$\begin{gathered} T : Hom(\mathcal{C}) \longrightarrow Hom(\mathcal{D}) \\ \left[f : c \longrightarrow c'\right] \longmapsto \left[T(f) : T(c) \longrightarrow T(c')\right] \end{gathered}$$

Foncteurs : définition

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un *foncteur* $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est la donnée :

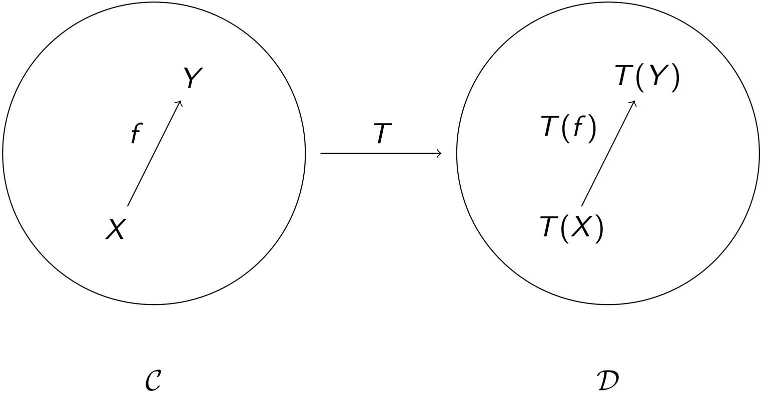
- d'une fonction objet $T : Ob(\mathcal{C}) \longrightarrow Ob(\mathcal{D})$, $c \longmapsto T(c)$;
- d'une fonction flèche :

$$\begin{aligned} T : Hom(\mathcal{C}) &\longrightarrow Hom(\mathcal{D}) \\ \left[f : c \longrightarrow c'\right] &\longmapsto \left[T(f) : T(c) \longrightarrow T(c')\right] \end{aligned}$$

devant de plus satisfaire :

- $\forall c \in Ob(\mathcal{C}),\ T(1_c) = 1_{T(c)}$
- $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$ pour tous f, g, h composables.

Foncteurs : définition



Exemples de foncteurs : foncteurs identité et "oubli"

- $Id : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} : \quad X \longmapsto X, \quad f \longmapsto f$

Exemples de foncteurs : foncteurs identité et "oubli"

- $Id : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} : \quad X \longmapsto X, \quad f \longmapsto f$
- U : **Grp** $\longrightarrow$ **Set** : $\quad (G, +) \longmapsto G, \quad f \longmapsto Uf$
  f est l'homomorphisme de groupes, Uf l'application ;

Exemples de foncteurs : foncteurs identité et "oubli"

- $Id : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} : \quad X \longmapsto X, \quad f \longmapsto f$
- U : $\mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Set}$: $\quad (G, +) \longmapsto G, \quad f \longmapsto Uf$
  f est l'homomorphisme de groupes, Uf l'application ;
- U : $\mathbf{Rng} \longrightarrow \mathbf{Ab}$: $\quad (A, +, \times) \longmapsto (A, +), \quad f \longmapsto Uf$
  f est l'homomorphisme d'anneaux, Uf l'homomorphisme de groupes ;

- $\mathbf{Set}^{op} \longrightarrow \mathbf{Vect}_K$: $\qquad X \longmapsto Hom(X, K)$;

Autres exemples

- $\mathbf{Set}^{op} \longrightarrow \mathbf{Vect}_K : \qquad X \longmapsto Hom(X, K);$

- $\mathbf{Top}^{op} \longrightarrow \mathbb{C} - \mathbf{Alg} : \qquad X \longmapsto C^o(X, \mathbb{C});$

Composition de foncteurs

Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ des catégories.
Soient $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ et $S : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ deux foncteurs.
Soient $c \in \mathcal{C}$ et f une flèche de $\mathcal{C}$.
Alors :

$$\begin{aligned} S \circ T : c &\longmapsto S(Tc) & \qquad \text{(objets)} \\ f &\longmapsto S(Tf) & \qquad \text{(flèches)} \end{aligned}$$

est un foncteur.

Un exemple de foncteur **Top*** $\longrightarrow$ **Grp**

Soit $(X, x_0) \in$ **Top***.

Définition

L'ensemble des classes d'homotopie $[f]$ de lacets $f : [0,1] \to X$ tels que $f(0) = f(1) = x_0$ est noté $\pi_1(X, x_0)$.

Soit $(X, x_0) \in$ **Top***.

Définition

L'ensemble des classes d'homotopie $[f]$ *de lacets* $f : [0,1] \to X$ *tels que* $f(0) = f(1) = x_0$ *est noté* $\pi_1(X, x_0)$.

Proposition

$\pi_1(X, x_0)$ *est un groupe pour le produit* $[f]\,[g] = [f * g]$.

Un exemple de foncteur **Top*** $\longrightarrow$ **Grp**

Proposition

$$\begin{aligned} \pi_1 \ : \ \textbf{\textit{Top*}} &\longrightarrow \textbf{\textit{Grp}} \\ (X, x_0) &\longmapsto \pi_1(X, x_0) \end{aligned} \qquad \textit{est un foncteur.}$$

Application de la fonctorialité de π_1 :

Un théorème de point fixe de Brouwer

- D^2 est le disque unité de $\mathbb{R}^2$;
- S^1 est le cercle unité de $\mathbb{R}^2$;

Application de la fonctorialité de π_1 :

Un théorème de point fixe de Brouwer

- D^2 est le disque unité de $\mathbb{R}^2$;
- S^1 est le cercle unité de $\mathbb{R}^2$;

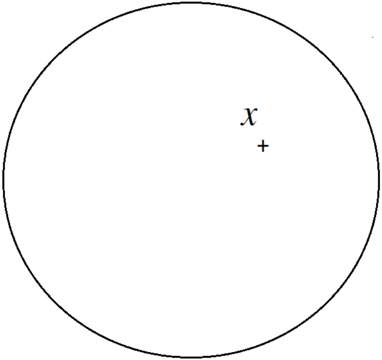
Théorème (Brouwer)

Toute $f : D^2 \longrightarrow D^2$ continue admet au moins un point fixe.

Un exemple de foncteur **Top*** $\longrightarrow$ **Grp**

Théorème (Brouwer)

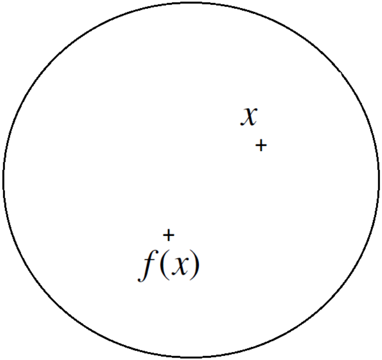
Toute $f : D^2 \longrightarrow D^2$ *continue admet au moins un point fixe.*



Un exemple de foncteur **Top*** $\longrightarrow$ **Grp**

Théorème (Brouwer)

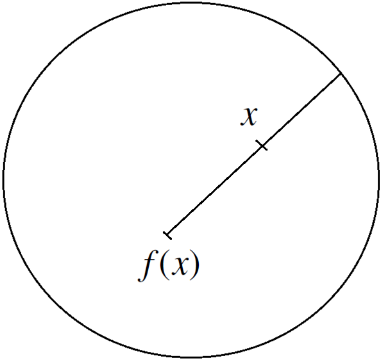
Toute $f : D^2 \longrightarrow D^2$ *continue admet au moins un point fixe.*



Un exemple de foncteur **Top*** $\longrightarrow$ **Grp**

Théorème (Brouwer)

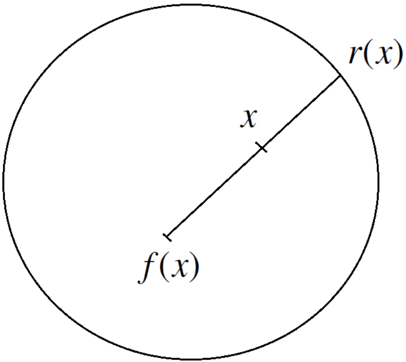
Toute $f : D^2 \longrightarrow D^2$ *continue admet au moins un point fixe.*



Un exemple de foncteur **Top*** $\longrightarrow$ **Grp**

Théorème (Brouwer)

Toute $f : D^2 \longrightarrow D^2$ continue admet au moins un point fixe.



Isomorphisme de catégories

Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ des catégories.
Soit $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un foncteur.

T est un *isomorphisme de catégories* si :

$$\exists S : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}, \quad S \circ T = I_{\mathcal{C}} \quad \text{et} \quad T \circ S = I_{\mathcal{D}}.$$

Equivalence de catégories

Soient $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ des catégories.
Soit $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un foncteur.

T est une *équivalence de catégories* si :

$$\exists S : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}, \qquad S \circ T \simeq I_{\mathcal{C}} \quad \text{et} \quad T \circ S \simeq I_{\mathcal{D}}.$$

Application : théorème de Galois

Soient K/F une extension galoisienne et $G := \mathrm{Gal}(K/F)$.

$\mathcal{L}$:
objets : corps L tels que $F \subseteq L \subseteq K$;
flèches : morphismes de corps φ tels que $\varphi_{|F} = \mathrm{id}$;

$\mathbf{G\text{-}Fin}^{\mathbf{tr}}$:
objets : ensembles finis munis d'une action de G transitive ;
flèches : applications préservant l'action de G.

Application : théorème de Galois

Théorème (Galois)

$\mathcal{L}^{op}$ et $\boldsymbol{G\text{-}Fin^{tr}}$ sont équivalentes via le foncteur

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{L}^{op} &\longrightarrow \boldsymbol{G\text{-}Fin^{tr}} \\ L &\longmapsto Hom_F(L, K) \end{aligned}$$

Produit

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$. Un *produit* est :

Produit

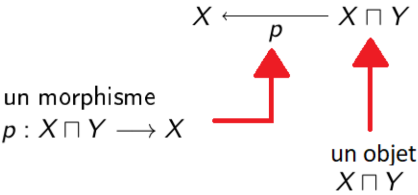
Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$. Un *produit* est :

$$X \sqcap Y$$

un objet
$X \sqcap Y$

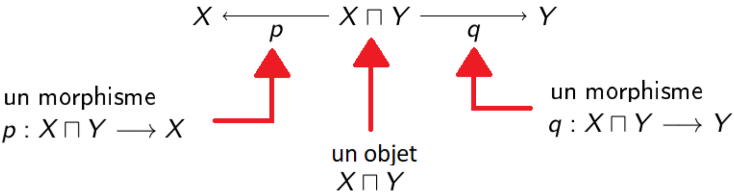
Produit

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$. Un *produit* est :



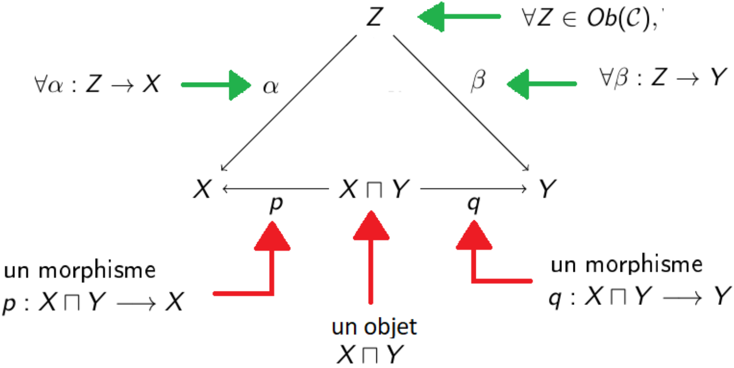
Produit

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$. Un *produit* est :



Produit

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$. Un *produit* est :



Produit

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$. Un *produit* est :

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, dashed, "\exists ! \gamma"] \arrow[dr, "\beta"] & \\
X & X \sqcap Y \arrow[l, "p"] \arrow[r, "q"'] & Y
\end{tikzcd}$$

$\forall Z \in Ob(\mathcal{C}),$

$\forall \alpha : Z \to X$

$\forall \beta : Z \to Y$

un morphisme
$p : X \sqcap Y \longrightarrow X$

un objet
$X \sqcap Y$

un morphisme
$q : X \sqcap Y \longrightarrow Y$

Exemples de produits

- Dans **Set**, c'est le produit cartésien $X \times Y$;

Exemples de produits

- Dans **Set**, c'est le produit cartésien $X \times Y$;
- Dans **Grp**, c'est le produit direct $G \times H$;

Exemples de produits

- Dans **Set**, c'est le produit cartésien $X \times Y$;
- Dans **Grp**, c'est le produit direct $G \times H$;
- Dans $\mathbf{Vect_K}$, c'est la somme directe $F \oplus G$;

Exemples de produits

- Dans **Set**, c'est le produit cartésien $X \times Y$;
- Dans **Grp**, c'est le produit direct $G \times H$;
- Dans $\mathbf{Vect}_{\mathbf{K}}$, c'est la somme directe $F \oplus G$;
- Dans **Fields**, il n'existe pas toujours !

Exemples de produits

- Dans **Set**, c'est le produit cartésien $X \times Y$;
- Dans **Grp**, c'est le produit direct $G \times H$;
- Dans $\mathbf{Vect_K}$, c'est la somme directe $F \oplus G$;
- Dans **Fields**, il n'existe pas toujours !

- Dans un préordre :
  - dans $(\mathbb{R}, \leq)$, c'est le min ou l'inf ;

Exemples de produits

- Dans **Set**, c'est le produit cartésien $X \times Y$;
- Dans **Grp**, c'est le produit direct $G \times H$;
- Dans $\mathbf{Vect}_{\mathbf{K}}$, c'est la somme directe $F \oplus G$;
- Dans **Fields**, il n'existe pas toujours !

- Dans un préordre :
  - dans $(\mathbb{R}, \leq)$, c'est le min ou l'inf ;
  - dans $(\mathbb{N}, |)$, c'est le pgcd ;
  - dans $(P(X), \subseteq)$, c'est l'intersection $\bigcap$.

Coproduit

La notion duale de **coproduit** $x \sqcup y$ se définit de manière symétrique, avec le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & z & \\ x \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, "i"'] & x \sqcup y \arrow[u, dashed, "\exists!\gamma"'] & y \arrow[ul, "\beta"'] \arrow[l, "j"] \end{tikzcd}$$

Exemples : produit libre dans **Grp**, somme directe dans $\mathbf{Vect}_K$.

Saunders MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, 1971.

Emily Riehl, *Category Theory in Context*, Cambridge University Press, 2014.

Tom Leinster, *Basic Category Theory*, Cambridge University Press, 2014.