Institut de Recherche en Informatique, Mathématiques, Automatique et Signal
Département de Mathématiques
Université de Haute–Alsace
18 rue des frères Lumière
68093 Mulhouse

Thèse de Doctorat de l'Université de Haute-Alsace

Spécialité

Mathématiques

Présentée par

Quentin EHRET

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Haute–Alsace

Sous la direction de

Abdenacer MAKHLOUF

Étude et déformations des (super)algèbres de Lie-Rinehart en caractéristique positive.

Soutenue le 21 septembre 2023 devant le jury composé de :

Rapporteur :	Pr. Camille Laurent-Gengoux,	*Université de Lorraine*
Rapporteur :	Pr. Thomas Weigel,	*Università de Milano-Bicocca*
Examinateur :	Pr. Martin Bordemann,	*Université de Haute–Alsace*
Examinatrice :	Pr. Alice Fialowski,	*Université Eötvös Loránd, Budapest*
Examinateur :	Pr. Johannes Huebschmann,	*Université de Lille*
Directeur de thèse :	Pr. Abdenacer Makhlouf,	*Université de Haute–Alsace*
Membre invité :	Pr. Sofiane Bouarroudj,	*Université de New-York, Abu Dhabi*

Table des matières

Résumé en français **6**

Abstract in English **7**

Remerciements **10**

Introduction **14**

I (Super-)Algèbres de Lie-Rinehart en caractéristique zéro **25**

1 Généralités sur les algébroïdes de Lie et les algèbres de Lie-Rinehart **27**
1.1 Algèbres de Lie . . . 27
1.1.1 Généralités . . . 27
1.1.2 Cohomologie de Chevalley-Eilenberg . . . 29
1.2 Algébroïdes de Lie . . . 30
1.3 Algèbres de Lie-Rinehart . . . 32
1.3.1 Définition et exemples . . . 32
1.3.2 Modules et représentations . . . 35
1.3.3 Algèbre enveloppante . . . 36
1.3.4 Cohomologie des algèbres de Lie-Rinehart . . . 37

2 Super-algèbres de Lie-Rinehart **39**
2.1 Généralités sur les structures graduées . . . 40
2.2 Super-algèbres associatives . . . 41
2.3 Super-algèbres de Lie . . . 42
2.4 Super-algèbres de Lie-Rinehart . . . 43
2.4.1 Définition et exemples . . . 44
2.4.2 Une technique de supérisation . . . 45

3 Déformations des super-algèbres de Lie-Rinehart en caractéristique zéro **47**
3.1 Super-multidérivations . . . 48
3.2 Cohomologie et déformations . . . 49
3.3 Déformations formelles . . . 50
3.4 Déformations équivalentes . . . 51
3.5 Obstructions . . . 53
3.6 Exemple de super-algèbre de Lie-Rinehart rigide de type $(1|1, 1|1)$ . . . 54

4 Classification des super-algèbres de Lie-Rinehart en caractéristique zéro **57**
4.1 Variété algébrique des super-algèbres de Lie-Rinehart en dimension finie 58
4.2 Classification des super-algèbres associatives et de Lie 61
4.2.1 Super-algèbres associatives super-commutatives unitaires 61
4.2.2 Super-algèbres de Lie 63
4.3 Super-dérivations de super-algèbres associatives super-commutatives unitaires . 65
4.4 Classification des super-algèbres de Lie-Rinehart 67
4.4.1 Résultats généraux 67
4.4.2 Dimension (2|1) 69
4.4.3 Dimension (2|2) 69
4.4.4 Dimension (2|3) 72
4.4.5 Dimension (2|4) 75

II (Super-)Algèbres de Lie-Rinehart en caractéristique positive **83**

5 Algèbres de Lie-Rinehart restreintes en caractéristique $p \geq 3$ **85**
5.1 Algèbres de Lie restreintes 86
5.1.1 Du morphisme de Frobenius aux p-opérations 87
5.1.2 Définitions et exemples 89
5.1.3 Existence de p-opérations 91
5.2 Cohomologie restreinte des algèbres de Lie restreintes 93
5.2.1 Cas général 94
5.2.2 Cas particulier des algèbres de Lie abéliennes restreintes 95
5.3 Algèbres de Lie-Rinehart restreintes 98
5.3.1 Définitions et exemples 98
5.3.2 Multidérivations restreintes et structures de Lie-Rinehart restreintes . . 99
5.4 Déformations formelles des algèbres de Lie-Rinehart restreintes 100
5.4.1 Déformations formelles restreintes 101
5.4.2 Équivalence de déformations formelles restreintes 104
5.4.3 Obstructions 107
5.4.4 Opérateurs de Nijenhuis restreints 109
5.5 Algèbres de Heisenberg restreintes 109
5.5.1 Structures restreintes sur l'algèbre de Heisenberg 110
5.5.2 Cohomologie restreinte des algèbres de Heisenberg restreintes 111
5.5.3 Exemple d'une structure de Lie-Rinehart restreinte sur l'algèbre de Heisenberg 115

6 (Super-)Algèbres de Lie-Rinehart restreintes en caractéristique $p = 2$ **117**
6.1 Algèbres de Lie restreintes en caractéristique $p = 2$ 118
6.1.1 Définition 118
6.1.2 2-opérations et séries formelles 119
6.1.3 Cohomologie restreinte en caractéristique $p = 2$ 121
6.1.4 Calculs aux petits ordres 125
6.2 Déformations d'algèbres de Lie-Rinehart restreintes en caractéristique $p = 2$ . . 127
6.2.1 Algèbres de Lie-Rinehart restreintes en caractéristique $p = 2$ 127
6.2.2 Déformations formelles restreintes 127
6.2.3 Équivalence de déformations formelles 129
6.2.4 Obstructions 131
6.3 Algèbres de Heisenberg restreintes en caractéristique $p = 2$ 132

6.3.1 Cohomologie restreinte 132
6.3.2 Structure de Lie-Rinehart restreinte et déformations restreintes 134

7 Représentations des algèbres de Lie-Rinehart en caractéristique positive 135
7.1 Généralités 135
7.2 Produit semi-direct 136
7.2.1 Produit semi-direct en caractéristique p quelconque 136
7.2.2 Produit semi-direct en caractéristique $p = 2$ 140
7.3 Exemples de représentations en dimension infinie 142
7.3.1 Exemple en caractéristique zéro 142
7.3.2 Adaptation de l'exemple précédent en caractéristique p 143
7.3.3 Exemple en caractéristique $p = 2$ 144

8 Doubles extensions symplectiques de (super)-algèbres de Lie restreintes de type quasi-Frobenius 147
8.1 Introduction 147
8.1.1 Groupes de Lie équipés d'une structure symplectique 147
8.1.2 Super-algèbres de Lie restreintes et double extensions 148
8.2 Super-algèbres de Lie restreintes et cohomologie restreinte 149
8.2.1 Super-algèbres de Lie restreintes 149
8.2.2 Cohomologie restreinte des super-algèbres de Lie restreintes 150
8.2.3 Super-algèbres de Lie de type quasi-Frobenius 151
8.2.4 L'adjoint d'une dérivation 151
8.2.5 Quelques cocycles utiles 152
8.3 Doubles extensions restreintes orthosymplectiques 155
8.3.1 D_0-extensions 155
8.3.2 D_1-extensions 161
8.4 Doubles extensions restreintes périplectiques 163
8.4.1 D_0-extensions 163
8.4.2 D_1-extensions 165
8.5 Exemples de doubles extensions symplectiques 166
8.5.1 La super-algèbre de Lie $D^7_{q,-q}$ (pour $q \neq 0, 1$) 166
8.5.2 La super-algèbre de Lie $C^1_1 + A$ 166
8.5.3 La super-algèbre de Lie D^5 167
8.5.4 La super-algèbre de Lie $(2A_{1,1} + 2A)^2_{1/2}$ 167
8.5.5 L'algèbre de Witt $W(1)$ pour $p > 3$ 168
8.5.6 La super-algèbre de Lie $K^{2,m}$, m impair 168
8.5.7 La super-algèbre de Lie $K^{2,m}$, m pair 171

Bibliographie 173

Résumé

L'objectif de cette thèse est l'étude des algèbres de Lie-Rinehart, en particulier en caractéristique positive. On s'intéresse à leur structure, leur cohomologie, leurs déformations et à leur classification. On commence par étudier le cas des super-algèbres de Lie-Rinehart en caractéristique nulle. Dans ce cadre, on utilise la correspondance bijective avec les super-multidérivations (qu'on introduit) afin de construire une cohomologie adaptée aux déformations formelles de ces objets. On montre que cette cohomologie contrôle les déformations formelles des super-algèbres de Lie-Rinehart. En particulier, deux déformations équivalentes correspondent à des 2-cocycles cohomologues. On établit également une classification de ces objets en petites dimensions, réalisée à l'aide du logiciel de calcul formel Mathematica.
En caractéristique $p > 3$, on commence par étudier les algèbres de Lie restreintes, ainsi que leur cohomologie. On utilise cette cohomologie restreinte, connue que partiellement (jusqu'à l'ordre 2), pour contrôler les déformations restreintes d'algèbres de Lie-Rinehart restreintes. On illustre ces résultats sur un exemple construit sur l'algèbre de Heisenberg.
Dans le cas particulier de la caractéristique $p = 2$, on construit une cohomolgie complète, à tout ordre, qui n'a pas d'analogue en caractéristique différente de 2. On montre ensuite que cette nouvelle cohomologie a des interprétations classiques en termes de déformations d'algèbres de Lie restreintes et de Lie-Rinehart restreintes.
On étudie ensuite les représentations restreintes d'algèbres de Lie-Rinehart restreintes. On construit une structure restreinte sur le produit semi-direct, puis une structure de Lie-Rinehart restreinte. On étudie ensuite certains exemples en dimension infinie.
Enfin, on présente une nouvelle application de la cohomologie restreinte aux doubles extensions symplectiques de super-algèbres de Lie restreintes de type quasi-Frobenius. On montre en particulier que les obstructions au processus de double extension dans ce contexte sont des objets encodés par la cohomologie restreinte.

Abstract

The aim of this thesis is the study of restricted Lie-Rinehart algebras, in particular in positive characteristic. We are interested in their structure, cohomology, deformations and classification. We begin by tackling the case of Lie-Rinehart superalgebras in zero characteristic. In this framework, we use a bijective correspondence with super-multiderivations (which we introduce) to construct a cohomology adapted to formal deformations of these objects. We show that this cohomology controls formal deformations of Lie-Rinehart superalgebras. In particular, cohomologous cocycles provide equivalent deformations. We also establish a classification of these objects in low dimensions, carried out using the computer algebra system Mathematica.

In characteristic $p > 3$, we begin by studying restricted Lie algebras and their cohomology. We use this partially known (up to order 2) restricted cohomology to control restricted deformations of restricted Lie-Rinehart algebras. We illustrate these results with an example constructed on the Heisenberg algebra.

In the special case of characteristic $p = 2$, we construct a complete cohomology at any order, which has no analogue in characteristics different from 2. We then show that this new cohomology has classical interpretations in terms of restricted deformations of Lie algebras and restricted Lie-Rinehart algebras.

Next, we investigate restricted representations of restricted Lie-Rinehart algebras. We construct a restricted structure on the semidirect product, as well as a restricted Lie-Rinehart structure. We then study some infinite-dimensional examples.

Finally, we present a new application of restricted cohomology to symplectic double extensions of quasi-Frobenius-type restricted Lie superalgebras. In particular, we show that the obstructions to the double extension process are objects encoded by the restricted cohomology.

Remerciements

En tout premier lieu, je tiens à remercier très chaleureusement mon directeur de thèse Abdenacer Makhlouf qui m'a fait confiance il y a de cela plus de trois ans pour mener ce projet, pour m'avoir appris la recherche, pour sa gentillesse et ses conseils, pour son aide et son soutien constant, pour m'avoir emmené avec lui en mission de nombreuses fois, pour avoir défendu mes idées et projets, scientifiques ou non... La liste est longue, merci pour tout Nacer.

Je remercie Camille Laurent-Gengoux et Thomas Weigel d'avoir accepté de rapporter ce travail et pour leurs retours. Mes remerciement vont aussi à Alice Fialowski et Johannes Huebschmann, je suis très honoré de leur présence dans mon jury. Je souhaite également adresser des remerciements particuliers à Martin Bordemann tout d'abord, qui m'a beaucoup soutenu tout au long de cette thèse et qui a toujours été présent, par une anecdote savoureuse, un conseil éclairé, une idée intéressante ou simplement une discussion captivante. Je suis très heureux de sa présence dans le jury. Puis, à Sofiane Bouarroudj, dont les travaux m'ont beaucoup inspiré et avec qui nous avons pu nouer une relation scientifique et amicale pendant les deux dernières années de ma thèse où nous discutions presque chaque semaine. Poursuivre mes travaux avec lui à la New York University à Abu Dhabi en post-doc est une chance incroyable pour moi, je le remercie pour sa confiance et son aide. Je suis sûr que cette collaboration sera très fructueuse. Je souhaite aussi remercier toutes les personnes avec qui j'ai eu la chance de collaborer sur des projets de recherche, en premier lieu Nacer bien sûr, mais aussi Sofiane Bouarroudj, Yoshiaki Maeda, Sami Mabrouk, Atef Hajjaji et Viatcheslav Futorny.

Merci également aux membres du Département de Mathématiques de Mulhouse, notamment Zakaria qui, outre le fait de n'avoir jamais manqué de nous abreuver de son savoir, a aussi contribué à me faire sentir fort en natation et a un jour payé un tiers de bouteille de blanc ; mais aussi Nicolas J. pour sa bonne humeur et son dynamisme motivant, ici à Mulhouse tout comme en prépa agreg à Strasbourg ; Augustin pour sa ponctualité sans faille à l'heure de sonner la cloche pour aller manger ; Pierre pour ses conseils pédagogiques et pour m'avoir vendu la cloche ; et aussi en plus des personnes déjà citées n'oublions pas Cornel, Guido, Amine, Sylvia, Lionel, Boumediene, Nicolas C., Daniel, Elisabeth, Ahmed et surtout Viviane, qui a fait preuve d'une gentillesse, d'une bonne humeur et d'une efficacité sans faille au difficile poste de secrétaire du département. Je remercie également le Département de Mathématiques en tant qu'institution pour avoir financé mes voyages et mes projets, ainsi que Michel pour sa précieuse aide logistique.

Nous avons su créer une ambiance chaleureuse et amicale au sein de la (petite) communauté de doctorant·e·s en maths, aussi je tiens à remercier vivement toutes et tous les doctorant·e·s que j'ai eu la chance de côtoyer à Mulhouse. En premier lieu, les membres du MAThEOR, en particulier Thomas qui a été (est encore) un camarade d'exception tout au long de ces années, avec qui nous avons partagé beaucoup plus qu'un simple bureau, citons notamment les soirées guitare/pizza/bière, les soirées Age of Empires/pizza/bière, les fermes auberges, la

Suède, Châteauneuf, Paul Bur, le Heavy Metal, le groupe Dagda, les concerts, Beast in Black, etc etc etc. N'oublions pas Armand, dit Armonge, dit Ragnar the Rock, dont l'étourderie est proverbiale mais qui est néanmoins devenu un véritable ami, ainsi que Douglas et Andrea qui complètent cette joyeuse équipe et avec qui nous avons partagé des moments sportifs (resp. culinaires) intenses. De temps en temps, on a aussi fait des maths. Je salue et remercie les autres doctorants passés ou présents : Imène et Rahma qui vont soutenir bientôt, Mohamed qui va me suivre de (très) peu, Atef avec qui nous avons écrit un article, mais aussi Leila, Anissa, Hamilton, Rabeb ainsi que le fulgurant Icaro, dont le départ au Brésil restera dans toutes les mémoires. Je rajouterai ici Pierre, qui n'est plus un doctorant depuis (très) longtemps mais qui reste un joyeux drille, ainsi que Claire, Franziska et Luana.

Durant ces trois années, j'ai eu la chance de faire de nombreux voyages et de rencontrer un grand nombre de personnes qui ont toutes contribué, à des degrés divers, à la réalisation de cette thèse. Je remercie donc Pierre Clavier (encore lui !) qui m'a invité à Vienne, ainsi qu'à Toni, Foivos, Adrien, Rita et Imène, avec qui nous avons visité la ville, Florin Panaite qui a été un hôte remarquable à Bucarest, Alessandro Ardizzioni pour m'avoir invité à parler à Turin, Ivan Kaygorodov et Isabel Cunha pour l'invitation à Covilhã, Loïc Foissy et Pierre Catoire pour l'organisation du colloque à Calais, Olga Liivapuu et Viktor Abramov pour leur hospitalité à Tartu en Estonie, Camille Laurent-Gengoux pour l'organisaion de la conférence au CIRM, ainsi que Maxime avec qui nous avons gravi le mont Puget (563m), et finalement Boujemaa Agrebaoui, Sami Mabrouk, Atef, Rahma et Jaber pour m'avoir fait découvrir la Tunisie. Je souhaite également remercier, dans le désordre le plus total, les personnes suivantes que j'ai rencontrées lors de ces voyages ou à Mulhouse, pour les discussions que nous avons pu avoir, mathématiques ou non : Viatcheslav Futorny, Alessandra Frabetti, Said Benayadi, Laurent Rigal, Richard Kerner, Paolo Saracco, Andrey Krutov, Alexandre Quesney, Dominique Manchon, Sylvie Paycha, Christian Brouder, Ali Baklouti, Yvain Bruned, Sidi-Mahmoud Kaber, Reza Pakzad, Thierry Champion et enfin Pierre-Louis Curien, à qui nous avons enseigné le fingerspiel. Je remercie également Jean-Luc Bischoff, qui m'a suggéré l'idée de faire une thèse des années avant que cela ne devienne une possibilité réaliste.

C'est avec une émotion non feinte que j'en arrive maintenant au passage de ces longs remerciements où j'exprime ma gratitude et mon amitié pour Victoria, qui mérite davantage qu'un “simple merci laconique”. Depuis que nous nous sommes rencontrés, probablement en Mesure et Intégration en L3, en l'an de grâce 2016, nous avons traversé ensemble toutes les péripéties mathématiques universitaires possibles et imaginables. Sans son soutien, je ne me serais jamais inscrit en M1 maths fonda, je n'aurai jamais validé ce M1, ni réussi l'agrégation par la suite. C'est encore grâce à elle que je me suis lancé en M2 Recherche et que j'ai osé faire une thèse. J'ai tant de souvenirs partagés qui me reviennent qu'il serait impossible d'en faire la liste, liste qui se prolonge encore et toujours et j'espère pour très longtemps. Merci Victoria pour ton soutien constant et ton amitié irremplaçable.

Je remercie également les personnes qui ont partagé ces années à la fac à Strasbourg et qui sont devenus bien plus que de simples collègues : Antoine qui ne refuse jamais de donner son aide si précieuse, Renaud qui est un brave compagnon mathématique ainsi que dans la vraie vie, Guillaume alias le plan hyperbolique, mais aussi Romain, Tristan, Joris, Morgane, ... J'en profite pour saluer les doctorant·e·s de Strasbourg, notamment Clarence, Brieuc, Thomas, Jean-Pierre, Céline, Adam, Mickael, Basile, Raoul, ... Je n'oublie pas Pierre Guillot, Dragos Fratila, Nicolas Juillet et Yohann Le Floch, qui ont chacun contribué à m'aider dans mon parcours à un moment.

Je salue mes amis du groupe "prépa" étendu : Yann qui n'oublie jamais de passer me voir lorsqu'il est en Alsace, notre Hochgebirgsführer Nicolas qui n'a jamais failli à nous emmener toujours plus haut (Gran Paradisio, 4061m), Florian, Yannis, Élise, Eva, Paul et Romane. Je salue également mes amis du lycée et de "la vallée", qui me supportent pour certains depuis près de 25 ans : Julien, Sylvain, Léo, Joseph, Guillaume, Martin, Xavier, ainsi que Charlotte et Clément qui ont contribué (entre autres) de façon non négligeable à élargir mon horizon musical.

Ces remerciements ne peuvent s'achever sans un énorme merci à ma famille, tout d'abord à mes parents qui ont toujours soutenu sans retenue toutes mes lubies, tous mes projets et qui m'ont permis d'en arriver là aujourd'hui ; mon frère Arnaud, mes grand-parents, ma tante et mes cousins, ainsi que toute ma famille proche ou moins proche, sans oublier celles et ceux qui ne sont plus parmi nous. Un grand merci à toutes et tous.

1. Si vous pensez que je vous ai oublié dans ces remerciements, vous pouvez insérer votre nom ci-après : "Je remercie vivement ______________".

Introduction

L'objectif de cette thèse est l'étude des algèbres de Lie-Rinehart en caractérisque 0 ainsi qu'en caractéristique positive. L'étude concerne leur structure, leur cohomologie, leurs déformations et leur classification. Ce travail est divisée en deux parties. Dans la première, on s'intéresse aux (super-)algèbres de Lie-Rinehart sur un corps de caractéristique zéro. Le but de cette première partie est de construire des déformations formelles de super-algèbres de Lie-Rinehart, généralisant au cas gradué l'article [MM20], puis de classifier ces structures en petites dimensions. La deuxième partie est consacrée à la caractéristique strictement positive et aux algèbres de Lie-Rinehart restreintes. Le but étant d'introduire et d'explorer les déformations formelles d'algèbres de Lie-Rinehart restreintes, ainsi que les liens avec la cohomologie restreinte. De plus, on entame l'étude des représentations des algèbres de Lie-Rinehart resteintes ainsi que la double extension pour certaines classes de super-algèbres de Lie restreintes.

Groupes et algèbres de Lie. Cette thèse s'inscrit dans le domaine mathématique des algèbres non-associatives. Une algèbre non-associative est un espace vectoriel A équipé d'une application bilinéaire $\mu : A \times A \longrightarrow A$. Un premier exemple est donné lorsque l'application μ vérifie

$$\mu(a, \mu(b, c)) = \mu(\mu(a, b), c), \;\; a, b, c \in A.$$

On parle alors d'algèbre associative. Un autre exemple de classe d'algèbres non-associatives est donné par les *algèbres de Lie*, découvertes de façon indépendante à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle par le norvégien Sophus Lie (1842-1899) et l'allemand Wilhelm Killing (1847-1923) [2]. Une algèbre de Lie est un espace vectoriel muni d'une application bilinéaire antisymétrique (appelée crochet de Lie) satisfaisant l'identité de Jacobi (voir définition 1.1.1). Ces algèbres ont d'abord été étudiées comme outils pour l'analyse locale des groupes de Lie, qui sont des groupes admettant de plus une structure de variété lisse, et dont la loi de composition interne ainsi que l'application "passage à l'inverse" sont lisses. En prenant l'espace tangent en l'identité d'un groupe de Lie, on obtient l'algèbre de Lie associée. De même, on peut retrouver le groupe de Lie à partir de l'algèbre de Lie au moyen de l'application exponentielle (voir [SF88], [HJ78], [JN62]).

$$\textbf{Groupe de Lie} \; \underset{\exp}{\overset{\text{espace tangent en l'identité}}{\rightleftarrows}} \; \textbf{Algèbre de Lie}$$

2. Il semblerait que Killing n'aie pas eu accès au journal dans lequel Lie avait publié ses résultats, et donc n'en avait pas connaissance. Lie sera très méprisant envers les travaux de Killing, disant notamment que tout ce qui est correct avait été fait par lui, et que Killing a ajouté tout ce qui est incorrect.

Par exemple,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{SL}_2(\mathbb{C}) & \begin{array}{c}\longrightarrow \\ \longleftarrow\end{array} & \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \\ \| & & \| \\ \{M \in GL_n(\mathbb{C}),\ \det(M) = 1\} & & \{M \in M_n(\mathbb{C}),\ Tr(M) = 0\} \end{array}$$

La notion de groupe de Lie (et donc celle étroitement liée d'algèbre de Lie) intervient dans de nombreux domaines des mathématiques et de la physique théorique. Ils constituent par exemple des groupes de symétrie de certains espaces remarquables (sphère, hyperboloïde, ...) et interviennent en théorie des nombres, en combinatoire et en topologie. En physique, certains groupes de Lie sont fondamentaux, comme le groupe de Lorentz $\mathrm{O}(1,3)$ ou le groupe $\mathrm{SU}(3)$ qui sert pour la classification de certaines particules élémentaires. Ils apparaissent aussi dans l'étude des systèmes intégrables, en théorie conforme des champs, en théorie des cordes et en théorie de jauge. Dans ce dernier domaine, notons que certaines théories faisant intervenir des symétries de jauge s'étudient de façon rigoureuse avec le formalisme de Batalin-Vilkovisky, qui se base sur la théorie de Lie (voir par exemple [CP15], chapitre 5). Les groupes et algèbres de Lie jouent donc un rôle de premier plan en physique ainsi qu'en géométrie. L'un des résultats les plus marquant de la théorie des algèbres de Lie est la classification par Killing et Cartan des algèbres de Lie simples et semi-simples de dimension finie au moyen des systèmes de racines (voir [JN62, HJ78]).

De nombreuses généralisations du concept d'algèbre de Lie ont ensuite émergé, toujours motivées par des problèmes issus de la physique ou de la géométrie différentielle. Citons notamment les super-algèbres de Lie motivées en partie par le supersymétrie ([KV77], voir ci-dessous), les Hom-(super-)algèbres de Lie ([HLS06, MS08, AM10]), les algèbres de Lie restreintes ([JN41], voir ci-dessous), les algèbres n-aires, les systèmes triples de Lie, et davantage encore.

(Co)homologie. L'algèbre (co)homologique est un outil fondamental en mathématiques modernes. D'abord impopulaire, son intérêt explosa avec les travaux de Serre et Grothendieck en géométrie algébrique et elle est maintenant devenue une compagne de route essentielle à toute personne travaillant en algèbre abstraite, géométrie, topologie, géométrie algébrique, topologie algébrique, théorie des catégories, etc ([RJ09]). Ses applications sont innombrables et vont de l'étude des anneaux locaux, des schémas et des faisceaux (Grothendieck, Serre) à la classification du style musical ([CV22]) et à la détection d'anomalies du corps humain ([RMB23]).

Étant donné un objet algébrique ou topologique X, on veut construire une suite de groupes $H^n(X),\ n \in \mathbb{Z}$ qui soient des invariants pour X, c'est-à-dire que si X et Y sont deux objets isomorphes (ou homéomorphes, ou difféomorphes, ou ...), alors on a des isomorphismes de groupes $H^n(X) \cong H^n(Y),\ \forall n \in \mathbb{Z}$. Ces groupes permettent de retrouver un certain nombre d'informations sur l'objet étudié. Selon le contexte, il existe plusieurs façons de définir les groupes de (co)homologie, via les complexes simpliciaux et les triangulations, les CW-complexes, les formes différentielles ou par des méthodes issues de la théorie des catégories abéliennes. Toutes ces méthodes sont présentées dans l'excellent [GP23] (pour les francophones) ou les classiques [RJ09, WC94]. De façon générale, étant donné un objet X, on construit une suite d'objets $C^n(X)$ d'une catégorie abélienne reliés par des morphismes d^n vérifiant $d^{n+1} \circ d^n = 0$ de la façon suivante :

$$\cdots \longrightarrow C^{n-1}(X) \xrightarrow{d^{n-1}} C^n(X) \xrightarrow{d^n} C^{n+1}(X) \xrightarrow{d^{n+1}} C^{n+2}(X) \xrightarrow{d^{n+2}} \cdots \quad ,$$

On peut alors construire les groupes de cohomologie en calculant

$$H^n(C^*) := \mathrm{Ker}(d^n)/\,\mathrm{Im}(d^{n-1}).$$

La cohomolgie qui nous intéresse particulièrement est la cohomologie de Chevalley-Eilenberg associée à une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie L, introduite dans [CE48] et rappelée au paragraphe 1.1.2. Si M est un module de Lie pour L, alors dans ce cas on a $C^n(L) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\wedge^n L, M)$ et les applications d^n sont données par une formule explicite (voir équation 1.2). On parle alors de cohomologie à coefficients dans M. Par exemple, si $M = \mathbb{K}$, le second groupe de cohomologie permet de classifier les extensions centrales de L ; si $M = L$, le premier groupe de cohomologie correspond aux dérivations extérieures de L et le second permet de contrôler les déformations formelles infinitésimales de L. Les interactions entre objets algébriques et cohomologie associée sont au coeur de ce travail de thèse.

Super-algèbres de Lie. L'émergence de la supersymétrie au début des années 1970 a largement motivé l'étude des super-algèbres (voir l'introduction du chapitre 2 et [KQS10, RA07]). Une super-algèbre de Lie L s'écrit comme une somme directe $L = L_0 \oplus L_1$, avec L_0 une algèbre de Lie et L_1 un L_0-module. Les éléments de L_0 sont dits pairs ou de degré 0 et ceux de L_1 impairs ou de degré 1. On a un crochet sur L qui respecte le degré dans le sens $[L_i, L_j] \subset L_{i+j \mod 2}$. Le crochet doit également vérifier des relations de super-antisymétrie et de super-Jacobi (voir définition 2.3.1). On doit leur introduction à Berezin et Kats ([BK70]). La classification des supr-algèbres de Lie simples est due à Kac ([KV77]). Un ouvrage de référence sur le sujet est [SM79]. Citons également les noms de Fuks et de Leites qui ont largement contribué au développement de la théorie de ces objets [LD75, FD86], notamment à la généralisation de la cohomologie de Chevalley-Eilenberg. Ce type de "super-structure" apparaît fréquemment en physique théorique car cela constitue les fondations mathématiques de certains formalismes ([CP15, BC23]). On les retrouve aussi souvent en géométrie graduée ([RA07]).

(Super-)algèbres de Lie restreintes. Comme on l'a vu précédemment, les algèbres de Lie ont été introduites historiquement sur le corps des nombres complexes, puis sur des corps arbitraires de caractéristique zéro. Les origines de l'étude des algèbres de Lie en caractéristique positive $p > 0$ remontent à la fin des années 30, avec la découverte par Witt en 1937 d'une nouvelle algèbre de Lie simple, nommée à son nom et généralisée par Zassenhaus en 1939. De nombreux résultats et outils valables en caractéristique zéro ne le sont plus en caractéristique positive, comme la forme de Killing, le théorème de Lie ou le théorème de Weyl. Le problème de la classification en caractéristique p s'en retrouve être difficile et de nombreux travaux ont été menés sur cette question, par exemple par Strade dans une série de six articles publiés entre 1989 et 1998 ([SH98], voir références de cet article pour le liste complète) et par Bouarroudj et ses collaborateur·trice·s plus récemment ([BGL09, BKLLS18, BLLS21]).

En fait, en caractéristique $p > 0$, une structure supplémentaire apparaît naturellement sur certaines algèbres de Lie, inspirée du fait suivant. Si A est une algèbre associative sur un corps $\mathbb{F}$ de caractéristique positive p, on peut regarder son algèbre de Lie des dérivations $\mathrm{Der}(A)$. Alors, le morphisme de Frobenius $(\cdot)^p : \mathrm{Der}(A) \to \mathrm{End}(A),\ D \mapsto D^p$ est en fait un endomorphisme de $\mathrm{Der}(A)$, ce qui n'est en général pas vrai en caractéristique nulle. Cette constatation, ainsi que l'étude des propriétés issues des interactions entre ce morphisme de Frobenius et les applications structurantes de $\mathrm{Der}(A)$ ont conduit à la définition d'*algèbre de Lie restreinte* (Jacobson, [JN37, JN41], voir définition 5.1.5), qui est une algèbre de Lie L équipée d'une p-opération $(\cdot)^{[p]} : L \to L$ vérifiant des conditions de compatibilité avec le crochet de Lie et la loi additive de L. Ces algèbres de Lie restreintes sont plus intéressantes à étudier en caractéristique p car elles permettent de développer des techniques nouvelles qui pallient partiellement aux problèmes évoqués plus haut. Dans l'étude des algèbres de Lie restreintes, le théorème de Jacobson se révèle être un outil particulièrement précieux.

Théorème de Jacobson ([JN62]). *Soit L une algèbre de Lie de dimension n sur un corps $\mathbb{F}$ de caractéristique p. Supposons que $(e_j)_{j\in\{1,\cdots,n\}}$ soit une base de L telle qu'il existe $y_j \in L$, $\left(\mathrm{ad}_{e_j}\right)^p = \mathrm{ad}_{y_j}$. Alors, il existe une unique p-opération $(\cdot)^{[p]}$ sur L telle que $e_j^{[p]} = y_j,\ \forall j = 1, \cdots, n$.*

Ce théorème permet en effet de déterminer des p-opérations sur des bases et permet d'éviter de vérifier certaines conditions potentiellement problématiques (voir le théorème 5.1.16 et sa preuve, ainsi que la discussion qui suit, et la remarque suivant la proposition 7.2.4).

Les super-algèbres de Lie restreintes ont été introduites dans [PV92] et étudiées assez largement ([FR96, SZ10, UH13, YY14, YCC20, Z09]), plus particulièrement par Bouarroudj et ses collaborateur·trice·s ([BKLS18, BLLS21]), qui se sont intéressés de près au cas de la caractéristique $p = 2$, où de nouveaux phénomènes ont été observés et où la définition a dû être adaptée (voir aussi [LA10]).

La cohomologie associée aux algèbres de Lie restreintes est nettement plus compliquée que dans le cas ordinaire. Dans ses articles [HG54, HG55.1, HG55.2], Hochschild définit la cohomologie restreinte d'une algèbre de Lie restreinte L à valeurs dans un module M par

$$H^k_{res}(L,M) := \mathrm{Ext}^k_{U_p(L)}(\mathbb{F}, M),\ \ k \in \mathbb{N},$$

où $U_p(L)$ désigne l'algèbre enveloppante restreinte de L. Bien que correcte, cette expression ne permet des calculs explicites que pour $k \in \{0,1\}$, dans le contexte de certaines extensions (voir [HG54]). Evans et Fuchs ont ensuite proposé une construction explicite d'un complexe de cochaînes dans [ET00, EF08], qui permet de calculer les groupes de cohomologie restreinte jusqu'à l'ordre p si l'algèbre de Lie est abélienne et jusqu'à l'ordre 2 dans le cas général. La compréhension de cette cohomologie restreinte reste encore lacunaire, et même si les travaux de Evans et Fuchs ont permis d'obtenir de bonnes interprétations cohomologiques de certains phénomènes algébriques, cela reste incomplet. La généralisation de la cohomologie restreinte aux super-algèbres de Lie restreintes (aux ordres $0, 1, 2$) a été faite dans [YCC20] et une application nouvelle de cette cohomologie est présentée dans le chapitre 8 de cette thèse.

(Super-)algèbres de Lie-Rinehart. La notion d'algèbre de Lie-Rinehart est centrale dans ce travail de thèse. Il s'agit d'une version algébrique des algébroïdes de Lie (voir section 1.2) et a été introduite par plusieurs auteurs dans les années cinquante et soixante, notamment Herz ([HJ53]), Palais ([PR61]) et Rinehart ([RG63]), ce dernier ayant notamment fourni un théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt. Une étude algébrique plus approfondie de ces objets a été menée plus récemment par Huebschmann ([HJ90], [HJ98]), qui a baptisé ces structures en l'honneur de l'un des pionniers cités précédemment. On peut également trouver dans [HJ21] une rétrospective de Huebschmann sur son travail sur les algèbres de Lie-Rinehart. Pour nous, une telle structure est donnée par un triplet (A, L, ρ), où A est une algèbre associative commutative, $(L, [\cdot,\cdot])$ est une algèbre de Lie admettant une structure de A-module, et ρ est un morphisme de Lie A-linéaire $L \to \mathrm{Der}(A)$, à valeurs dans les dérivations de A, appelé *ancre* et vérifiant la condition de compatibilité

$$[x, a\cdot y] = a\cdot[x,y] + \rho(x)(a)\cdot y,\ \ x,y \in L,\ \ a \in A.$$

La formule ci-dessus montre que l'ancre permet de mesurer le défaut de A-linéarité du crochet de Lie, dans un certain sens. Parfois, on désignera une algèbre de Lie-Rinehart par (A, L) uniquement.

En caractéristique zéro, on s'intéresse à la généralisation de cette notion aux super-algèbres (voir [CS95, RC20]). La géométrie différentielle est une source d'exemples (voir [RC20]) : si V une variété différentielle, posons $A := \mathcal{O}_V$ l'algèbre des fonctions lisses sur V et $L := \mathrm{Vect}(V)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur V. Le couple (A, L) est alors équipé d'une structure de Lie-Rinehart. Selon Claude Roger, les algèbres de Lie-Rinehart fournissent des méthodes directes pour traiter les relations entre les opérateurs différentiels sur des variétés et l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de la variété ([RC20]). Plus de détails peuvent se trouver dans [RG63]. Une partie du travail présenté dans ce manuscrit a consisté à rechercher toutes les structures de super-algèbres de Lie-Rinehart en petites dimensions $(\dim(A) \leq 2,\ \dim(L) \leq 4)$. Les résultats sont présentés dans le chapitre 4.

En caractéristique positive, on s'intéresse aux algèbres de Lie-Rinehart restreintes (non-super, sauf mention explicite du contraire). Dans ce contexte, l'algèbre de Lie L sous-jacente est restreinte et l'ancre ρ doit vérifier des conditions de compatibilité supplémentaires avec la p-opération de L (voir la définition 5.3.3). Tout comme l'ancre mesure le défaut de A-linéarité du crochet, les conditions de compatibilité supplémentaires permettent de mesurer le défaut de p-homogénéité de la p-opération relativement à l'action de A. Les algèbres de Lie-Rinehart restreintes sont apparues d'abord de façon implicite dans des travaux de Hochschild portant sur sa théorie de Galois-Jacobson des extensions de degré 1 purement inséparables ([HG55.1]). Elles ont ensuite été étudiées pour elles-mêmes par plusieurs auteurs ([RD00, DI12, SC15, SP16]).

Déformations formelles de structures algébriques. La théorie des déformations de structures algébriques a été initiée par Gerstenhaber dans le cas des algèbres associatives ([GM64]), puis a été étendue aux algèbres de Lie par Nijenhuis et Richardson ([NR66, NR67]). Le principe est, étant donnée une algèbre non-associative (A, μ), de construire une nouvelle loi d'algèbre μ_t sur l'espace formel $A[[t]]$ en ajoutant à μ des termes en puissances du paramètre formel t. La nouvelle loi μ_t sera alors de la forme

$$\mu_t = \mu + \sum_{i \geq 1} t^i \mu_i, \quad \mu_i : A \times A \to A \text{ bilinéaires.}$$

Selon la structure que l'on souhaite avoir sur $A[[t]]$, certaines conditions sont nécessaires sur les applications μ_i. Par exemple, si μ est une loi associative et si l'on veut que μ_t soit également associative, il est alors nécessaire de choisir μ_1 parmi les 2-cocycles de la cohomologie de Hochschild à coefficients adjoints (voir [GM64]). Dans ce contexte, il est naturel de considérer certaines algèbres graduées qui vont encoder les propriétés de ces déformations. Il s'agit de l'algèbre de Gerstenhaber dans le cas associatif et l'algèbre de Nijenhuis-Richardson pour le cas des algèbres de Lie (voir les références précédentes).

L'application physique la plus célèbre de la théorie des déformations est la *quantification par déformation*. Initiée par deux articles pionniers de Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz et Sternheimer en 1978 ([BF78]), cette théorie permet de décrire la mécanique quantique comme une déformation de la mécanique classique. Plus précisément, en mécanique classique hamiltonienne, les observables sont des fonctions de l'espace des phases et leurs interactions sont encodées par un crochet de Poisson. Rappelons qu'une algèbre de Poisson est une algèbre associative A équipée de plus d'un crochet de Lie $\{\cdot,\cdot\}$ vérifiant

$$\{fg,h\} = f\{g,h\} + g\{f,h\},\ \forall f,g,h \in A,$$

appelé alors crochet de Poisson. En mécanique quantique, les observables sont des opérateurs sur un espace de Hilbert, dont les interaction sont encodées par un crochet de Lie. Les équations d'évolution classiques sont alors remplacées par d'autres équations, comme l'équation de Schrödinger ou l'équation de Heisenberg ([BF78, WP17, BC23, PN02]), voir aussi l'introduction de la section 5.5 de ce mémoire. L'idée de Bayen, Flato et leurs collaborateurs est de déformer la structure de Poisson des observables classiques en une nouvelle structure qui va encoder les observables quantiques. De nombreux noms ont étudié cette question, citons De Wilde et Lecomte (cas des variétés symplectiques, 1983), Omori, Maeda et Yoshioka (cas des variétés de Weyl, 1991), Fedosov (construction explicite, 1995) et Kontsevich (cas des variétés de Poisson quelconques, 1997, récompensé par la médaille Fields) (références dans [PN02]). Cette approche s'est avérée fructueuse et a permis de développer des outils efficaces en physique théorique. Les déformations apparaissent aussi dans d'autres domaines des mathématiques et de la physique théoriques tels que la géométrie algébrique dérivée, les structures élevées ou encore la théorie de la renormalisation.

Dans cette thèse, on s'intéresse essentiellement aux déformations formelles. Toutefois, d'autres méthodes de déformation existent, on pourra consulter [MA07] et les références qu'il contient pour un aperçu de ces autres méthodes.

Dans un article récent, Mandal et Mishra ont développé la théorie des déformations formelles des Hom-algèbres de Lie-Rinehart ([MM20]). La notion de Hom-algèbre a émergé des q-déformations des algèbres de Witt et de Virasoro et été introduite par Harwig, Larsson et Silvestrov pour les algèbres de Lie ([HLS06]) et par Makhlouf et Silvestrov pour d'autres types d'algèbres ([MS08]), puis a été étendue au cas des super-algèbres par Ammar et Makhlouf ([AM10]). Une partie de ce travail de thèse a consisté à adapter les travaux de Mandal et Mishra au cas des super-algèbres de Lie-Rinehart. Le chapitre 3 présente les résultats obtenus.

Dans le cas restreint, en caractéristique positive, peu de choses sont connues sur les déformations formelles restreintes d'algèbres de Lie restreintes. Les déformations infinitésimales ont été introduites dans [EF08]. En particulier, il a été montré que l'élément infinitésimal de la déformation restreinte est un 2-cocycle de la cohomologie restreinte et que le second groupe de cohomologie restreinte classifie à équivalence près les déformations infinitésimales restreintes. Rien n'est connu pour les algèbres de Lie-Rinehart restreintes. On propose une théorie dans les chapitres 5 et 6.

Organisation de la thèse. Cette thèse est divisée en deux parties. Dans la première, on s'intéresse aux (super-)algèbres de Lie-Rinehart sur un corps de caractéristique zéro. Le but de cette première partie est de construire des déformations formelles de super-algèbres de Lie-Rinehart en adaptant au cas gradué l'article [MM20], puis de classifier ces structures en petites dimensions. La deuxième partie est consacrée à la caractéristique strictement positive et aux algèbres de Lie-Rinehart restreintes. Il s'agit d'introduire et de comprendre les déformations formelles d'algèbres de Lie-Rinehart restreintes, ainsi que les liens avec la cohomologie restreinte.

Dans le premier chapitre, on présente des généralités sur les algèbres de Lie et de Lie-Rinehart en caractéristique nulle. On commence par introduire les algèbres de Lie et leurs propriétés ainsi que la cohomologie de Chevalley-Eilenberg. Puis, on présente les algébroïdes de Lie, qui sont les objets issus de la géométrie différentielle qui ont motivé la définition des algèbres de Lie-Rinehart. Ces dernières sont ensuite introduites, avec des exemples, suivis des notions de module, d'algèbre enveloppante et de cohomologie.

Le second chapitre est consacré aux super-algèbres de Lie et super-algèbres de Lie-Rinehart. Après avoir introduit les notions essentielles liées aux algèbres graduées, on définit et donne des exemples de super-algèbres de Lie-Rinehart. On termine le chapitre en proposant une technique de supérisation (paragraphe 2.4.2) qui permet de construire une super-algèbre de Lie-Rinehart en partant d'une algèbre de Lie-Rinehart.

Dans le troisième chapitre, on développe une théorie des déformations formelles des super-algèbres de Lie-Rinehart. Dans les deux premières sections, on introduit la notion de super-multidérivation et on montre qu'il existe une correspondance bijective entre ces super-multidérivations et les structures de super-algèbre de Lie-Rinehart pour un couple (A, L) donné (proposition 3.2.1). On utilise ensuite cette correspondance pour construire une cohomologie adaptée aux déformations formelles. Dans les sections suivantes, on montre que les résultats usuels de théorie des déformations restent valables dans ce contexte. On montre que l'élément infinitésimal d'une déformation formelle est un 2-cocycle de notre complexe de déformation (théorème 3.3.2). On étudie ensuite l'équivalence de déformations et on montre que la trivialité du second groupe de cohomologie implique la rigidité de la super-algèbre (corollaire 3.4.6). Enfin, on s'intéresse aux obstructions à l'extension de déformations d'ordre fixé à l'ordre suivant. On montre que le troisième groupe de cohomologie contrôle le fait de pouvoir étendre une déformation ou non (théorème 3.5.4). On conclut ce chapitre en donnant un exemple concret de rigidité pour une super-algèbre de Lie-Rinehart.

L'objectif du quatrième chapitre est d'établir une classification des super-algèbres de Lie-Rinehart en petites dimensions, en se basant sur des classifications déjà existantes des super-algèbres associatives super-commutatives et des super-algèbres de Lie. Le coeur de ce travail a été de réaliser un programme sur Mathematica permettant d'effectuer les calculs. Dans une première section, on introduit toutes les constantes de structure en jeu dans le cas d'une super-algèbre de Lie-Rinehart et on décrit les équations qui les gouvernent. On donne ensuite la classification des super-algèbres associatives super-commutatives A de dimension ≤ 4 et des super-algèbres de Lie L de dimension ≤ 4. Puis, pour chaque couple (A, L) tel que $\dim(A) \leq 2$, $\dim(L) \leq 4$, on donne la liste de toutes les structures de super-algèbres de Lie-Rinehart possibles, à l'aide du programme Mathematica décrit précédemment. On se limite à ces petites dimensions en raison de contraintes techniques et de temps d'exécution du programme, mais ce dernier devrait fonctionner pour n'importe quelle dimension. Toutefois, le nombre de structures possibles croît très rapidement dès que l'on augmente la dimension, il ne semble donc pas raisonnable de donner une liste de toutes les super-algèbres de Lie-Rinehart possibles en dimensions plus grandes. Les résultats sont présentés sous forme de tableaux.

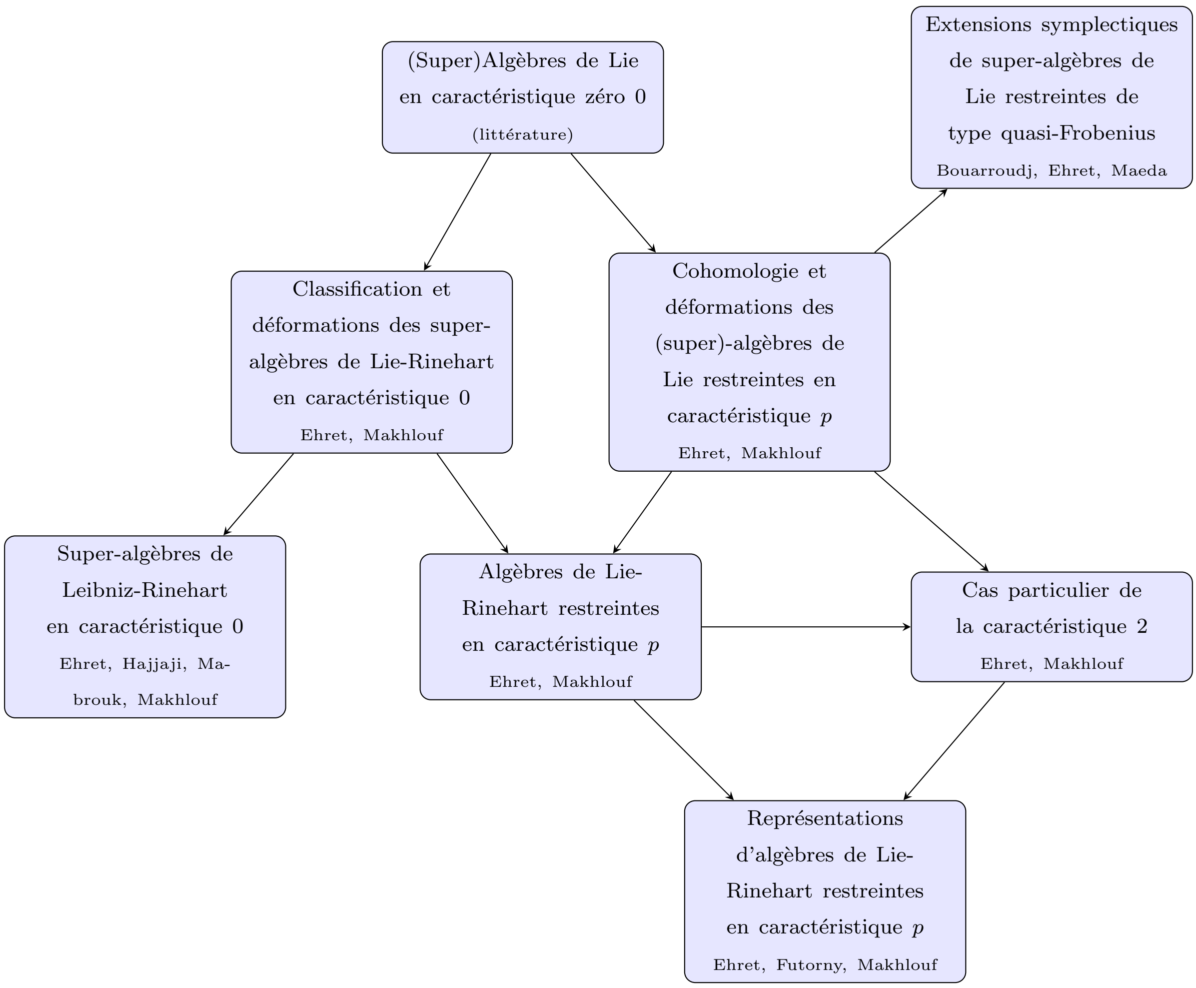
Le chapitre 5 est consacré à l'étude des algèbres de Lie-Rinehart restreintes sur des corps de caractéristique $p > 2$. Tout d'abord, on rappelle la théorie des algèbres de Lie restreintes en caractéristique $p > 0$, avec des exemples. On décrit ensuite les premier et second groupes de cohomologie restreinte tels que construits dans [EF08] (section 5.2). Puis, on rappelle la définition d'algèbre de Lie-Rinehart restreinte (définition 5.3.3), introduit le concept de multidérivation restreinte (définition 5.3.7), et développe une théorie des déformation formelles contrôlées par la cohomologie restreinte (section 5.4). On montre notamment que l'élément infinitésimal d'une déformation formelle restreinte est un 2-cocycle de la cohomologie restreinte (théorème 5.4.4), que deux déformations équivalentes correspondent à des 2-cocycles cohomologues (théorème 5.4.7) et on donne une condition (cohomologique) nécessaire et suffisante pour pouvoir étendre des déformations à un ordre supérieur (proposition 5.4.11). On conclut ce chapitre en discutant des structures restreintes sur l'algèbre de Heisenberg de dimension 3. On montre qu'il y a (à isomorphisme restreint près) trois différentes algèbres de Heisenberg restreintes (théorème 5.5.3), et on calcule pour chacune le second groupe de cohomologie restreint à coefficients adjoints (théorèmes 5.5.7 et 5.5.9). On construit enfin des algèbres de Lie-Rinehart restreintes sur ces algèbres de Heisenberg et on calcule des déformations (section 5.5.3).

Le chapitre 6 traite du cas particulier du la caractéristique $p = 2$. Dans une première section, on adapte les définitions générales concernant les algèbres de Lie restreintes au cas $p = 2$ en soulignant les différences avec le cas $p > 2$. On étudie les interactions de la 2-opération avec les séries formelles à un paramètre (équation 6.3) dans le but de mieux comprendre les déformations restreintes. Puis, on introduit un nouveau complexe de cochaînes (théorème 6.1.8) et on montre quelques applications immédiates. La deuxième section est consacrée aux algèbres de Lie-Rinehart restreintes en caractéristique $p = 2$ et à leurs déformations formelles restreintes. On montre notamment que leurs déformations sont contrôlées par la cohomologie que l'on vient d'introduire (propositions 6.2.7, 6.2.10 et 6.2.16). On étudie les déformations équivalentes et les obstructions. Ensuite, on présente un exemple détaillé sur l'algèbre de Heisenberg restreinte. Comme dans le chapitre précédent, on classifie les structures restreintes sur l'algèbre de Heisenberg et on décrit explicitement les seconds groupes de cohomolgie à coefficients adjoints (théorème 6.3.4). On calcule ensuite un exemple de structure de Lie-Rinehart restreinte sur une algèbre de Heisenberg restreinte et on étudie ses déformations.

Dans le chapitre 7, on s'intéresse aux représentations restreintes d'algèbres de Lie-Rinehart restreintes. On rappelle dans un premier temps la définition de représentation restreinte d'algèbres de Lie-Rinehart restreintes et on donne deux exemples immédiats. Ensuite, on s'intéresse au produit semi-direct, que l'on divise en deux cas. Tout d'abord, on se place sur un corps de caractéristique $p = 2$ et on construit un produit semi-direct entre deux algèbres de Lie-Rinehart restreintes ayant la même composante associative et dont l'une des deux a une ancre nulle. Dans ce cas, on peut construire explicitement une 2-opération sur le produit semi-direct (proposition 7.2.6) et déduire une condition nécessaire et suffisante pour que ce produit semi-direct soit équipé d'une structure d'algèbre de Lie-Rinehart restreinte (proposition 7.2.7). Puis, sur un corps de caractéristique $p > 0$ quelconque, on construit un produit semi-direct entre une algèbre de Lie-Rinehart restreinte et une représentation restreinte. Dans ce cas, il est plus difficile de construire une p-opération explicite et quelques subtilités doivent être considérées (proposition 7.2.3). Finalement, on montre une condition nécessaire et suffisante pour que ce produit semi-direct soit aussi équipé d'une structure de Lie-Rinehart restreinte (proposition 7.2.4). La troisième section de ce chapitre est consacrée à l'étude de représentations restreintes d'algèbres de Lie-Rinehart restreintes en dimension infinie. Ce chapitre est issu d'un travail en cours avec V. Futorny et A. Makhlouf.

Le huitième et dernier chapitre présente une application supplémentaire de la cohomologie restreinte. On construit des doubles extensions pour des super-algèbres de Lie restreintes de type quasi-Frobenius (voir définition 8.2.7), et on met en évidence des conditions nécessaires pour que la double extension soit également restreinte. La nouveauté principale ici est que les obstructions au processus de double extension symplectique sont encodées par la cohomologie restreinte, au contraire du cas ordinaire (non restreint), où les obstructions sont encodées par la cohomologie de Chevalley-Eilenberg ordinaire. Puisqu'on ne va rencontrer que des cocycles d'ordre 1 et 2, la méconnaissance de la cohomologie restreinte aux ordres supérieurs ne sera pas un obstacle ici. On commence par introduire les concepts de base concernant les super-algèbres de Lie restreintes, leur cohomologie restreinte et les structures de type quasi-Frobenius dans la section 8.2. Les sections 8.3 et 8.4 sont consacrées à la construction de doubles extensions symplectiques. Les résultats principaux sont donnés par les théorèmes 8.3.1, 8.3.4, 8.4.1 et 8.4.3. Les réciproques de ces théorèmes est donnée respectivement par les théorèmes 8.3.2, 8.3.5, 8.4.2 et 8.4.4. Dans la section 8.5, on étudie certains exemples de doubles extensions symplectiques, empruntés à [BM21, GKN04]. Ce chapitre est issu d'un travail en commun avec S. Bouarroudj et Y. Maeda.

Panorama des travaux menés pendant la thèse.



Publications et pré-publications :

1. Q. Ehret, A. Makhlouf, *On Deformations and Classification of Lie-Rinehart Superalgebras*, Communications in Mathematics 30 (2022), no. 2, 67–92 ([EM22]) ;
2. S. Bouarroudj, Q. Ehret, Y. Maeda, *Symplectic double extensions for restricted quasi-Frobenius Lie (super)algebras*, arXiv :2301.12385 (2023) ([BEM23]) ;
3. Q. Ehret, A. Makhlouf, *Deformations and Cohomology of restricted Lie-Rinehart algebras in positive characteristic*, arXiv :2305.16425 (2023) ; ([EM23]).
4. Q. Ehret, A. Hajjaji, S. Mabrouk, A. Makhlouf, *On Leibniz-Rinehart Superalgebras*, in preparation (les résultats relatifs à ce projet ne sont pas présentés dans ce mémoire).

Première partie

(Super-)Algèbres de Lie-Rinehart en caractéristique zéro

Chapitre 1

Généralités sur les algébroïdes de Lie et les algèbres de Lie-Rinehart

Dans ce premier chapitre, on présente les objets sur lesquels porte cette thèse, leurs propriétés et les outils permettant de les étudier. On commence par donner la définition d'une algèbre de Lie, des exemples et des propriétés immédiates, ainsi que les constructions classiques (sous-algèbres, idéaux, morphismes, représentations et dérivations). On présente ensuite la cohomologie de Chevalley-Eilenberg, qui est un outil fondamental pour l'étude de ces algèbres et qui reviendra tout au long de cette thèse. Puis, on se consacre aux algèbres de Lie-Rinehart (définition 1.3.1) en commençant par leur version géométrique que sont les algébroïdes de Lie, avec un certain nombre d'exemples. On présente ensuite les notions de représentation et de produit semi-direct, d'algèbre enveloppante et de cohomologie associée à une algèbre de Lie-Rinehart.

1.1 Algèbres de Lie

1.1.1 Généralités

$\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos, de caractéristique 0. On présente dans cette première section des généralités sur les algèbres de Lie, ainsi que la cohomologie de Chevalley-Eilenberg, qui va servir tout au long de cette thèse. Des références classiques sur la théorie des algèbres de Lie sont les ouvrages de Humphreys ([HJ78]) et de Jacobson ([JN62]).

Définition 1.1.1. Soit L un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un *crochet de Lie* sur L est une application bilinéaire $[\cdot,\cdot] : L \times L \longrightarrow L$ vérifiant, pour tous $x, y, z \in L$,

1. $[x, x] = 0$ (antisymétrie)
2. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ (identité de Jacobi).

Si L est équipé d'un tel crochet, on appelle le couple $(L, [\cdot,\cdot])$ une *algèbre de Lie.*

Exemples :

- $[x, y] = 0 \ \forall x, y \in L$ (algèbre abélienne) ;
- Si $\mu : L \times L \longrightarrow L$ est une loi d'algèbre associative, alors

  $$[x, y] := \mu(x, y) - \mu(y, x) \ \forall x, y \in L$$

  est un crochet de Lie sur L appelé *commutateur.*

  Conséquence importante : $M_n(\mathbb{K})$ munie du commutateur est une algèbre de Lie, que l'on note habituellement $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$.

- Si $L = \mathbb{K}^2$, toute application bilinéaire antisymétrique est un crochet de Lie.
- $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K}) = \{M \in M_n(\mathbb{C}),\ Tr(M) = 0\}$ munie du commutateur est une algèbre de Lie. On peut écrire explicitement le crochet sur une base. Considérons les matrices

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $\{X, Y, H\}$ est une base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ et le crochet de Lie est donné par

$$[X, Y] = H,\ [H, Y] = -2Y,\ [H, X] = 2X.$$

Cette algèbre est simple (voir définition 1.1.2 ci-dessous).

Définition 1.1.2. Soit L une algèbre de Lie.
- Un sous-espace vectoriel $H \subset L$ est une *sous-algèbre de Lie* de L si $[x, y] \in H\ \forall x, y \in H$.
- Un sous-espace vectoriel $I \subset L$ est un *idéal* de L si $[x, y] \in I\ \forall x \in I,\ \forall y \in L$.
- Une algèbre de Lie non-abélienne n'admettant pour idéaux que $\{0\}$ et elle-même est dite *simple*.

Définition 1.1.3. Soient $(L_1, [\cdot,\cdot]_1)$ et $(L_2, [\cdot,\cdot]_2)$ deux algèbres de Lie. Une application linéaire $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ est un *morphisme d'algèbres de Lie* si

$$\varphi([x, y]_1) = [\varphi(x), \varphi(y)]_2\ \ \forall x, y \in L_1.$$

Définition 1.1.4. Soit V un espace vectoriel. Une application linéaire $\pi : L \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ est appelée *représentation d'algèbres de Lie* si π est un morphisme d'algèbres de Lie, c'est-à-dire si

$$\pi([x, y]) = \pi(x)\pi(y) - \pi(y)\pi(x),\ \ \forall x, y \in L.$$

Remarque. On dit aussi que V est un L-module.

Exemple fondamental. La représentation adjointe, donnée par

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} : L &\longrightarrow \mathrm{End}(L) \\ x &\longmapsto \mathrm{ad}_x : y \longmapsto [x, y],\ \ \forall x, y \in L. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Cette représentation permet de montrer le résultat suivant.

Théorème 1.1.5 (Ado). *Toute algèbre de Lie de dimension finie est une sous-algèbre de End*(V) *muni du commutateur, pour un* V *convenable.*

Définition 1.1.6. Soit L une algèbre de Lie. Une application linéaire $D : L \longrightarrow L$ est une *dérivation* de L si elle vérifie l'identité de Leibniz :

$$\forall x, y \in L,\ D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)].$$

On note $\mathrm{Der}(L)$ l'espace vectoriel des dérivations de L.

Proposition 1.1.7. *L'espace des dérivations* $\mathrm{Der}(L)$ *muni du commutateur est une sous-algèbre de Lie de End*(L).

Exemple. Pour tout $x \in L$, l'endomorphisme ad_x est une dérivation de L. Les dérivations de cette forme sont appelées *dérivations intérieures.*

Algèbre enveloppante. La construction de l'algèbre enveloppante pour une algèbre de Lie est détaillée dans la section 1.3.3.

1.1.2 Cohomologie de Chevalley-Eilenberg

Historiquement, la cohomologie de Chevalley-Eilenberg apparaît dès 1929 dans les travaux de Cartan portant sur la topologie des groupes de Lie et des espaces homogènes, en s'inspirant des méthodes de de Rham ([CE29]). Chevalley et Eilenberg ont ensuite généralisé cela en la cohomologie à valeurs dans un module quelconque, que l'on présente ci-dessous ([CE48]). On souhaite construire un complexe de cochaînes associé à L :

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2 \xrightarrow{d^2} C^3 \xrightarrow{d^3} ...$$

avec C_i des L-modules et d^j des applications linéaires vérifiant $d^{j+1} \circ d^j = 0$. On réalise cette construction comme suit. Soient L une algèbre de Lie et M un L-module. Soient $m \geq 0$ et

$$T_L = \bigoplus_{m \geq 0} T^m L$$

l'algèbre tensorielle de L. On définit alors l'algèbre extérieure

$$\wedge_L := \bigoplus_{m \geq 0} \wedge^m L, \quad \wedge^m L := T^m L / I,$$

où I désigne l'idéal engendré par les éléments de la forme

$$\langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \otimes x_{k+1} \otimes \cdots \otimes x_m + x_1 \otimes \cdots \otimes x_{k+1} \otimes x_k \otimes \cdots \otimes x_m \rangle .$$

Pour $m \geq 0$ on définit alors les espaces de cochaînes

$$\begin{cases} C^m_{\text{CE}}(L, M) & = \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\wedge^m L, M) \quad \text{pour } m \geq 1, \\ C^0_{\text{CE}}(L, M) & \cong M. \end{cases}$$

Un élément de $C^m_{\text{CE}}(L, M)$ est une application $\varphi : L^{\times m} \longrightarrow M$, m-linéaire et antisymétrique, cette dernière condition s'énonçant

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_m, \ \varphi(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)}) = \text{sign}(\sigma)\varphi(x_1, ..., x_m),$$

où $\mathfrak{S}_m$ désigne le groupe des permutation d'un ensemble à m éléments.

Remarque : si $(L, [\cdot, \cdot])$ est une algèbre de Lie, alors le crochet $[\cdot, \cdot]$ est un élément de $C^2_{\text{CE}}(L, L)$, l'algèbre de Lie L étant vue comme un module sur elle-même au moyen de la représentation adjointe.

On définit ensuite les applications différentielles $d^m_{\text{CE}} : C^m_{\text{CE}}(L, M) \longrightarrow C^{m+1}_{\text{CE}}(L, M)$, données par

$$\begin{aligned} d^m_{\text{CE}}\varphi(x_1, ..., x_{q+1}) = & \sum_{1 \leq i < j \leq m+1} (-1)^{i+j-1} \varphi\left([x_i, x_j], x_1, ...\hat{x_i}, ..., \hat{x_j}, ..., x_{m+1}\right) \\ & + \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^i x_i \cdot \varphi\left(x_1, ..., \hat{x_i}, ..., x_{m+1}\right), \end{aligned} \tag{1.2}$$

où le chapeau ($\hat{}$) indique que l'on omet le terme.

Proposition 1.1.8. *Ces applications vérifient* $d^{m+1}_{CE} \circ d^m_{CE} = 0, \quad \forall m \geq 0.$

Notations.

- $\left(C^m_{\mathrm{CE}}(L,M), d^m_{\mathrm{CE}}\right)_{m\geq 0}$ est un *complexe de cochaînes.*
- On note $Z^m_{\mathrm{CE}}(L,M) := \mathrm{Ker}(d^m_{\mathrm{CE}})$ les *m-cocycles.*
- On note $B^m_{\mathrm{CE}}(L,M) := \mathrm{Im}(d^{m-1}_{\mathrm{CE}})$ les *m-cobords.*

Définition 1.1.9. Grâce à la proposition 1.1.8, on a $B^m_{\mathrm{CE}}(L,M) \subset Z^m_{\mathrm{CE}}(L,M)$. On peut donc considérer l'espace vectoriel quotient

$$H^m_{\mathrm{CE}}(L,M) := Z^m_{\mathrm{CE}}(L,M)/B^m_{\mathrm{CE}}(L,M),$$

que l'on appelle le $m^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie de Chevalley-Eilenberg de L.

Point de vue de Nijenhuis-Richardson. Introduit par Nijenhuis et Richardson ([NR66], [NR67]), ce point de vue permet d'avoir des formules plus condensées et s'avère fécond en pratique. Soient $\varphi \in \mathrm{Hom}(\wedge^n L, L)$ et $\psi \in \mathrm{Hom}(\wedge^q L, L)$, on définit $\varphi \odot \psi \in \mathrm{Hom}(\wedge^{n+q-1} L, L)$ par

$$\varphi \odot \psi(x_1, \cdots, x_{n+q-1}) = \sum_{\sigma \in Sh(n,q)} \varphi\left(\psi(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(q)}), x_{\sigma(q+1)}, \cdots, x_{\sigma(n+q-1)}\right),$$

avec

$$Sh(n,q) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+q-1},\ \sigma(1) < \cdots < \sigma(q) \text{ et } \sigma(q+1) < \cdots < \sigma(n+q-1)\}.$$

On peut alors définir le *crochet de Nijenhuis-Richardson* par

$$[\varphi, \psi]_{NR} = \varphi \odot \psi - (-1)^{(n-1)(q-1)} \psi \odot \varphi.$$

Avec ce crochet, $\left(\mathrm{Hom}(\wedge^m L, L)\right)_{m\geq 0}$ devient une algèbre de Lie graduée : le crochet vérifie en effet l'identité de Jacobi graduée

$$[\varphi, [\psi, \theta]] = [[\varphi, \psi], \theta] + (-1)^{(n-1)(q-1)}[\psi, [\varphi, \theta]],$$

pour $\varphi \in \mathrm{Hom}(\wedge^n L, L),\ \psi \in \mathrm{Hom}(\wedge^q L, L),\ \theta \in \mathrm{Hom}(\wedge^m L, L)$.

Proposition 1.1.10. *Soit $(L, [\cdot,\cdot])$ une algèbre de Lie. Avec ce formalisme, on a*

$$d^q_{CE}\varphi = \Big[[\cdot,\cdot], \varphi\Big]_{NR}.$$

1.2 Algébroïdes de Lie

De la même façon qu'une algèbre de Lie peut se voir comme une approximation infinitésimale (espace tangent à l'identité) d'un groupe de Lie, une algébroïde de Lie est un objet infinitésimal d'un groupoïde de Lie. Pour la définition et bien davantage sur les groupoïdes de Lie (notamment la correspondance entre groupoïdes de Lie et algébroïdes de Lie), on pourra consulter [MK87]. Les algébroïdes de Lie ont été introduits par Pradines.

Soient M une variété réelle lisse et $T(M)$ son fibré tangent, c'est-à-dire l'union disjointe des espaces tangents T_pM en tous points p de la variété M. Rappelons qu'un champ de vecteurs lisse sur M est une application $X : M \to T(M)$ telle que $X(p) \in T_pM,\ \forall p \in M$. Si $f \in C^\infty(M)$, alors $X(f)(p)$ est la dérivée directionnelle de f au point p dans la direction $X(p)$. On peut équiper l'espace vectoriel des champs de vecteurs lisses sur M d'une structure l'algèbre de Lie de la façon suivante.

Soient X, Y deux champs de vecteurs lisses sur M. On peut les écrire

$$X = \sum_i X^i \partial_i, \quad Y = \sum_j Y^j \partial_j.$$

Pour $f \in C^\infty(M)$, on définit le crochet

$$[X,Y](f) = X\left(Y(f)\right) - Y\left(X(f)\right) = \sum_i \sum_j \left(X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i\right) \partial_i. \tag{1.3}$$

On obtient ainsi une algèbre de Lie que l'on note $\mathfrak{X}(M)$.

Remarque. Soient M et N deux variétés de classe C^∞. Une application $f : M \to N$ est dite de classe C^∞ si pour tout $p \in M$, il existe une carte (U, φ) centrée en p et une carte (V, ψ) de N centrée en $f(p)$ telles que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \varphi(V)$ est de classe C^∞.

Définition 1.2.1. Un *algébroïde de Lie* est un fibré vectoriel lisse $(\pi, \mathfrak{g})$ sur M, avec $\pi : \mathfrak{g} \to M$ muni

- d'une structure de Lie sur l'espace vectoriel des sections lisses de $\mathfrak{g}$, noté $\Gamma\,\mathfrak{g}$,
- d'un morphisme de fibré vectoriels de M lisse $\alpha : \mathfrak{g} \to T(M)$,

tels que

- l'application induite $\Gamma\alpha : \Gamma\,\mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ soit un morphisme de Lie ;
- $\forall f \in C^\infty(M),\ \forall x, y \in \Gamma\,\mathfrak{g}$, on ait $[x, fy] = f[x, y] + \Gamma(\alpha)(x)(f)y$.

Remarques.

1. Si $(\pi, \mathfrak{g})$ est un fibré vectoriel lisse sur une variété lisse M, une *section* de $\mathfrak{g}$ est une application $s : M \to \mathfrak{g}$ telle que $\pi \circ s = \mathrm{id}$.
2. $\Gamma\,\mathfrak{g}$ peut être équipé d'une structure de $C^\infty(M)$-module via

$$\begin{aligned} C^\infty(M) \times \Gamma\,\mathfrak{g} &\longrightarrow \Gamma\,\mathfrak{g} \\ (f, x) &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Exemples :

1. L'exemple le plus simple est de prendre M un ensemble réduit à un point, et $\Gamma\alpha = 0$. L'algébroïde de Lie ainsi définie n'est autre qu'une algèbre de Lie. C'est pour cette raison qu'un algébroïde de Lie peut être considéré comme une "généralisation à plusieurs objets" d'une algèbre de Lie.
2. Si M est une variété lisse, le fibré vectoriel tangent $T(M)$ équipé du crochet de Lie des champs de vecteurs défini en (1.3) est un algébroïde de Lie, avec $\Gamma\alpha$ l'application identité de $T(M)$.

Définition 1.2.2. Soient $(\mathfrak{g}, \pi, \alpha)$ et $(\mathfrak{g}', \pi', \alpha')$ deux algébroïdes sur une même variété différentielle M. Un morphisme de fibrés vectoriels $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ est appelé *morphisme d'algébroïdes de Lie* s'il vérifie $\alpha' \circ \phi = \alpha$ et si l'application induite sur $\Gamma\,\mathfrak{g}$ est un morphisme de Lie.

1.3 Algèbres de Lie-Rinehart

La notion d'algèbre de Lie-Rinehart est centrale dans ce travail de thèse. Il s'agit d'une version algébrique des algébroïdes de Lie qu'on a présenté précédemment et a été introduite par plusieurs auteurs dans les années cinquante et soixante, notamment Herz ([HJ53]), Palais ([PR61]) et Rinehart ([RG63]), ce dernier ayant notamment montré un théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt. Une étude algébrique plus approfondie de ces objets a été menée plus récemment par Huebschmann ([HJ90], [HJ98]), qui a baptisé ces structures en l'honneur de l'un des pionniers cités précédemment. Les algèbres de Lie-Rinehart ont porté plusieurs noms au cours de l'histoire, on peut ainsi les retrouver sous le nom "pseudo-algèbres de Lie" (Herz), "d-Lie Rings" (Palais) ou "$(\mathbb{K}, A)$-Lie algebras" (Huebschmann [1]). On peut également trouver dans [HJ21] une rétrospective de Huebschmann sur son travail sur les algèbres de Lie-Rinehart.

1.3.1 Définition et exemples

Soit $\mathbb{K}$ un corps.

Définition 1.3.1. Une *algèbre de Lie-Rinehart* sur $\mathbb{K}$ est un triplet (A, L, ρ), où $(L, [\cdot, \cdot])$ est une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$, A une algèbre associative et commutative sur $\mathbb{K}$, telles que L soit munie d'une structure de A-module et ρ est une application

$$\rho : L \longrightarrow \mathrm{Der}(A), \quad x \mapsto \rho_x$$

appelée *ancre*, qui est à la fois un morphisme de A-modules et d'algèbres de Lie et qui vérifie la *condition de compatibilité* (parfois appelée condition de Leibniz)

$$[x, ay] = \rho_x(a)y + a[x, y], \ \forall x, y \in L, \ \forall a \in A. \tag{1.4}$$

Dans tout ce manuscrit, on utilisera indifféremment les notations $\rho(x)(a)$ ou $\rho_x(a)$ pour désigner les images par les dérivations induites par l'ancre, pour $x \in L$ et $a \in A$.

Remarque. La condition de compatibilité (1.4) permet de voir l'ancre comme une application qui mesurant le "défaut de A-linéarité" du crochet de Lie.

Remarque. Soit A une algèbre associative. L'espace des dérivations

$$\mathrm{Der}(A) = \{D : A \to A, \ D(ab) = D(a)b + D(a)b, \ a, b \in A\}$$

est stable par le commutateur et peut donc être équipé d'une structure d'algèbre de Lie avec pour crochet le commutateur.

Exemples :

1. **Algèbre de Lie-Rinehart triviale.** Si A est une algèbre associative commutative unitaire et L une algèbre de Lie, alors on peut toujours équiper le couple (A, L) d'une structure d'algèbre de Lie-Rinehart en prenant l'action triviale et l'ancre nulle. On dit qu'une action est triviale si tout élément de A agit par zéro, sauf l'élément unité e qui agit par $e \cdot x = x, \ \forall x \in L$.
2. **Algèbre de Lie-Rinehart des dérivations.** Soit A une algèbre associative commutative et $\mathrm{Der}(A)$ son algèbre de Lie des dérivations. Le couple $(A, \mathrm{Der}(A))$ peut alors être équipé d'une structure de Lie-Rinehart avec pour ancre l'identité de $\mathrm{Der}(A)$.

1. Bien que pour lui, les deux appellations ne sont pas synonymes : il préfère "Lie-Rinehart" lorsque l'algèbre associative commutative A peut varier et "$(\mathbb{K}, A)$-algèbre de Lie" lorsque A est fixée, voir [HJ21], Section 6.

3. **Algébroïde de Lie.** Si M est une variété différentielle, alors les algébroïdes de Lie sur M correspondent exactement aux algèbres de Lie-Rinehart sur l'algèbre associative $C^\infty(M)$ dont l'algèbre de Lie est de type fini et libre en tant que $C^\infty(M)$-module.

4. **Algèbre de Lie-Rinehart de transformation.** Soit L une algèbre de Lie et A une algèbre associative commutative. On fixe un morphisme d'algèbres de Lie
$$\sharp : L \to \mathrm{Der}(A),\ x \mapsto x^\sharp.$$
On regarde l'algèbre de Lie-Rinehart $(\mathbb{K}, L, 0)$ et on considère le A-module libre $A \otimes L$ que l'on équipe du crochet de Lie
$$[a\otimes x, a'\otimes y] = aa'\otimes[x,y] - a'y^\sharp(a)\otimes x + ax^\sharp(a')\otimes y.$$
Alors l'application $A\otimes L \to \mathrm{Der}(A),\ a\otimes x \mapsto ax^\sharp$ est une ancre qui munit le couple $(A, A\otimes L)$ d'une structure de Lie-Rinehart, appelée algèbre de Lie-Rinehart de transformation.

5. **Algébroïde d'Atiyah d'un fibré principal.** Soit A une algèbre associative commutative et L une algèbre de Lie. Alors A est un L-module par l'action induite par le morphisme $\sharp$ introduit à l'exemple précédent. On note
   - $L^\sharp = \mathrm{Im}(\sharp) \subset \mathrm{Der}(A)$;
   - $\mathrm{Der}(A)^L = \{X \in \mathrm{Der}(A),\ [v^\sharp, X] = 0\ \forall v \in L\}$;
   - $A^L = \{a \in A,\ v^\sharp(a) = 0\ \forall v \in L\} \subset A.$

   Alors A^L est une sous-algèbre associative commutative de A et un $\mathrm{Der}(A)^L$-module. Avec ces données, on peut munir $(A^L, \mathrm{Der}(A)^L)$ d'une structure de Lie-Rinehart avec l'ancre $\rho : \mathrm{Der}(A)^L \to \mathrm{Der}(A^L),\ X \mapsto X_{|A^L}$.

6. **Un exemple en dimension infinie : l'algèbre de Witt.** On se place ici sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on considère l'algèbre associative commutative des polynômes de Laurent $A = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$. Ses générateurs sont les $t^k,\ k \in \mathbb{Z}$. Considérons son algèbre de Lie des dérivations $W(1) := \mathrm{Der}(A)$. Cette algèbre est appelée *algèbre de Witt*. Une base (infinie) de $W(1)$ est donnée par les éléments
$$X_n := -t^{n+1}\frac{d}{dt},\ n \in \mathbb{Z}.$$
Le crochet de Lie de $W(1)$ est alors donné par
$$[X_n, X_m] = (n-m)X_{n+m}.$$
Si $k, n \in \mathbb{Z}$, on a $t^kX_n = -t^kt^{n+1}\frac{d}{dt} = -t^{k+n+1}\frac{d}{dt} = X_{n+k}$.
On peut donc considérer une action naturelle de A sur $W(1)$ définie par
$$t^k \cdot X_n = X_{n+k}. \tag{1.5}$$
L'exemple 2 de la présente liste assure qu'il existe une structure de Lie-Rinehart sur le couple $(A, W(1))$ donnée par l'action précédente et $\rho = \mathrm{id}$, puisque $W(1) = \mathrm{Der}(A)$. On va montrer que c'est la seule.

Proposition 1.3.2. *L'unique structure de Lie-Rinehart sur le couple $(A, W(1))$ équipé de l'action (1.5) est donné par l'application identité de $W(1)$.*

Preuve. Soit $\rho : W(1) \longrightarrow W(1) = \mathrm{Der}(A)$ une ancre sur $W(1)$. Soit $X_n \in W(1),\ n \in \mathbb{Z}$. Puisque ρ est à valeurs dans $W(1)$, il existe $(r_n^i)_{i,n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}$ tels que

$$\rho(X_n) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} r_n^i X_i = -\sum_{i\in\mathbb{Z}} r_n^i t^{i+1}\frac{d}{dt}.$$

Ainsi, pour un générateur t^k de A, on a

$$\rho(X_n)(t^k) = -\sum_{i\in\mathbb{Z}} r_n^i t^{i+1}\frac{d}{dt}(t^k) = -\sum_{i\in\mathbb{Z}} r_n^i k t^{i+k}.$$

En particulier, si ρ est une ancre, elle doit vérifier la condition de compatibilité (1.4). Cette dernière s'écrit

$$[X_n, t^k \cdot X_m] = t^k \cdot [X_n, X_m] + \rho(X_n)(t^k)X_m,\ \text{ pour } k, m, n \in \mathbb{Z}\,.$$

Or, on a

$$[X_n, t^k \cdot X_m] = (n-m-k)X_{n+m+k} \text{ et } t^k \cdot [X_n, X_m] = (n-m)X_{n+m+k},$$

ce qui force l'égalité

$$\rho(X_n)(t^k)X_m = -kr_n^n X_{m+n+k}.$$

On déduit donc que

$$r_n^n = 1,\ r_n^i = 0,\ i \neq n.$$

Ainsi, $\rho(X_n) = X_n,\ \forall n \in \mathbb{Z}\,.$ □

Définition 1.3.3 ([HJ90])**.** Soient (A, L, ρ) et (A', L', ρ') deux algèbres de Lie-Rinehart. Un *morphisme de Lie Rinehart* est donné par $(\phi, \psi) : (A, L, \rho) \to (A', L', \rho')$, avec $\phi : A \to A'$ morphisme d'algèbres associatives, $\psi : L \to L'$ morphisme d'algèbres de Lie et de A-modules tels que

$$\phi\left(\rho_x(a)\right) = \rho'_{\psi(x)}\left(\phi(a)\right),\quad \forall x \in L, \forall a \in A.$$

Remarques. Deux observations :

- L' peut être vu comme un A-module via l'action $a \cdot x' = \phi(a) \cdot x',\ \forall a \in A,\ \forall x' \in L'$.
- Si $A = A'$ et $\phi = \mathrm{id}$, on retrouve la définition plus classique qui semble être celle plébiscitée dans la littérature actuelle sur les algèbres de Lie-Rinehart. Dans ce cas, on écrira simplement $\psi : (A, L, \rho) \to (A, L', \rho')$ pour désigner ce morphisme.

Définition 1.3.4. Soit (A, L, ρ) une algèbre de Lie-Rinehart, une sous algèbre de Lie $H \subset L$ est une *sous-algèbre de Lie-Rinehart* si H est une A-module avec l'action induite par l'inclusion $H \hookrightarrow L$.

Définition 1.3.5. Soit (A, L, ρ) une algèbre de Lie-Rinehart. Un idéal de Lie $I \subset L$ est un *idéal de Lie-Rinehart* si (A, I) possède une structure de Lie-Rinehart avec l'ancre identiquement nulle.

Remarque. Si (A, L, ρ) est une algèbre de Lie-Rinehart et que I est un idéal de Lie-Rinehart, alors la restriction du crochet de Lie à I est A-bilinéaire et $(A, L/I, \tilde{\rho})$ est une algèbre de Lie-Rinehart avec $\tilde{\rho}$ le morphisme induit canoniquement de ρ.

Exemples :

1. Soient (A, L, ρ), (A, L', ρ') deux algèbres de Lie-Rinehart et $\psi : L \to L'$ un morphisme de Lie-Rinehart. Alors le noyau $\mathrm{Ker}(\psi)$ est un idéal de Lie-Rinehart de (A, L, ρ).

2. Soit (A, L, ρ) une algèbre de Lie-Rinehart. Alors $\rho : (A, L, \rho) \to (A, \mathrm{Der}(A), \mathrm{id})$ est un morphisme de Lie-Rinehart. Ainsi, le noyau de l'ancre $\mathrm{Ker}(\rho)$ est un idéal de Lie-Rinehart.

Soient (A, L', η), (A, L, ρ) et (A, L'', θ) trois algèbres de Lie-Rinehart sur la même algèbre associative A. On peut définir une notion de *suite exacte courte*

$$0 \longrightarrow (A, L', \eta) \xrightarrow{i} (A, L, \rho) \xrightarrow{\pi} (A, L'', \theta) \longrightarrow 0,$$

avec i et π morphismes de Lie-Rinehart respectivement injectif et surjectif tels que $\mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{Im}(i)$. Ceci implique que l'ancre η sur L' est nulle. En effet, on a $\eta = \rho \circ i$ et $\rho = \theta \circ \pi$, d'où $\eta = \theta \circ \pi \circ i = 0$.

1.3.2 Modules et représentations

On étudie les représentations de façon plus poussée dans le chapitre 7.

Définition 1.3.6 ([SP16])**.** Soit (A, L, ρ) une algèbre de Lie-Rinehart. Une représentation de (A, L, ρ) est un A-module M équipé d'un morphisme d'algèbres de Lie A-linéaire $\pi : L \longrightarrow \mathrm{End}(M),\ x \longmapsto \pi_x$ tel que

$$\pi_x(am) = a\pi_x(m) + \rho_x(a)m, \quad \forall a \in A,\ \forall m \in M,\ \forall x \in L$$

Si π n'est pas A-linéaire dans la définition précédente, la représentation est dite "faible" (voir [PSTZ22]).

Exemples.

1. **Représentation adjointe.** Soit (A, L, ρ) une algèbre de Lie-Rinehart. On peut alors considérer la représentation faible donnée par $\mathrm{ad} : L \longrightarrow \mathrm{Der}(L),\ x \longmapsto [x, \cdot]$.
2. **Représentation naturelle.** Soit (A, L, ρ) une algèbre de Lie-Rinehart. Alors (A, ρ) est une représentation de (A, L, ρ).

Définition 1.3.7. Soient (A, L, ρ) une algèbre de Lie-Rinehart et (M, π), (M', π') deux représentations faibles de (A, L, ρ). On dit qu'un morphisme de A-modules $\phi : M \to M'$ est un *morphisme de représentations faibles* si $\phi \circ \pi_x = \pi'_x \circ \phi,\ \forall x \in L$.

Produit semi-direct (voir [CGL18]). Soient (A, L, ρ) une algèbre de Lie-Rinehart et $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre de Lie équipée d'une structure de A-module. On dit que (A, L, ρ) agit sur $\mathfrak{g}$ s'il existe un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de Lie et de A-modules $\alpha : L \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ tel que

$$\alpha(x)(a \cdot g) = a \cdot \alpha(x)(g) + \rho_x(a) \cdot g, \quad \forall x \in L,\ \forall a \in A,\ \forall g \in \mathfrak{g}\,.$$

On peut définir un crochet de Lie noté $[\cdot,\cdot]_\alpha$ sur le A-module $L \oplus \mathfrak{g}$ par

$$\big[(x, g), (y, h)\big]_\alpha = \Big([x, y],\ \alpha(x)h - \alpha(y)g + [g, h]_{\mathfrak{g}}\Big), \quad \forall x, y \in L,\ \forall g, h \in \mathfrak{g}\,.$$

On peut également définir un morphisme de A-modules

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} : L \oplus \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathrm{Der}(A) \\ (x, g) &\longmapsto \rho(x). \end{aligned}$$

On a alors une structure d'algèbre de Lie-Rinehart sur $(A, L \oplus \mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\alpha)$ avec l'ancre $\tilde{\rho}$, que l'on appelle le *produit semi-direct* de (A, L, ρ) et $\mathfrak{g}$.

1.3.3 Algèbre enveloppante

Dans cette section, on rappelle la construction de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie-Rinehart (A, L, ρ). La première construction remonte à l'article de Rinehart ([RG63]), mais ce dernier était principalement motivé par la (co)homologie, aussi il n'a pas étudié une éventuelle propriété universelle. C'est Huebschmann qui a comblé cette lacune, voir par exemple [HJ90]. Plus récemment, Saracco exprimé cette construction en termes de foncteurs adjoints ([SP22]). On pourra aussi consulter [CGL18].

Soit $(L, [\cdot, \cdot])$ une algèbre de Lie. On rappelle que son algèbre tensorielle est définie par

$$T_L = \bigoplus_{m \geq 0} T^m L;$$

Soit I l'idéal bilatère de L engendré par les éléments de la forme $\{x \otimes y - y \otimes x - [x, y]\}$. On note alors $U_L := T_L / I$ l'*algèbre enveloppante* de L. Elle est équipée du produit associatif

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k,\ y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) \longmapsto (x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n).$$

Si i désigne l'injection $i : L \hookrightarrow T_L$, on a alors pour $x, y \in L$ la relation

$$i\left([x, y]\right) = i(x)i(y) - i(y)i(x).$$

Cette algèbre enveloppante U_L satisfait la propriété universelle suivante. Soient B une $\mathbb{K}$-algèbre associative et j une application $j : L \longrightarrow B$ telle que

$$j\left([x, y]\right) = j(x)j(y) - j(y)j(x)\ \forall x, y \in L.$$

Alors, il existe un unique morphisme d'algèbres $\phi : U_L \longrightarrow B$ tel que $\phi \circ i = j$.

Soit maintenant (A, L, ρ) une algèbre de Lie-Rinehart. Alors on peut équiper $A \oplus L$ d'un crochet de Lie donné par

$$\{(a, x), (b, y)\} := \Big(\rho_x(b) - \rho_y(a), [x, y]\Big),\ \forall a, b \in A,\ \forall x, y \in L.$$

Il est alors possible de construire l'algèbre enveloppante $U_{A \oplus L}$ de l'algèbre de Lie $A \oplus L$. Notons $i : A \oplus L \hookrightarrow U_{A \oplus L}$ l'inclusion canonique et $\bar{U}_{A \oplus L}$ la sous-algèbre de $U_{A \oplus L}$ engendrée par $i(A \oplus L)$. Considérons J l'idéal bilatère de $\bar{U}_{A \oplus L}$ engendré par les éléments de la forme $i(a, 0)i(b, x) - i(ab, ax)$, pour $a, b \in A$ et $x \in L$. Finalement, l'*algèbre enveloppante* $U(A, L, \rho)$ de (A, L, ρ) est donnée par

$$U(A, L, \rho) := \bar{U}_{A \oplus L} / J.$$

Considérons les deux applications

$$i_A : A \longrightarrow U(A, L, \rho),\ a \longmapsto (a, 0);\quad i_L : L \longrightarrow U(A, L, \rho),\ x \longmapsto (0, x).$$

On a alors les relations suivantes dans $U(A, L, \rho)$.

$$\begin{aligned} i_A(1_A) &= 1_{U_A(L)}; \\ i_A(ab) &= i_A(a)i_A(b); \\ i_L(ax) &= i_A(a)i_L(x); \\ i_L([x, y]) &= i_L(x)i_L(x) - i_L(y)i_L(x); \\ i_L(x)i_A(a) &= i_A(a)i_L(x) + i_A(\rho_x(a)). \end{aligned}$$

Propriété universelle : Soient B une $\mathbb{K}$-algèbre associative, $\kappa_A : A \longrightarrow B$ un morphisme d'algèbres $\kappa_L : L \longrightarrow B$ et un morphisme de Lie tels que $\kappa_L(ax) = \kappa_A(a)\kappa_L(x)$ et $\kappa_L(x)\kappa_A(a) = \kappa_A(a)\kappa_L(x) + \kappa_A(\rho_x(a))$. Alors, il existe un unique morphisme d'algèbres $f : U(A, L, \rho) \longrightarrow B$ vérifiant $f \circ i_L = \kappa_L$ et $f \circ i_A = \kappa_A$.

1.3.4 Cohomologie des algèbres de Lie-Rinehart

Soit (A, L, ρ) une algèbre de Lie-Rinehart et M un module de Lie-Rinehart (au sens de la définition 1.3.6). La cohomologie de Lie-Rinehart, que l'on va décrire dans cette section, a été introduite par Rinehart ([RG63]) puis retravaillée par Huebschmann ([HJ90]). On pourra aussi consulter [CLP05]. Notons $\wedge_A(L) = \bigoplus_{n\geq 0} \wedge_A^n(L)$ l'algèbre extérieure sur A engendrée par le A-module L et définissons

$$C_A^n(L, M) = \mathrm{Hom}_A\left(\wedge_A^n(L), M\right).$$

Un élément de $C_A^n(L, M)$ est une application $\varphi : L^n \longrightarrow M$ qui est de plus A-multilinéaire, c'est-à-dire telle que

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, \cdots, x_{i-1}, a \cdot x_i + x_i', x_{i+1}, \cdots, x_n) = a \cdot \varphi(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)\\ + \varphi(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \cdots, x_n).\end{aligned}$$

On définit les applications cobords $d^n : C_A^n(L, M) \longrightarrow C_A^{n+1}(L, M)$ par

$$\begin{aligned}(\delta^n\varphi)(x_1, \cdots, x_n) = (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x_i \varphi(x_1, \cdots, \hat{x_i}, \cdots, x_n)\\ +(-1)^{n+1} \sum_{1\leq j<k\leq n+1} (-1)^{i+j} \varphi\left([x_i, x_j], x_1, \cdots, \hat{x_i}, \cdots, \hat{x_j}, \cdots, x_n\right),\end{aligned}$$

avec $x_1, \cdots, x_n \in L$. On définit ensuite $H^n_{\mathrm{Rin}}(L, M)$ comme étant la cohomologie du complexe de cochaînes défini ci-dessus. Plus précisément, on a

$$Z^n_{\mathrm{Rin}}(L, M) = \mathrm{Ker}(d^n),\ B^n_{\mathrm{Rin}}(L, M) = \mathrm{Im}(d^{n-1}) \text{ et } H^n_{\mathrm{Rin}}(L, M) = Z^n_{\mathrm{Rin}}(L, M)/B^n_{\mathrm{Rin}}(L, M).$$

Remarque (Lien avec la cohomologie de Chevalley-Eilenberg)**.** Si $A = \mathbb{K}$, alors on retrouve la définition usuelle de la cohomologie de Chevalley-Eilenberg présentée à la section 1.1.2. De façon générale, si on oublie la structure de A-module sur L et sur A, on obtient un homomorphisme canonique

$$H^n_{\mathrm{Rin}}(L, M) \to H^n_{\mathrm{CE}}(L, M),\ n \in \mathbb{N}.$$

Chapitre 2

Super-algèbres de Lie-Rinehart

En physique, on différencie deux classes de particules élémentaires : les bosons, qui sont de spin entier, et les fermions, de spin demi-entier. Les particules élémentaires de la matière, tels que les électrons ou les quarks (qui constituent les neutrons et protons, entre autres) sont des fermions. Les photons (qui sont les vecteurs de l'interaction électromagnétique) et les gluons (vecteurs de l'interaction forte) sont des bosons. Ces deux classes de particules ont des comportements différents : les fermions obéissent au principe le principe d'exclusion de Pauli, selon lequel deux fermions identiques ne peuvent pas occuper le même état quantique, au contraire des bosons qui n'y sont pas contraints (pour cette introduction, voir [KQS10, RA07]).

Dans le Modèle Standard de physique des particules, les systèmes physiques sont étudiés à l'aide de transformations. Parmi celles-ci, on appelle *symétrie* une transformation qui laisse les observables du système inchangés. On trouve principalement deux types de symétries : les symétries de l'espace-temps qui agissent sur les coordonnées d'espace-temps par le biais de certains groupes bien connus des physiciens, comme le groupe de Lorentz ou le groupe de Poincaré, et les symétries internes qui encodent les degrés internes de liberté des particules.

L'existence de deux classes différentes de particules (bosons et fermions) suggère l'introduction d'un nouveau type de symétrie qui va encoder les relations entre ces deux classes. Elle doit notamment intégrer le fait de pouvoir transformer un boson en fermion, et vice-versa. Ces considérations ont motivé l'étude de la *supersymétrie*, qui fournit également une réponse au théorème "no-go" de Coleman et Mandula (1967), ce dernier ayant mis un point d'arrêt aux tentatives d'extension du groupe de Poincaré du Modèle Standard. Le premier à avoir ébauché une théorie de la supersymétrie est le japonais Miyazawa (1966), suivi par Gervais et Sakita (1971), Golfand et Likhtman (1971 également), et Volkov et Akulov (1972), de façon indépendante.

Dans le Modèle Standard, les relations de commutations entre les différents opérateurs encodant les transformations définissent une structure d'algèbre de Lie. Dans le cadre de la supersymétrie, la structure mathématique sous-jacente est alors une super-algèbre de Lie (voir définition 2.3.1). Une telle super-algèbre contient des éléments pairs ("bosons") et des éléments impairs ("fermions") et les relations de structure sont modifiées par l'apparition de signes qui dépendent de la parité des éléments en jeu. Bien que ces structures se sont retrouvées en pleine lumière avec l'émergence de la supersymétrie, elles existaient déjà auparavant, dans l'étude des formes différentielles, de l'algèbre extérieure d'une algèbre de Lie ou de la théorie des représentations des algèbres de Clifford. De façon générale, l'étude des super-algèbres de Lie est fondamental aussi bien en physique des particules qu'en géométrie (voir [RA07]). Bien que la théorie de la supersymétrie montre ses limites et que la plupart des physiciens étudient d'autres modèles ([BC23]), les structures d'algèbres de Lie graduées, notamment les super-algèbres de Lie, conservent un rôle fondamental.

La généralisation de la notion d'algèbre de Lie-Rinehart au cas “super” est pertinente dans ce contexte. Ces objets interviennent en effet dans l'étude des super-algèbres des opérateurs différentiels sur des super-variétés ainsi que dans la généralisation de la notion d'algèbre enveloppante (voir [RC20]).

Dans ce court chapitre, on introduit les structures graduées sur un espace vectoriel. Lorsque la graduation est donnée par le groupe $\mathbb{Z}_2$, on parle alors de super-espace vectoriel. On peut alors définir les “super-analogues” des structures et lois classiques (super-algèbre associative, super-algèbre de Lie, super-commutativité, super-dérivations, etc.), ainsi que l'analogue de la cohomologie de Chevalley-Eilenberg. La section 2.4 est consacrée à définir la notion de super-algèbre de Lie-Rinehart et à présenter quelques exemples classiques. On conclut ce chapitre en donnant une technique de supérisation inspirée de [AM10] et on l'applique à l'algèbre de Witt.

2.1 Généralités sur les structures graduées

Dans cette section, on rappelle les différentes notions liées aux algèbres graduées, en se concentrant spécifiquement sur le cas où la graduation est donnée par le groupe $\mathbb{Z}_2$. On rappelle notamment les définitions de super-algèbres associatives super-commutatives et super-algèbres de Lie, ainsi que les notions connexes telles que leurs super-dérivations, en se basant principalement sur [KV77] et [SM79]. Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique zéro.

Définition 2.1.1. Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et Γ un groupe.

- On dit que V est *gradué par* Γ ou que V *admet une* Γ*-graduation* s'il existe une famille de sous-espaces vectoriels $V_x,\ x \in \Gamma$ tels que $V = \bigoplus_{x\in\Gamma} V_x$.
- Un élément $v \in V$ est dit *homogène de degré* x si $v \in V_x,\ x \in \Gamma$. Dans ce cas, on note $x = |v|$ le degré de v.

Si $V = \bigoplus_{x\in\Gamma} V_x$ est un espace vectoriel Γ-gradué, alors chaque élément v$\in V$ admet une décomposition unique en somme d'éléments homogènes $v = \sum_{x\in\Gamma} v_x,\ v_x \in V_x$, où seuls un nombre fini de v_x sont non nuls. L'élément v_x est appelé *composante homogène de degré* x de v.

Définition 2.1.2. Soit $V = \bigoplus_{x\in\Gamma} V_x$ un espace gradué. Un sous-espace $W \subset V$ est gradué s'il contient les composantes homogènes de tous ses éléments, c'est-à-dire si

$$W = \bigoplus_{x\in\Gamma} V_x \cap W.$$

Définition 2.1.3. Soient $V = \bigoplus_{x\in\Gamma} V_x$ et $W = \bigoplus_{y\in\Gamma} W_y$ deux espaces gradués par le même groupe Γ et soit $\varphi : V \to W$ une application linéaire.

- On dit que φ est *homogène de degré* $|\varphi|$ si $\forall x \in \Gamma,\ \varphi(V_x) \subset W_{x+|\varphi|}$.
- Un *morphisme d'espaces gradués* est une application linéaire homogène de degré 0.

Remarque. Avec la définition ci-dessus, il est clair que l'espace des morphismes d'espaces gradués $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ est lui-même un espace gradué, la graduation étant donnée par les degrés des morphismes.

Principe. De façon informelle, les calculs dans les espaces gradués obéissent au principe suivant [1] :
Si un élément de degré x est échangé avec un élément de degré y, alors un signe $(-1)^{|x||y|}$ apparaît.

Remarque importante de terminologie. Dans toute la suite, on ne considérera que des espaces vectoriels gradués par $\Gamma = \mathbb{Z}_2$, le groupe des entiers modulo 2. Dans ce cas, on désignera un objet $\mathbb{Z}_2$-gradué en ajoutant le préfixe *"super"* devant son nom. Ainsi, un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué est appelé super-espace vectoriel. On notera 0 et 1 les éléments de $\mathbb{Z}_2$, en s'autorisant l'abus de notations consistant à oublier la barre désignant la classe dans le quotient. Si $V = V_0 \oplus V_1$ est un super-espace vectoriel, on dira qu'un élément homogène $v \in V$ est *pair* s'il appartient à V_0 et *impair* s'il appartient à V_1. La super-dimension d'un super-espace vectoriel est un couple $(n|m)$, avec $n = \dim(V_0)$ et $m = \dim(V_1)$.

2.2 Super-algèbres associatives

Définition 2.2.1. Une $\mathbb{K}$-*super-algèbre associative* est un $\mathbb{K}$-super-espace vectoriel $A = A_0 \oplus A_1$ équipé d'une application bilinéaire (appelée multiplication) $A \times A \longrightarrow A$ que l'on notera par juxtaposition, telle que

1. $(ab)c = a(bc)$ pour tous $a, b, c \in A$,
2. $A_i A_j \subset A_{i+j}$, $i, j \in \mathbb{Z}_2$.

On remarque que l'associativité de l'application bilinéaire ne diffère pas du cas non-gradué. En revanche, la commutativité est impactée par la graduation et est donnée pour tous $a, b \in A$ homogènes par

$$ba = (-1)^{|a||b|} ab. \tag{2.1}$$

Cette identité est appelée *super-commutativité*. On remarque que les éléments pairs commutent avec n'importe quel élément et que les éléments impairs anti-commutent entre eux. Il est ensuite aisé d'étendre la notion de super-commutativité aux éléments non-homogènes.

Définition 2.2.2. Une $\mathbb{K}$-super-algèbre associative est dite *super-commutative* si sa multiplication est super-commutative.

Définition 2.2.3. Soient A et B deux super-algèbres associatives. Un *morphisme de super-algèbres associatives* est un morphisme de super-espaces vectoriels $f : A \longrightarrow B$ vérifiant de plus

$$f(ab) = (-1)^{|f||a|} f(a)f(b), \quad \forall a, b \in A. \tag{2.2}$$

Définition 2.2.4. Soit V un super-espace vectoriel et A une super-algèbre associative. On dit que V est un *A-super-module à gauche* s'il existe une application

$$A \times V \longrightarrow V, \ (a, v) \longmapsto av,$$

vérifiant $|av| = |a| + |v|$ et $a(bv) = (ab)v, \ \forall v \in V, \ \forall a, b \in A$.

Remarque. La définition précédente permet de définir la notion de représentation pour une super-algèbre associative.

1. Aussi appelé règle de Koszul.

2.3 Super-algèbres de Lie

Définition 2.3.1. Une *super-algèbre de Lie* L est un $\mathbb{K}$-super-espace vectoriel $L = L_0 \bigoplus L_1$ équipé d'un crochet $[\cdot,\cdot]$ vérifiant, pour tous $x, y, z \in L$ homogènes :

1. $[L_i, L_j] \subset L_{i+j}$;
2. $[x, y] = -(-1)^{|x||y|}[y, x]$ (super anti-symétrie) ;
3. $(-1)^{|x||z|}[x, [y, z]] + (-1)^{|z||y|}[z, [x, y]] + (-1)^{|x||y|}[y, [z, x]] = 0$ (super-Jacobi).

Remarques.

- L'identité de super-Jacobi est équivalente à $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + (-1)^{|x||y|}[y, [x, z]]$ pour tous $x, y, z \in L$ homogènes.
- La composante paire L_0 de L est une algèbre de Lie.
- La composante impaire L_1 de L est un L_0-module.

Exemples :

1. **Super-algèbre de Lie des super-dérivations.** Le super-espace $\mathrm{Der}(A)$ possède un structure de super-algèbre de Lie, équipé du crochet
$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - (-1)^{|D_1||D_2|} D_2 \circ D_1. \tag{2.3}$$
2. **Super-algèbre orthosymplectique** (voir [AM10]). On considère la super-algèbre orthosymplectique $\mathfrak{osp}(1|2)$ engendrée par les éléments pairs H, X, Y et les éléments impairs F, G avec
$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Les crochets non-nuls sont donnés par
$$[H, X] = 2X,\ [H, Y] = -2Y,\ [X, Y] = H;$$
$$[Y, G] = F,\ [X, F] = G,\ [H, F] = -F,\ [H, G] = G;$$
$$[G, F] = H,\ [G, G] = -2X,\ [F, F] = 2Y.$$
On remarque que la partie paire $\mathfrak{osp}(1|2)_0$ est isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, considérons une forme bilinéaire non-dégénérée paire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur $\mathbb{C}^{1|2}$. On peut alors voir $\mathfrak{osp}(1|2)$ comme l'espace des matrices laissant la forme $\langle\cdot,\cdot\rangle$ invariante. Plus précisément,
$$\mathfrak{osp}(1|2) = \Big\{ M \in \mathfrak{gl}_{1|2}(\mathbb{C}),\ \langle Mx, y\rangle = (-1)^{|M||x|}\langle x, My\rangle,\ x, y \in \mathbb{C}^{1|2} \Big\}.$$
3. **La super-algèbre de Lie $K^{2,m}$.** La super-algèbre[2] de Lie $K^{2,m}$ est engendrée par les générateurs $x_0, x_1 \mid y_1, \dots y_m$ (pair | impair), avec les crochets non-nuls donnés par
$$\begin{aligned} [x_0, y_i] &= -[y_i, x_0] &&= y_{i+1}, && i \le m-1, \\ [y_i, y_{m+1-i}] &= [y_{m+1-i}, y_i] &&= (-1)^{i+1} x_1, && 1 \le i \le \tfrac{m+1}{2}. \end{aligned}$$

2. Cette classe d'algèbres est nommée par la lettre K en hommage à Y. Khakimdjanov.

Dans [GKN04], les auteurs ont montré qu'une super-algèbre de Lie de dimension $n|m$ a un nilindice maximal $n+m-1$ uniquement lorsque $n=2$ et m est impair. De plus, pour tout m impair, il n'y a qu'une super-algèbre ayant cet indice maximal, qui est $K^{2,m}$. Cette super-algèbre est étudiée dans la section 8.5.

Définition 2.3.2. Soit $(L_1, [\cdot,\cdot]_1)$ et $(L_2, [\cdot,\cdot]_2)$ deux super-algèbres de Lie. Un *morphisme de super-algèbres de Lie* est un morphisme de super-espaces vectoriels $f : L_1 \longrightarrow L_2$ vérifiant de plus

$$f\left([x,y]_1\right) = (-1)^{|f||x|}[f(x), f(y)]_2, \ \forall x, y \in L. \tag{2.4}$$

Définition 2.3.3. Soit A une super-algèbre associative. Une application $D : A \longrightarrow A$ est appelée *super-dérivation* (de degré $|D|$) de A si D est un morphisme de super-espaces vectoriels vérifiant de plus la condition de super-Leibniz

$$D(ab) = D(a)b + (-1)^{|a||D|}aD(b) \quad \forall a, b \in A. \tag{2.5}$$

On note $\mathrm{Der}(A)$ le super-espace vectoriel des super-dérivations de A.

Définition 2.3.4. Soient L une super-algèbre de Lie et V un super-espace vectoriel. Une *représentation* de L est un morphisme gradué pair $\pi : L \to \mathrm{End}(V)$.

Exemple. Pour une super-algèbre de Lie L, on reprend la définition de l'action adjointe (1.1). Alors ad est une représentation de super-algèbres au sens précédent. De plus, l'identité de super-Jacobi assure que ad_x est une super-dérivation de L pour tous $x \in L$. Comme dans le cas non-gradué, les super-dérivations de L la forme ad_x pour un x de L sont appelée *super-dérivations intérieures.*

Généralisation de la cohomologie de Chevalley-Eilenberg. La cohomologie de Chevalley-Eilenberg décrite dans la section 1.1.2 peut être généralisée au cas des super-algèbres de Lie de la façon suivante (voir [LD75] (en russe), [CCGN20]). Soit $L = L_0 \oplus L_1$ une super-algèbres de Lie et M un L-module gradué. Pour $m \geq 0$, la définition des espaces de cochaînes $C^m_{\mathrm{CE}}(L,M)$ reste inchangée par rapport à la section 1.1.2. En revanche, la définition des différentielles d^m_{CE} (voir équation 1.2) doit être adaptée pour prendre en compte les degrés des éléments en jeu.
Pour $\varphi \in C^m_{\mathrm{CE}}(L,M)$ et $x_1, \cdots, x_{m+1} \in L$, on définit

$$\gamma_{i,j} = |x_i|\left(|\varphi| + \sum_{k=0}^{i}|x_k|\right).$$

On peut alors définir les différentielles $d^m_{\mathrm{CE}} : C^m_{\mathrm{CE}}(L,M) \longrightarrow C^{m+1}_{\mathrm{CE}}(L,M)$ par

$$\begin{aligned} d^m_{\mathrm{CE}}\varphi(x_1, ..., x_{m+1}) = &\sum_{1\leq i<j\leq m+1} (-1)^{i+j+\gamma_{i,j}+\gamma_{i-1,j}}\varphi\left([x_i,x_j], x_1, ...\hat{x_i}, ..., \hat{x_j}, ..., x_{m+1}\right) \\ &+ \sum_{1\leq i}^{m+1}(-1)^{i+1+\gamma_{i-1,i}}x_i\cdot\varphi\left(x_1, ..., \hat{x_i}, ..., x_{m+1}\right), \end{aligned} \tag{2.6}$$

où le chapeau (ˆ) indique que l'on omet le terme. On a alors également $d^{m+1}_{\mathrm{CE}} \circ d^m_{\mathrm{CE}} = 0$ et on peut définir les cocycles, cobords et groupes de cohomologie comme dans la section 1.1.2.

2.4 Super-algèbres de Lie-Rinehart

On est maintenant capable de donner la définition de super-algèbre de Lie-Rinehart, ainsi que quelques exemples, en suivant Roger ([RC20]) et Chemla ([CS95]).

2.4.1 Définition et exemples

Définition 2.4.1. Une *super-algèbre de Lie-Rinehart* sur un corps $\mathbb{K}$ est un triplet (A, L, ρ), où $(L, [\cdot, \cdot])$ est une super-algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ et A une super-algèbre associative et super-commutative sur $\mathbb{K}$, telles que L soit munie d'une structure de A-module, et ρ est une application

$$\rho : L \longrightarrow \mathrm{Der}(A), \quad x \mapsto \rho_x$$

appelée *ancre*, à valeurs dans les super-dérivations de A, qui est à la fois un morphisme de A-modules et de super-algèbres de Lie et qui vérifie la *condition de compatibilité*

$$[x, ay] = \rho_x(a)y + (-1)^{|a||x|}a[x, y], \ \forall x, y \in L, \ \forall a \in A.$$

L'action de A sur L et l'ancre doivent respecter la graduation au sens suivant : $|ax| = |a|+|x|$ et $|\rho_x(a)| = |a| + |x|$.

Exemples :

1. **Super-algèbre de Lie-Rinehart triviale.** Soit A une super-algèbre associative super-commutative unitaire et L une super-algèbre de Lie. Le couple (A, L) peut alors toujours être équipé d'une structure de super-algèbre de Lie-Rinehart avec l'action triviale (l'élément neutre e_0 de la multiplication de A agit par $e_0 \cdot x = x$ pour $x \in L$, et tous les autres éléments de A agissent par 0) et l'ancre identiquement nulle ($\rho(x) = 0 \ \forall x \in L$) (voir Proposition 4.4.1).

2. **Super-algèbre de Lie des super-dérivations.** Soit A une super-algèbre associative super-commutative unitaire et $L = \mathrm{Der}(A)$ sa super-algèbre de super-dérivations. On peut alors vérifier que la couple $(A, \mathrm{Der}(A))$ est une super-algèbre de Lie-Rinehart, avec l'action $A \curvearrowright \mathrm{Der}(A)$ donnée par $(a \cdot \delta)(b) = a\delta(b)$ et l'ancre triviale donnée par $\rho(\delta) = \delta, \ \forall \delta \in \mathrm{Der}(A), \ \forall a, b \in A$.

3. **Produit croisé.** Voici un troisième exemple de super-algèbre de Lie-Rinehart, présenté initialement par Chemla ([CS95]). Soit $\mathfrak{g}$ une super-algèbre de Lie, équipée du crochet $[\cdot, \cdot]$, et A une super-algèbre associative super-commutative. Supposons que $\mathfrak{g}$ est équipé de plus d'un morphisme de super-algèbres de Lie

$$\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Der}(A), \ x \longmapsto (\sigma_x : a \longmapsto \sigma_x(a)) .$$

Ainsi, σ_x est une super-dérivation de A. On peut alors définir une nouvelle super-algèbre de Lie en posant $L := A \otimes \mathfrak{g}$, équipée du crochet

$$[a \otimes x, b \otimes y] = (-1)^{|x||b|}ab \otimes [x, y] + a\sigma_x(b) \otimes y - (-1)^{(|a|+|x|)(|b|+|y|)}b\sigma_y(a) \otimes x,$$

pour $a, b \in A$ homogènes et $x, y \in \mathfrak{g}$ homogènes.
On étend ensuite σ en un morphisme de A-modules $\tilde{\sigma}$ sur $L = A \otimes \mathfrak{g}$ par

$$\tilde{\sigma}(a \otimes x) := a\sigma(x) = a\sigma_x \in \mathrm{Der}(A).$$

On définit un structure de super-algèbre de Lie-Rinehart sur (A, L), pour tous $a, b, c \in A$ et $x, y \in \mathfrak{g}$, par

(a) Action $A \curvearrowright L : A \times L \longrightarrow L, \ (a, b \otimes y) \longmapsto a \cdot (b \otimes y) = ab \otimes y\,;$

(b) Ancre :

$$\begin{aligned} L &\longrightarrow \mathrm{Der}(A) \\ a \otimes x &\longmapsto \rho_{a \otimes x} : b \longmapsto a\sigma_x(b) \quad (= \tilde{\sigma}(a \otimes x)(b)); \end{aligned}$$

(c) Montrons la compatibilité, *i.e.* prouvons l'égalité

$$[a\otimes x, c\cdot(b\otimes y)] = \rho_{a\otimes x}(c)\cdot(b\otimes y) + (-1)^{|c||a\otimes x|}c\cdot[a\otimes x, b\otimes y]. \tag{2.7}$$

Tout d'abord, nous avons

$$\begin{aligned}[a\otimes x, c\cdot b\otimes y] &= a\otimes x, cb\otimes y]\\ &= (-1)^{|x||cb|}acb\otimes[x,y] + a\sigma_x(cb)\otimes y - cb\sigma_y(a)\otimes x(-1)^{(|a|+|x|)(|cb|+|y|)}\\ &= (-1)^{|x||cb|}acb\otimes[x,y] + a\sigma_x(c)b\otimes y + (-1)^{|x||c|}ac\sigma_x(b)\otimes y\\ &\quad - cb\sigma_y(a)\otimes x(-1)^{(|a|+|x|)(|cb|+|y|)};\end{aligned}$$

Puis, on a d'autre part

$$\begin{aligned}&\rho_{a\otimes x}(c)\cdot b\otimes y + (-1)^{|c||a\otimes x|}c\cdot[a\otimes x, b\otimes y]\\ &= a\sigma_x(c)b\otimes y + (-1)^{|c||a\otimes x|}\Big((-1)^{|x||b|}cab\otimes[x,y] + ca\sigma_x(b)\otimes y - cb\sigma_y(a)\otimes x(-1)^{(|a|+|x|)(|b|+|y|)}\Big)\\ &= a\sigma_x(c)b\otimes y + (-1)^{|x|(|c|+|b|)}acb\otimes[x,y] + (-1)^{|c||x|}ac\sigma_x(b)\otimes y - (-1)^{(|a|+|x|)(|cb|+|y|)}cb\sigma_y(a)\otimes x.\end{aligned}$$

En conséquence de quoi, les deux côtés de l'équation (2.7) coïncident. La A-linéarité de l'ancre est immédiate, la couple (A, L) est donc bien équipé d'une structure de super-algèbre de Lie-Rinehart.

2.4.2 Une technique de supérisation

Soit (A, L, ρ) une algèbre de Lie-Rinehart. En particulier, A est une algèbre associative commutative et L est une algèbre de Lie. Le but est de construire une super-algèbre de Lie-Rinehart à partir de (A, L, ρ) en utilisant la variable de Grassmann (impaire) θ vérifiant la relation $\theta^2 = 0$ (voir [AM10]).

Considérons les super algèbres suivantes :

- $A' := A_0 \oplus A_1$, avec $A_0 = A$ et $A_1 = \theta A := \{\theta a,\ a\in A\}$;
- $L' := L_0 \oplus L_1$, avec $L_0 = A$ et $L_1 = \theta L := \{\theta x,\ x\in L\}$.

Alors, A' est une super-algèbre associative super-commutative et L' est une super-algèbre de Lie. Les vérifications des axiomes sont immédiates, les degrés étant calculés comme suit : si $a' \in A_1$, alors il existe $a \in A_0 = A$ tel que $a' = \theta a$. Ainsi, $|a'| = |a| + |\theta| = 1$. Il en va de même pour les éléments de L_1. Si un produit ou un crochet de deux éléments impairs apparaît, celui-ci est nul car $\theta^2 = 0$.

Supposons de plus que θ commute avec l'ancre , c'est-à-dire que $\rho_{\theta x} = \theta\rho_x,\ x \in L$. On peut alors construire une super-algèbre de Lie-Rinehart avec le couple (A', L') de la façon suivante. On note $a, b \in A_0,\ a', b' \in A_1,\ a' = \theta a, b' = \theta b$ et $x, y \in L_0,\ x', y' \in L_1,\ x' = \theta x, y' = \theta y$.

- On définit une action de A' sur L' par

$$\begin{cases} a\cdot x' = a\cdot\theta x = (-1)^{|\theta||a|}\theta a\cdot x = \theta(a\cdot x);\\ a'\cdot x = (\theta a)\cdot x = \theta(a\cdot x);\\ a'\cdot x' = (\theta a)\cdot(\theta x) = (-1)^{|\theta||a|}\theta^2 a\cdot x = 0.\end{cases}$$

C'est bien une action, on a en effet (on note $\cdot$ par juxtaposition) :

$$a'(bx) = (\theta a)(bx) = \theta(ab)x = (a'b)x;$$

$$\begin{aligned}
a(b'x) &= a(\theta b)x = (-1)^{|a||\theta|}(ab)x = (ab')x;\\
a(bx') &= a(b\theta x) = (-1)^{|a||\theta|+|b||\theta|}\theta(ab)x = (ab)x';\\
a'(b'x) &= 0 = (a'b')x; a'(bx') = 0 = (a'b)x;\ \ a(b'x') = 0 = (ab')x'.
\end{aligned}$$

- On définit une ancre sur L' par

$$\begin{cases}
\rho_{x'}(a) = \rho_{\theta x}(a) = \theta\rho_x(a);\\
\rho_x(a') = \rho_x(\theta a) = (-1)^{|\theta||x|}\theta\rho_x(a) = \theta\rho_x(a);\\
\rho_{x'}(a') = 0.
\end{cases}$$

Il est immédiat de vérifier que l'ancre ainsi définie vérifie les bonnes propriétés. Par exemple, pour la compatibilité :

$$[x', ay] = [\theta x, ay] = \theta\Big(a[x,y] + \rho_x(a)y\Big) = (-1)^{|\theta||a|}a[\theta x, y] + \rho_{\theta x}(a)y = a[x', y] + \rho_{x'}(a)y;$$

$$[x, a'y] = [x, (\theta a)y] = (-1)^{|\theta||x|}\theta\Big(a[x,y] + \rho_x(a)y\Big) = a'[x,y] + \rho_x(a')y;$$

$$[x, ay'] = [x, a(\theta y)] = (-1)^{|x||\theta|}\theta[x, ay] = a[x, y'] + \rho_x(a)y'.$$

Le couple (A', L') est bien équipé d'une structure de super-algèbre de Lie-Rinehart avec la construction précédente.

Exemple : super-algèbre de Witt. Utilisons la construction ci-dessus pour généraliser l'exemple de l'algèbre de Witt (voir proposition 1.3.2) au cas $\mathbb{Z}_2$-gradué. On s'inspire de la construction présentée dans [AM10]. Soit θ la variable de Grassmann impaire vérifiant $\theta^2 = 0$. On considère la super-algèbre associative super-commutative $A = A_0 \oplus A_1$, avec $A_0 = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ et $A_1 = \theta A_0 := \{\theta a,\ a \in A_0\}$. Les générateurs de A_0 sont $t^k,\ k \in \mathbb{Z}$ et ceux de A_1 sont $\theta t^l,\ l \in \mathbb{Z}$. L'espace des super-dérivations $\mathrm{Der}(A)$ de A est alors engendré par

$$X_n = t^n\frac{d}{dt},\ n \in \mathbb{Z}, \quad Y_m = \theta t^m\frac{d}{dt},\ m \in \mathbb{Z}\,.$$

On note alors $W(1,\theta) := \mathrm{Der}(A)$ cet espace. On peut appliquer la technique de supérisation présentée ci-dessus au couple $(A, W(1,\theta))$ pour obtenir une super-algèbre de Lie-Rinehart. La nouvelle ancre est alors donnée pour $n, k \in \mathbb{Z}$ par

$$\begin{cases}
\rho(X_n)(t^k) = -kt^{n+k};\\
\rho(Y_n)(t^k) = \rho(\theta X_n)(t^k) = -\theta k t^{n+k} = \theta X_n(t^k) = Y_n(t^k);\\
\rho(X_n)(\theta t^k) = \theta\rho(X_n)(t^k) = \theta X_n(t^k) = X_n(\theta t^k);\\
\rho(Y_n)(\theta t^k) = \theta^2\rho(X_n)(t^k) = 0.
\end{cases}$$

Ainsi, on obtient

$$\rho(X_n) = \mathrm{id},\ \ \rho(Y_n)_{|A_0} = \mathrm{id},\ \ \rho(Y_n)_{|A_1} = 0.$$

Chapitre 3

Déformations des super-algèbres de Lie-Rinehart en caractéristique zéro

Notre but dans ce chapitre est de comprendre les déformations des super-algèbres de Lie-Rinehart sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Dans un article récent, ([MM20]), Mandal et Mishra ont développé une théorie des déformations des Hom-algèbres de Lie-Rinehart, qui inclut le cas des algèbres de Lie-Rinehart. Notre but ici est d'étendre cette théorie aux super-algèbres de Lie-Rinehart. On construit un complexe de déformation adapté et on montre que les déformations formelles sont contrôlées par la cohomologie obtenue avec ce complexe.

Les déformations d'algèbres de Lie remontent aux travaux de Nijenhuis et Richarsdon ([NR66], [NR67]), qui montrent que les résultats obtenus par Gerstenhaber pour les algèbres associatives ([GM64]) ont des analogues dans pour les algèbres de Lie, en utilisant la cohomologie de Chevalley-Eilenberg ([CE48]). La généralisation aux super-algèbres de Lie a été faite par Binegar ([BB86]). Le cas des algèbres de Lie-Rinehart est plus compliqué, car il y aurait à priori quatre opérations à déformer : si (A, L) est une algèbre de Lie-Rinehart équipée d'une ancre ρ, on pourrait chercher à déformer la multiplication associative de A, de crochet de Lie de L, l'action $A \curvearrowright L$ et l'ancre $\rho : L \longrightarrow \mathrm{Der}(A)$. Dans ce travail, on se restreint à déformer le crochet de Lie et l'ancre. Ainsi, la multiplication associative et l'action de A sur L ne sont pas déformées dans cette théorie. Le cas classique (non gradué) a été traité par Mandal et Mishra dans [MM20]. Dans cet article, les auteurs proposent une théorie des déformations des Hom-algèbres de Lie-Rinehart, qui présentent des applications de structure supplémentaires. En effet, les crochets et multiplications usuelles sont twistées par des homomorphismes. Pour plus de résultats sur les Hom-structures, on pourra consulter [MS08], ainsi que les références qu'il contient. Dans ce chapitre, on va adapter la méthode de Mandal et Mishra (qui trouve elle-même son origine dans des travaux de Crainic et Moerdijk [CM08] sur les algébroïdes de Lie) au cas des super-algèbres de Lie-Rinehart.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans les deux premières sections, on introduit la notion de super-multidérivation et on montre qu'il existe une correspondance bijective entre ces super-multidérivations et les super-algèbres de Lie-Rinehart sur un couple (A, L) donné (proposition 3.2.1). On utilise ensuite cette correspondance pour construire une cohomologie adaptée aux déformations formelles. Dans les sections suivantes, on montre que les résultats usuels de théorie des déformations restent vrais dans ce contexte. On montre que l'élément infinitésimal d'une telle déformation formelle est un 2-cocycle de notre complexe de déformation (théorème 3.3.2). On étudie ensuite l'équivalence de déformations et on montre que la trivialité du second groupe de cohomologie implique la rigidité de la super-algèbre (corollaire 3.4.6). Enfin, on s'intéresse aux obstructions à l'extension de déformations d'ordre fixé à l'ordre suivant. On montre que le troisième groupe de cohomologie contrôle le fait de pouvoir étendre une déformation ou non (théorème 3.5.4). On conclut ce chapitre en donnant un exemple concret de rigidité pour une super-algèbre de Lie-Rinehart de petite dimension.

Ce chapitre se base sur une partie du contenu de l'article [EM22], publié dans le journal *Communications in Mathematics.*

Toutes les super-algèbres considérées sont maintenant sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle noté $\mathbb{K}$.

3.1 Super-multidérivations

Soient (A, L, ρ) une super-algèbre de Lie Rinehart sur $\mathbb{K}$ et M un A-module.

Définition 3.1.1 (Espace des super-multidérivations)**.** On définit $\mathrm{Der}^n(M, M)$ l'espace des applications multilinéaires

$$f : M^{\wedge(n+1)} \longrightarrow M$$

telles qu'il existe une application $\sigma_f : M^{\otimes n} \longrightarrow \mathrm{Der}(A)$ (appelée symbole) vérifiant

1. $\sigma_f(x_1, ..., ax_i, ..., x_n) = (-1)^{|a|(|x_1|+\cdots+|x_{i-1}|)} a\sigma(x_1, ..., x_i, ..., x_n),\ \forall 1 \leq i \leq n,$
2. $f(x_1, ..., x_n, ax_{n+1}) = (-1)^{|a|(|f|+|x_1|+\ldots+|x_n|)} af(x_1, ..., x_{n+1}) + \sigma_f(x_1, ..., x_n)(a) \cdot x_{n+1},\ \forall a \in A.$

Remarque. Avec cette définition, on peut voir que le crochet de Lie $[\cdot, \cdot]$ sur L est un élément de $\mathrm{Der}^1(L, L)$, avec l'application symbole ρ.

On définit

$$\mathrm{Der}^*(M, M) = \bigoplus_{n \geq -1} \mathrm{Der}^n(M, M), \text{ avec } \mathrm{Der}^{-1}(M, M) = M.$$

Chaque espace $\mathrm{Der}^n(M, M)$ admet une $\mathbb{Z}_2$-graduation naturelle, donnée par

$$|D| = j \in \mathbb{Z}_2 \iff |D(x_1, ..., x_{n+1})| - \sum_i |x_i| = j \text{ mod } 2, \text{ pour } D \in \mathrm{Der}^n(M, M).$$

On a

$$\mathrm{Der}^*(M, M) = \bigoplus_n (\mathrm{Der}^n(M, M)) = \bigoplus_n (\mathrm{Der}_0^n(M, M) \oplus \mathrm{Der}_1^n(M, M)).$$

Dans la suite, on équipe $\mathrm{Der}^*(M, M)$ d'un crochet gradué. On adapte la formule du crochet de Nijenhuis-Richardson ([NR67]) au cas $\mathbb{Z}_2$-gradué. Comme expliqué dans [VL15], l'espace des super-multiderivations $\mathrm{Der}^*(M, M)$ est une algèbre de Lie $\mathbb{Z}$-graduée, mais n'est pas une algèbre de Lie bi-graduée.

Pour $f \in \mathrm{Der}^p(M, M)$ et $g \in \mathrm{Der}^q(M, M)$, on définit

$$(f \circ g)(x_1, ..., x_{p+q+1}) = \sum_{\tau \in Sh(q+1,p)} \varepsilon(\tau, x_1, ..., x_{p+q+1}) f\left(g(x_{\tau(1)}, ..., x_{\tau(q+1)}), x_{\tau(q+2)}, ..., x_{\tau(p+q+1)}\right),$$

où $Sh(q + 1, p)$ désigne l'ensemble des permutations τ de $\{0, 1, ..., q, ...p + q\}$ telles que

$$\tau(0) < \tau(1) < ... < \tau(q) \text{ et } \tau(q + 1) < ... < \tau(p + q).$$

Le signe $\varepsilon(\tau, x_1, ..., x_{p+q+1})$ est défini implicitement par la permutation τ relativement à la parité des éléments homogènes $x_1, ..., x_{p+q+1} \in L$. Par exemple, si $\tau = (i,\ i+1)$ est une transposition élémentaire, alors

$$\varepsilon(\tau, x_1, ..., x_{p+q+1}) = sgn(\tau)(-1)^{|x_i||x_{i+1}|} = -(-1)^{|x_i||x_{i+1}|}.$$

Des calculs explicites pour $\tau \in S_3$ ont été faits dans [AM10], et une formule explicite pour ε est donnée dans [BP89].

Proposition 3.1.2 ([VL15])**.** *Soient* $f \in \mathrm{Der}^p(M,M)$ *et* $g \in \mathrm{Der}^q(M,M)$*. On définit un crochet par*

$$\begin{aligned} [f,g] &= f \circ g - (-1)^{pq} g \circ f, \\ \text{avec symbole} \quad \sigma_{[f,g]} &= \sigma_f \circ g - (-1)^{pq}\sigma_g \circ f + [\sigma_f, \sigma_g], \end{aligned}$$

$$\text{et } [\sigma_f,\sigma_g](x_1,...,x_{p+q}) = \sum_{Sh(p,q)} \varepsilon(\tau, x_1, ..., x_{p+q})[\sigma_f(x_{\tau(1)},...,x_{\tau(p)}), \sigma_g(x_{\tau(p+1)},...,x_{\tau(p+q)})].$$

Muni de ce crochet, $\mathrm{Der}^*(M,M)$ *admet une structure d'algèbre de Lie* $\mathbb{Z}$*-graduée.*

3.2 Cohomologie et déformations

Soit (A, L, ρ) une super-algèbre de Lie-Rinehart. Dans la suite, on va construire un complexe de cochaînes dont la cohomologie va contrôler les déformations.

Proposition 3.2.1. *Il y a une correspondance bijective entre les super-algèbres de Lie-Rinehart sur le couple* (A, L, ρ) *et les éléments* $m \in \mathrm{Der}^1(L,L)$ *vérifiant* $[m,m] = 0$*.*

Preuve. Soit $(A, L, [\cdot,\cdot], \rho)$ une super-algèbre de Lie-Rinehart. on pose $m := [\cdot,\cdot]$, avec pour symbole $\sigma_m := \rho$. On a $m \in Der^1(L,L)$. L'identité de super-Jacobi pour $x_1, x_2, x_3 \in L$ s'écrit alors

$$[x_1,[x_2,x_3]] - [[x_1,x_2],x_3] - (-1)^{|x_1||x_2|}[x_2,[x_1,x_3]] = 0.$$

Puisque $|m| = 1$, on déduit que $[m,m](x_1,x_2,x_3) = 2m \circ m(x_1,x_2,x_3)$. Or, en utilisant les calculs explicites sur S_3 effectués dans [AM10], on obtient

$$\begin{aligned} m \circ m(x_1,x_2,x_3) &= m\left(m(x_1,x_2),x_3\right) - (-1)^{|x_2||x_3|} m\left(m(x_1,x_3),x_2\right) \\ &\quad + (-1)^{|x_1||x_2|+|x_1||x_3|} m\left(m(x_2,x_3),x_1\right) \\ &= [[x_1,x_2],x_3] + (-1)^{|x_1||x_2|}[x_2,[x_1,x_3]] - [x_1,[x_2,x_3]] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Réciproquement, soit $m \in \mathrm{Der}^1(L,L)$ tel que $[m,m] = 0$. En posant $[\cdot,\cdot] := m$ et $\rho := \sigma_m$, on obtient une structure de super-algèbre de Lie-Rinehart sur (A, L).

□

Ainsi, on peut identifier super-structures de Lie-Rinehart sur (A, L, ρ) avec l'élément correspondant $m \in \mathrm{Der}^1(L,L)$.
On pose

$$C^n_{def}(L,L) := \mathrm{Der}^{n-1}(L,L) \text{ et } C^*_{def}(L,L) := \bigoplus_{n\geq 0} C^n_{def}(L,L).$$

On équipe ensuite ce complexe d'un opérateur

$$\delta^n : C^n_{def}(L,L) \longrightarrow C^{n+1}_{def}(L,L),\ D \longmapsto [m,D],$$

que l'on peut exprimer explicitement par

$$\begin{aligned}
(\delta^n D)(x_1,...,x_{n+1}) &= \Big(m \circ D - (-1)^{n-1} D \circ m\Big)(x_1,...,x_{n+1}) \\
&= \sum_{\tau \in Sh(n,1)} \varepsilon(\tau,x_1,...,x_{n+1}) m\left(D(x_{\tau(1)},...,x_{\tau(n)}), x_{\tau(n+1)}\right) \\
&- (-1)^{n-1} \sum_{\tau \in Sh(2,n-1)} \varepsilon(\tau,x_1,...,x_{n+1}) D\left(m(x_{\tau(1)},x_{\tau(2)}), x_{\tau(3)},...x_{\tau(n+1)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon_i m\left(D(x_1,...,\hat{x_i},...,x_{n+1}), x_i\right) \\
&- (-1)^{n-1} \sum_{1 \le i < j \le n} \varepsilon_i^j D\left(m(x_i,x_j), x_1,...,\hat{x_i},...,\hat{x_j},...,x_{n+1}\right),
\end{aligned}$$

avec ε_i et ε_i^j les signes associés aux permutations, relativement à la parité des éléments homogènes $x_1, \cdots, x_{n+1} \in L$ et $D \in \mathrm{Der}^*(L,L)$.

Proposition 3.2.2. *L'opérateur δ^* est un opérateur cobord, c'est-à-dire qu'il vérifie*

$$\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0,\ \forall n \ge 0.$$

Lorsque la situation est claire, on peut simplement utiliser l'abus de notations standard $\delta^2 := \delta^{n+1} \circ \delta^n$.

Preuve. Soit $D \in C^n_{def}(L,L)$. On a

$$\delta^2(D) = [m,[m,D]] = [[m,m],D] + (-1)^{|m||m|}[m,[m,D]] = 0 - [m,[m,D]].$$

On a ainsi $[m,[m,D]] = -[m,[m,D]]$, donc $[m,[m,D]] = 0$. □

Ceci nous permet donc de définir un complexe de cochaînes, que l'on va utiliser dans la suite pour contrôler les déformations formelles de super-algèbres de Lie-Rinehart. On le baptise donc *cohomologie de déformation*. Pour $p,q \in \mathbb{Z}$, on rappelle les définitions usuelles des p-cocycles et q-cobords, respectivement $Z^p_{def}(L) = \mathrm{Ker}(\delta^p)$ and $B^q_{def}(L) = \mathrm{Im}(\delta^{q-1})$. Cela nous permet de poser $H^p_{def}(L) := Z^p_{def}(L)/B^p_{def}(L)$ le p-ème groupe de cohomologie. En particulier, on a

$$Z^1_{def}(L) = \mathrm{Ker}(\delta^1) = \Big\{D \in \mathrm{Der}^0(L),\ D([x,y]) = [D(x),y] - (-1)^{|x||y|}[D(y),x]\ \ \forall x,y \in L\Big\},\ \text{ et}$$

$$Z^2_{def}(L) = \mathrm{Ker}(\delta^2) = \left\{\begin{array}{c} D \in \mathrm{Der}^1(L),\ [D(x,y),z] - (-1)^{|y||z|}[D(x,z),y] + (-1)^{|x||y|+|x||z|}[D(y,z),x] \\ = -D([x,y],z) + (-1)^{|y||z|}D([x,z],y) + (-1)^{|x||y|+|x||z|}D([y,z],x),\ \forall x,y,z \in L \end{array}\right\}.$$

3.3 Déformations formelles

Dans cette section, on étudie les déformations formelles des super-algèbres de Lie-Rinehart et on montre qu'elles sont contrôlées (dans un sens que l'on précisera) par le cohomologie définie précédemment. Dans la suite, on ne va déformer que le crochet de Lie et l'ancre et laisser fixées la multiplication de l'algèbre associative ainsi que son action. On note $\mathbb{K}[[t]]$ (resp. L[[t]]) l'anneau des séries formelles en t à coefficients dans $\mathbb{K}$ (resp. l'espace formel en t à coefficients dans le super-espace vectoriel L).

Définition 3.3.1. Soit (A, L, ρ) une super-algèbre de Lie-Rinehart sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle, et soit $m \in \mathrm{Der}^1(L, L)$ la multidérivation correspondante obtenue par la proposition 3.2.1. Une déformation formelle de la super-algèbre de Lie-Rinehart est donnée par une application $\mathbb{K}[[t]]$-bilinéaire

$$m_t : L \times L \longrightarrow L[[t]],\ m_t(x, y) = \sum_{i \geq 0} t^i m_i(x, y),$$

telle que $m_0 = m$ et $m_i \in \mathrm{Der}^1(L, L)$ avec pour symbole σ_{m_i} pour $i = 1, 2, \cdots$, satisfaisant de plus $[m_t, m_t] = 0$, ce crochet étant le crochet $\mathbb{Z}$-gradué sur $\mathrm{Der}^*(L[[t]], L[[t]])$.

Remarque. L'application m_t définie sur $L \times L$ est étendue en une application sur $L[[t]] \times L[[t]]$ en utilisant la $\mathbb{K}[[t]]$-bilinéarité.

On vérifie que m_t est une super-multidérivation de $L[[t]]$ de degré 1, dont le symbole est $\sigma_{m_t} = \sum_{i \geq 0} t^i \sigma_{m_i}$. Ainsi, m_t correspond à une structure de super-algèbre de Lie-Rinehart sur $(A[[t]], L[[t]])$, avec pour crochet $[\cdot, \cdot]_t := m_t$ et ancre $\rho_t := \sigma_{m_t}$.

Remarque. Le premier élément non-nul $m_i,\ i \geq 1$ de la déformation est appelé *élément infinitésimal* de la déformation.

Équation de déformation. Puisque m_t vérifie $[m_t, m_t] = 0$, on a

$$m_t(x_1, m_t(x_2, x_3)) = m_t(m_t(x_1, x_2), x_3) + (-1)^{|x_1||x_2|} m_t(x_2, m_t(x_1, x_3)). \tag{3.1}$$

L'équation précédente est appelée équation de déformation et est équivalente à un système infini obtenu en identifiant les coefficients de t.

Théorème 3.3.2. *Soit m_t une déformation formelle d'une super-algèbre de lie-Rinehart (A, L, ρ). Alors, l'élément infinitésimal de la déformation m_1 est un 2-cocycle de la cohomologie de déformation.*

Preuve. En identifiant les coefficients de t dans (3.1), on obtient

$$\begin{aligned} &m_1(x_1, m(x_2, x_3)) - m_1(m(x_1, x_2), x_3) - (-1)^{|x_1||x_2|} m_1(x_2, m(x_1, x_3)) \\ &+ m(x_1, m_1(x_2, x_3)) - m(m_1(x_1, x_2), x_3) - (-1)^{|x_1||x_2|} m(x_2, m_1(x_1, x_3)) = 0. \end{aligned}$$

En utilisant [AM10] pour les signes, on obtient

$$\begin{aligned} [m, m_1](x_1, x_2, x_3) &= m(m_1(x_1, x_2), x_3) - (-1)^{|x_2||x_3|} m(m_1(x_1, x_3), x_2) + (-1)^{|x_1||x_2| + |x_1||x_3|} m(m_1(x_2, x_3), x_1) \\ &+ m_1(m(x_1, x_2), x_3) - (-1)^{|x_2||x_3|} m_1(m(x_2, x_3), x_1) + (-1)^{|x_1||x_2| + |x_1||x_3|} m_1(m(x_2, x_3), x_1) \\ &= m(m_1(x_1, x_2), x_3) + (-1)^{|x_1||x_2|} m(x_2, m_1(x_1, x_3)) - m(, x_1, m_1(x_2, x_3)) \\ &+ m_1(m(x_1, x_2), x_3) + (-1)^{|x_1||x_2|} m_1(x_2, m(x_1, x_3)) - m_1(x_1, m(x_2, x_3)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

3.4 Déformations équivalentes

Soit (A, L, ρ) une super-algèbre de Lie-Rinehart et m la super-multidérivation associée. Soient m_t et m'_t deux déformations formelles de m.

Définition 3.4.1. On dit que m_t et m'_t sont *équivalentes* s'il existe un automorphisme formel pair Φ_t de $L[[t]]$, s'écrivant $\Phi_t = \mathrm{id} + \sum_{i\geq 1} t^i \phi_i$, avec $\phi_i : L \longrightarrow L$ des applications $\mathbb{K}$-linéaires paires, tel que

$$\Phi_t \circ m'_t(x,y) = m_t(\Phi_t(x), \Phi_t(y)), \quad \text{pour tous } x, y \in L.$$

On écrira $m_t \sim m'_t$.

Définition 3.4.2. Une déformation est dite *triviale* si elle est équivalente à la déformation $m^0_t = \sum_{i\geq 0} t^i m^0_i$, avec $m^0_0 = m$ et $m^0_i = 0$ pour $i \geq 1$.

Rappelons qu'on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow B^2_{def}(L) \longrightarrow Z^2_{def}(L) \xrightarrow{\pi} H^2_{def}(L) \longrightarrow 0.$$

On note $\overline{\mu} := \pi(\mu)$ pour $\mu \in Z^2_{def}(L)$.

Théorème 3.4.3. *Soit m_t une déformation de m, alors la classe de cohomologie de l'élément infinitésimal m_1 est déterminée par la classe d'équivalence de m_t.*

Remarque. En d'autres termes, on a $m_t \sim m'_t \Longrightarrow \overline{m_1} = \overline{m'_1}$.

Preuve. Soient m_t et m'_t deux déformations équivalentes de m et Φ_t l'automorphisme formel associé. Par définition, on a $\Phi_t \circ m'_t(x,y) = m_t(\Phi_t(x), \Phi_t(y))$, ce qui peut être réécrit

$$\sum_{k,i\geq 0} t^{k+1} \phi_k(m'_i(x,y)) = \sum_{j,p,q\geq 0} t^{j+p+q} m_j(\phi_p(x), \phi_q(y)).$$

En identifiant les coefficients de t, on obtient

$$m_1(x,y) - m'_1(x,y) = \phi_1(m(x,y)) - m(\phi_1(x), y) - m(x, \phi_1(y)).$$

Puisque $\delta(\phi_1) = m(\phi_1(x), y) + m(x, \phi_1(y)) - \phi_1(m(x,y))$, on a $m'_1 - m_1 = \delta(\phi_1)$. Il s'en suit $m'_1 = m_1 + \delta(\phi_1)$, donc $\overline{m_1} = \overline{m'_1} \in H^2_{def}(L)$. □

Définition 3.4.4. Une super-algèbre de Lie-Rinehart est dite *rigide* si toute déformation est équivalente à la déformation triviale.

Théorème 3.4.5. *Toute déformation non-triviale de $m \in Der^1(L,L)$ est équivalente à une déformation dont l'élément infinitésimal n'est pas un cobord.*

Remarque. Autrement dit, si tous les éléments m_i de la déformation sont des cobords, alors $m_t \sim m^0_t$.

Preuve. Supposons que m_1 est un cobord : $\exists \phi \in C^1_{def} = \mathrm{Der}^0(L,L)$ tel que $m_1 = \delta(\phi)$. Montrons que $\overline{m_1} = 0$. Posons $\Phi_t = \mathrm{id} + t\phi$ et définissons $m'_t := \Phi_t \circ m_t \circ \Phi_t^{-1}$. On a alors $m_t \sim m'_t$, ce qui implique que

$$\sum_{j\geq 0} t^j m_j((\Phi_t(x), \Phi_t(y)) = \Phi_t\left(\sum_{i\geq 0} t^i m'_i(x,y)\right),$$

cette dernière égalité étant équivalente à

$$\sum_{j,k,l\geq 0} t^{j+k+l} m_j\left(\phi_k(x), \phi_l(y)\right) = \sum_{i,p\geq 0} t^{i+p} \phi_p(m'_i(x,y)).$$

En identifiant les coefficients de t, on obtient $m'_1(x,y) - m_1(x,y) = \phi(m(x,y)) - m'(\phi(x), y) - m'(x, \phi(y)) = -\delta(\phi)$. On obtient alors $m'_1 - m_1 = -\delta(\phi) = -m_1$, donc $m'_1 = 0$. En répétant cet argument, on montre que si $m_i \in B^2$, alors $\overline{m_i} = 0$. □

Corollaire 3.4.6. *Si $H^2_{def}(L) = 0$, toute déformation est équivalente à la déformation triviale.*

Preuve. Si $H^2_{def}(L) = 0$, l'élément infinitésimal est un cobord. Avec le théorème 3.4.5, on obtient que la déformation est triviale. □

3.5 Obstructions

Soient (A, L, ρ) une super-algèbre de Lie-Rinehart, m l'élément de $\mathrm{Der}(L, L)$ associé et $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$. On dit que m_t est une déformation de m d'ordre N si

$$m_t = \sum_{k=0}^{N} t^k m_k, \quad m_k \in \mathrm{Der}^1(L, L) \ \text{ et } [m_t, m_t] = 0.$$

Soit m_t une déformation de m d'ordre N. L'objectif de cette section est de comprendre comment étendre cette déformation d'ordre N en une déformation d'ordre $(N+1)$, c'est-à-dire de trouver $m_{N+1} \in \mathrm{Der}^1(L, L)$ tel que $m'_t = m_t + t^{N+1} m_{N+1}$ soit une déformation de m.

La condition sur m_{N+1} est exprimée pour $a, b, c \in L$ par

$$\delta m_{N+1}(a, b, c) = \sum_{\substack{i+j=N \\ i,j>0}} m_i(a, m_j(b, c)) - m_i(m_j(a, b), c) - (-1)^{|a||b|} m_i(b, m_j(a, c)).$$

Définition 3.5.1. Pour $a, b, c \in L$, on pose

$$\theta_N(a, b, c) = \sum_{\substack{i+j=N \\ i,j>0}} m_i(a, m_j(b, c)) - m_i(m_j(a, b), c) - (-1)^{|a||b|} m_i(b, m_j(a, c)).$$

Il est clair que $\theta_N \in C^3_{def}(L, L) = \mathrm{Der}^2(L, L)$. L'application θ_N est appelée *cochaîne d'obstruction* à l'extension de la déformation m_t.

Lemme 3.5.2. *On a*

$$\theta_N = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i+j=N \\ i,j>0}} [m_i, m_j].$$

Corollaire 3.5.3. *La cochaîne θ_N est un 3-cocycle.*

Preuve. En utilisant l'identité de Jacobi graduée, on a

$$\begin{aligned}
\delta(\theta_N) &= [m, \theta_N] \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i+j=N \\ i,j>0}} [m, [m_i, m_j]] \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i+j=N \\ i,j>0}} [[m, m_i], m_j] + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i+j=N \\ i,j>0}} [m_i, [m, m_j]] .
\end{aligned}$$

Mais

$$[m, \theta_N] = 0 \Longleftrightarrow \sum_{\substack{i+j=N \\ i,j>0}} [[m, m_i], m_j] = \sum_{\substack{i+j=N \\ i,j>0}} [m_i, [m, m_j]]$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{\substack{i+j=N \\ i,j>0}} [m_j,[m,m_i]] = \sum_{\substack{i+j=N \\ i,j>0}} [m_i,[m,m_j]] \,.$$

□

Théorème 3.5.4. *Soit m_t une déformation d'ordre N de m. Alors, m_t s'étend en une déformation d'ordre $N+1$ si et seulement si θ_N est un 3-cobord.*

Preuve. ($\Rightarrow$) Supposons d'abord que m'_t une déformation d'ordre $N+1$ de m. Alors, m'_t vérifie l'identité de Jacobi graduée pour tous $a,b,c \in L$, ce qui s'écrit

$$m'_t(a,m'_t(b,c)) - m'_t(m'_t(a,b),c) - (-1)^{|a||b|}m'_t(b,m'_t(a,c)) = 0.$$

En développant et en identifiant les coefficients de t^{N+1}, on a

$$\sum_{\substack{i+j=N+1 \\ i,j\geq 0}} m_i(a,m_j(b,c)) - m_i(m_j(a,b),c) - (-1)^{|a||b|}m_i(b,m_j(a,c)) = 0,$$

ce qui est équivalent à $-[m,m_{N+1}] + \theta_N(a,b,c) = 0$. Ainsi, $\theta_N(a,b,c) = \delta(m_{N+1})$.

($\Leftarrow$) Réciproquement, si θ_N est un cobord, alors il existe $\varphi \in C^2_{def}(L)$ tel que

$$\theta_N = \delta\varphi = [m,\varphi].$$

On va montrer que $m'_t = m_t + t^{N+1}\varphi$ est une déformation d'ordre $N+1$ de m. Écrivons

$$\sum_{\substack{i+j=N+1 \\ i,j>0}} m_i(a,m_j(b,c)) - m_i(m_j(a,b),c) - (-1)^{|a||b|}m_i(b,m_j(a,c)) = [m,\varphi].$$

Il s'en suit que

$$\sum_{\substack{i+j=N+1 \\ i,j\geq 0}} m_i(a,m_j(b,c)) - m_i(m_j(a,b),c) - (-1)^{|a||b|}m_i(b,m_j(a,c)) = [m,\varphi] = 0.$$

En utilisant cette dernière égalité, on déduit que m'_t est une déformation d'ordre $N+1$ de m.

□

Corollaire 3.5.5. *Si $H^3_{def}(L) = 0$, toute déformation d'ordre N s'étend en une déformation d'ordre $N+1$.*

3.6 Exemple de super-algèbre de Lie-Rinehart rigide de type $(1|1,1|1)$

Dans cette section, on développe un exemple de déformation pour une super-algèbre de Lie-Rinehart en utilisant les résultats précédents. En particulier, on montre que la super-algèbre en question est rigide. On considère les deux super-algèbres suivantes :

- La super-algèbre associative super-commutative unitaire $\mathbf{A}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{1|1}}=$ Vect $(e^0_1|e^1_1)$, avec e^0_1 unité paire et e^1_1 impair, équipée du produit $e^1_1e^1_1 = 0$;
- La super-algèbre de Lie $\mathbf{L}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{1|1}}=$ Vect $(f^0_1|f^1_1)$, avec f^0_1 pair et f^1_1 impair, équipée du crochet $[f^1_1,f^1_1] = f^0_1$.

On considère alors le couple $\left(\mathbf{A^1_{1|1}}, \mathbf{L^1_{1|1}}\right)$, équipé de l'ancre nulle et de l'action donnée par $e^1_1 \cdot f^1_1 = \lambda f^0_1,\ \lambda \in \mathbb{K}$. On peut vérifier qu'on obtient bien ainsi une super-algèbre de Lie-Rinehart. En utilisant la proposition 3.2.1, le crochet $[\cdot,\cdot]$ correspond à un élément $m \in \mathrm{Der}^1(L)$, avec pour symbole $\sigma_m = \rho$. On va montrer que le couple (A, L) équipé de cette super-structure de Lie-Rinehart est rigide.

Lemme 3.6.1. *Soit (A, L) équipée de la super-structure décrite ci-dessus et soit $D \in \mathrm{Der}^n(L)$. Si $D = 0$, alors $\sigma_D(X)(a) = 0$ pour tout $X \in L^{\times n}$ et tout $a \in A$.*

On calcule ensuite la forme explicite des éléments de $Z^2_{def}(L)$. Une 2-cochaîne (D, σ_D) s'écrit de façon générale de la façon suivante :

$$\begin{cases} D(f^0_1, f^0_1) = 0, \\ D(f^0_1, f^1_1) = \gamma_0 f^0_1 + \gamma_1 f^1_1, \\ D(f^1_1, f^1_1) = \theta_0 f^0_1 + \theta_1 f^1_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_D(f^0_1)(e^0_1) = \sigma_D(f^1_1)(e^0_1) = 0, \\ \sigma_D(f^0_1)(e^1_1) = p_0 e^0_1 + p_1 e^1_1, \\ \sigma_D(f^1_1)(e^1_1) = q_0 e^0_1 + q_1 e^1_1. \end{cases}$$

Tous les paramètres qui apparaissent appartiennent à $\mathbb{K}$. Les résultats suivants donnent des conditions sur ces paramètres pour que la cochaîne (D, σ_D) soit un cocycle, c'est-à-dire appartienne à $Z^2_{def}(L)$.

Lemme 3.6.2. *Soit (A, L, ρ) une super-algèbre de Lie-Rinehart équipée de la super-structure décrite plus haut et soit $(D, \sigma_D) \in Z^2_{def}(L)$. Alors*

$$\begin{cases} D(f^0_1, f^0_1) = 0, \\ D(f^0_1, f^1_1) = \gamma f^0_1, \\ D(f^1_1, f^1_1) = \theta f^0_1 - \gamma f^1_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_D(f^0_1)(e^0_1) = \sigma_D(f^1_1)(e^0_1) = 0, \\ \sigma_D(f^0_1)(e^1_1) = 0, \\ \sigma_D(f^1_1)(e^1_1) = q_0 e^0_1 + q_1 e^1_1. \end{cases}$$

Preuve. Supposons que $(D, \sigma_D) \in Z^2_{def}(L)$. Alors,

$$\delta(D) = [m, D] = 0.$$

En évaluant cette équation sur les éléments de base f^0_1, f^1_1 de L, on trouve que

$$[m, D](f^1_1, f^0_1, f^1_1) = -2\gamma_1 f^0_1$$

et

$$[m, D](f^1_1, f^1_1, f^1_1) = (\gamma_0 + \theta_1) f^0_1 + \gamma_1 f^1_1,$$

toutes les autres combinaisons possibles étant nulles. En posant $u = u_0 f^0_1 + u_1 f^1_1,\ u_0, u_1 \in \mathbb{K}$, $v = v_0 f^0_1 + v_1 f^1_1\ v_0, v_1 \in \mathbb{K}$ et $w = w_0 f^0_1 + w_1 f^1_1\ w_0, w_1 \in \mathbb{K}$, on a

$$[m, D](u, v, w) = -2u_1 v_0 w_1 \gamma_1 f^0_1 + u_1 v_1 w_1 \left((\gamma_0 + \theta_1) f^0_1 + \gamma_1 f^1_1\right) = 0.$$

En posant $t_0 := -2u_1 v_0 w_1$ et $t_1 := u_1 v_1 w_1$, on obtient

$$\begin{cases} t_0 \gamma_1 + t_1(\gamma_0 + \theta_1) & = 0 \\ t_1 \gamma_1 & = 0. \end{cases}$$

Ainsi, $\gamma_1 = 0$ et $\gamma_0 = -\theta_1$. On obtient explicitement la forme du lemme en posant $\gamma_0 =: \gamma$ and $\theta_0 =: \theta$.

Puis, on sait par le lemme 3.6.1 que $\sigma_{[m,D]}(z)(a) = 0$ pour tous $z \in L$ et $a \in A$. Ainsi, $\sigma_{[m,D]} = \rho \circ D + \sigma_D \circ m + [\rho, \sigma_D] = \sigma_D \circ m$, puisque $\rho = 0$. On obtient donc

$$\begin{cases} \sigma_{[m,D]}(f_1^0, f_1^0) = 0 \\ \sigma_{[m,D]}(f_1^0, f_1^1) = 0 \\ \sigma_{[m,D]}(f_1^1, f_1^1)(e_1^1) = \sigma_D(f_1^0)(e_1^1) = p_0 e_1^0 + p_1 e_1^1. \end{cases}$$

Puisque $\sigma_{[m,D]} = 0$, on obtient finalement $p_0 = p_1 = 0$.

□

Soit $\Delta \in C^1_{def}(L)$. On a alors $\sigma_\Delta = 0$. L'objectif est maintenant de décrire explicitement $B^2_{def}(L)$. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \mu_0, \mu_1 \in \mathbb{K}$, on pose alors

$$\begin{cases} \Delta(f_1^0) = \lambda_0 f_1^0 + \lambda_1 f_1^1, \\ \Delta(f_1^1) = \mu_0 f_1^0 + \mu_1 f_1^1. \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} &[m, \Delta](f_1^0, f_1^0) = 0, \\ &[m, \Delta](f_1^0, f_1^1) = \lambda_2 x, \\ &[m, \Delta](f_1^1, f_1^1) = (2\mu_1 - \lambda_0) f_1^0 - \lambda_1 f_1^1. \end{aligned}$$

Proposition 3.6.3. *Soit (A, L, ρ) équipée de la super-structure de Lie-Rinehart décrite plus haut. Alors $B^2_{def}(L) = Z^2_{def}(L)$, ce qui implique que $H^2_{def}(L) = \{0\}$. Ainsi, (A, L, ρ) est rigide.*

Preuve. Soit $D \in Z^2_{def}(L)$, décrite dans le lemme 3.6.2. Il suffit de trouver $\Delta \in C^1_{def}(L)$ vérifiant

$$[m, \Delta] = D \quad \text{et} \quad \sigma_{[m,\Delta]} = \sigma_D.$$

En posant

$$\begin{cases} \Delta(f_1^0) = \lambda_0 f_1^0 + \gamma f_1^1 \\ \Delta(f_1^1) = \mu_0 f_1^0 + \frac{\theta + \lambda_0}{2} f_1^1, \end{cases}$$

pour λ_0 et μ_0 quelconques, on a $[m, \Delta] = D$. Puisque $\sigma_\Delta = 0$, on a $\sigma_{[m,\Delta]} = \rho \circ \Delta$. Ces deux termes sont nuls, ainsi cette dernière équation est vérifiée. □

Chapitre 4

Classification des super-algèbres de Lie-Rinehart en caractéristique zéro

L'objectif de ce chapitre est de classifier les super-algèbres de Lie-Rinehart sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ en petites dimensions. De façon très générale, la classification d'objets mathématiques est un problème qui peut s'aborder de différentes façons. Étant donnée une structure algébrique, il peut être possible de caractériser cette dernière à l'aide de ses constantes de structures (voir section 4.1). Dans ce cas, la classification se ramène à la résolution d'équations mettant en jeu ces constantes de structure, ce qui est aisément implémentable dans un logiciel de calcul formel. Une autre méthode est de donner les différentes classes comme quotients d'objets libres (comme dans [AM14] pour le cas des super-algèbres associatives, article dans lequel se côtoient cette méthode et la suivante). La dernière consiste à donner des représentations matricielles. Par exemple, dans le cas des algèbres de Lie complexes, il est bien connu que toute algèbre de Lie de dimension finie se plonge dans $M_n(\mathbb{C})$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, avec pour crochet le commutateur (Théorème d'Ado). Ce résultat, bien que très concret, présente le désavantage de ne pas être implémentable facilement sur ordinateur. Toujours pour les algèbres de Lie complexes, la classification des algèbres de Lie semi-simples se fait au moyen d'objets combinatoires tels que les systèmes de racines. Tout cela est expliqué en détails dans tout ouvrage traitant des algèbres de Lie, par exemple [JN62] ou bien [HJ78].

Dans ce travail, on privilégie la méthode consistant à classifier les objets algébriques au moyen des constantes de structure. Cette approche présente l'avantage de pouvoir être confiée à un logiciel de calcul formel, puisqu'elle se résume à résoudre des systèmes d'équations algébriques. Pour classifier les super-algèbres de Lie-Rinehart sur $\mathbb{C}$, on a besoin de la classification des super-algèbres associatives super-commutatives et de la classification des super-algèbres de Lie. Plusieurs articles traitent de la classification des super-algèbres associatives sur $\mathbb{C}$ ([ACZ09], [AM14], [GP74]), dont on reprend les résultats. Pour les super-algèbres de Lie, la classification est essentiellement due à Backhouse sur le corps des nombres réels ([BN78]), ainsi qu'à Burde et Steinhoff ([BS99]). La première étape a donc consisté à adapter la classification sur $\mathbb{R}$ de Backhouse au cas complexe. Ceci a été fait au moyen d'un programme écrit sur le logiciel de calcul formel Mathematica. Puis, nous avons implémenté un programme (toujours sur Mathematica) prenant en entrée les constantes de structures d'un couple (A, L), avec A super-algèbre associative super-commutative et L super-algèbre de Lie, et renvoyant en sortie la liste de toutes les super-structures de Lie-Rinehart compatibles sur ce couple.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans une première section, on introduit toutes les constantes de structure en jeu dans le cas d'une super-algèbre de Lie-Rinehart et on décrit les équations qui les gouvernent. On donne ensuite la classification des super-algèbres associatives super-commutatives A de dimension ≤ 4 et des super-algèbres de Lie L de dimension ≤ 4. Puis, pour chaque couple (A, L), $\dim(A) \leq 2$, $\dim(L) \leq 4$, on donne la liste de toutes les structures de super-algèbres de Lie-Rinehart possibles, à l'aide du programme Mathematica décrit précédemment. On se limite à ces petites dimensions en raison de contraintes techniques et de temps d'exécution du programme, mais ce dernier devrait fonctionner pour n'importe quelle dimension. Toutefois, le nombre de structures possibles croît très rapidement dès que l'on augmente la dimension, il ne semble donc pas raisonnable de donner une liste de toutes les super-algèbres possibles en dimensions plus grandes. Les résultats sont présentés sous forme de tableaux.

Ce chapitre se base sur une partie du contenu de l'article [EM22], publié dans le journal *Communications in Mathematics.*

Le but est de décrire toutes les structures de super-algèbres de Lie-Rinehart sur un couple (A, L) lorsque $\dim(A) \leq 2$ et $\dim(L) \leq 4$. Cela signifie, étant données une super-algèbre associative super-commutative unitaire A et une super-algèbre de Lie L, on décrit toutes les actions $A \times L \to L$ et les ancres $L \to \mathrm{Der}(A)$ qui sont compatibles au sens de la définition 2.4.1.

4.1 Variété algébrique des super-algèbres de Lie-Rinehart en dimension finie

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Rappelons que $A = A_0 \oplus A_1$ est une super-algèbre associative super-commutative unitaire et $L = L_0 \oplus L_1$ une super-algèbre de Lie. Dans ce paragraphe, on notera les éléments de base A par e_i^s, $s = \deg(e_i^s) \in \{0, 1\}$, $1 \leq i \leq \dim A_s$ et les éléments de base L par (f_j^t), $t = \deg(f_j^t) \in \{0, 1\}$, $1 \leq j \leq \dim L_t$. On a donc

$$A_0 = \left\langle e_i^0 \right\rangle_{1 \leq i \leq \dim A_0}, \; A_1 = \left\langle e_i^1 \right\rangle_{1 \leq i \leq \dim A_1}, \; L_0 = \left\langle f_j^0 \right\rangle_{1 \leq j \leq \dim L_0}, \; L_1 = \left\langle f_j^1 \right\rangle_{1 \leq j \leq \dim L_1}.$$

Constantes de structure. On va représenter les quatre opérations qui interviennent dans la structure de super-algèbre de Lie-Rinehart par leurs constantes de structure. Les opérations étant linéaires, il suffit de les donner sur les éléments de base de A et de L. L'addition des degrés doit être comprise modulo 2 dans la suite.

- Multiplication de A :

$$e_i^s e_j^t = \sum_{k=1}^{\dim A_{s+t}} c_{(i,s)(j,t)}^k e_k^{s+t}, \quad c_{(i,s)(j,t)}^k \in \mathbb{K};$$

- Crochet de Lie de L :

$$[f_i^s, f_j^t] = \sum_{k=1}^{\dim L_{s+t}} d_{(i,s)(j,t)}^k f_k^{s+t}, \quad d_{(i,s)(j,t)}^k \in \mathbb{K};$$

- Action de A sur L :

$$e_i^s \cdot f_j^t = \sum_{k=1}^{\dim L_{s+t}} b_{(i,s)(j,t)}^k f_k^{s+t}, \quad b_{(i,s)(j,t)}^k \in \mathbb{K};$$

- Ancre :

$$\rho(f_i^s)(e_j^t) = \sum_{k=1}^{\dim A_{s+t}} r^k_{(i,s)(j,t)} e_k^{s+t}, \quad r^k_{(i,s)(j,t)} \in \mathbb{K}.$$

Les scalaires

$$\left\{ c^k_{(i,s)(j,t)}, d^k_{(i,s)(j,t)}, b^k_{(i,s)(j,t)}, r^k_{(i,s)(j,t)} \right\}$$

sont appelés les *constantes de structure* de la super-algèbre de Lie-Rinehart (A, L, ρ). On peut désormais exprimer toutes les équations définissant une structure de super-algèbre de Lie-Rinehart à l'aide des constantes de structure.

- L'associativité de la multiplication de A, donnée par l'équation $(e_i^s e_j^t)e_n^m = e_i^s(e_j^t e_n^m)$ devient

$$\sum_{k=1}^{\dim A_{s+t}} c^k_{(i,s)(j,t)} c^l_{(k,s+t)(n,m)} = \sum_{k=1}^{\dim A_{t+m}} c^k_{(j,t)(n,m)} c^l_{(i,s)(l,t+m)}, \quad \forall\, 1 \leq l \leq \dim A_{s+t+m}; \tag{4.1}$$

- La super-commutativité de la multiplication de A, donnée par l'équation $e_i^s e_j^t = (-1)^{st} e_j^t e_i^s$ devient

$$c^k_{(i,s)(j,t)} = (-1)^{st} c^k_{(j,t)(i,s)} \quad \forall\, 1 \leq k \leq \dim A_{s+t}; \tag{4.2}$$

- l'antisymétrie graduée du crochet, donnée par l'équation $[f_i^s, f_j^t] = -(-1)^{st}[f_j^t, f_i^s]$ devient

$$d^k_{(i,s)(j,t)} = -(-1)^{st} d^k_{(j,t)(i,s)} \quad \forall\, 1 \leq k \leq \dim L_{s+t}; \tag{4.3}$$

- L'identité de Jacobi graduée, donnée par l'équation

$$[f_i^s, [f_j^t, f_n^m]] = [[f_i^s, f_j^t], f_n^m] + (-1)^{st}[f_j^t, [f_i^s, f_n^m]]$$

devient

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\dim L_{t+m}} d^k_{(j,t)(n,m)} d^l_{(i,s)(k,t+m)} = &\sum_{k=1}^{\dim L_{s+t}} d^k_{(i,s)(j,t)} d^l_{(k,s+t)(n,m)} \\ &+ (-1)^{st} \sum_{k=1}^{\dim L_{s+m}} d^k_{(i,s)(n,m)} d^l_{(j,t)(k,s+m)}, \quad \forall\, 1 \leq l \leq \dim L_{s+t+m};\end{aligned} \tag{4.4}$$

- L'action of A sur L, donnée par l'équation $(e_i^s e_j^t) \cdot f_n^m = e_i^s \cdot (e_j^t \cdot f_n^m)$ devient

$$\sum_{k=1}^{\dim A_{s+t}} c^k_{(i,s)(j,t)} b^l_{(k,s+t)(n,m)} = \sum_{k=1}^{\dim L_{t+m}} b^k_{(j,t)(n,m)} b^l_{(i,s)(k,t+m)}, \quad \forall\, 1 \leq l \leq \dim L_{s+t+m}; \tag{4.5}$$

- Le fait que l'ancre ρ soit un morphisme de Lie, donné par l'équation

$$\rho([f_i^s, f_j^t])(e_n^m) = \rho(f_i^s)\rho(f_j^t)(e_n^m) - (-1)^{st}\rho(f_j^t)\rho(f_i^s)(e_n^m)$$

devient

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\dim L_{s+t}} d^k_{(i,s)(j,t)} r^l_{(k,t+s)(n,m)} = & \sum_{k=1}^{\dim A_{t+m}} r^k_{(j,t)(n,m)} r^l_{(i,s)(k,t+m)} \\ & - (-1)^{st} \sum_{k=1}^{\dim A_{s+m}} r^k_{(i,s)(n,m)} r^l_{(j,t)(k,s+m)}, \quad \forall\ 1 \leq l \leq \dim A_{s+t+m};\end{aligned} \tag{4.6}$$

- La A-linéarité de l'ancre, donnée par l'équation $\rho(e_i^s \cdot f_j^t)(e_n^m) = e_i^s \cdot \rho(f_j^t)(e_n^m)$ devient

$$\sum_{k=1}^{\dim A_{t+m}} r^k_{(j,t)(n,m)} c^l_{(i,s)(k,t+m)} = \sum_{k=1}^{\dim L_{s+t}} b^k_{(i,s)(j,t)} r^l_{(k,s+t)(n,m)}, \quad \forall\ 1 \leq l \leq \dim A_{s+t+m}; \tag{4.7}$$

- Le fait que ρ soit à valeurs dans les super-dérivations de A, donné par l'équation

$$\rho(f_i^s)(e_j^t e_n^m) = \rho(f_i^s)(e_j^t) e_n^m - (-1)^{st} e_j^t \rho(f_i^s)(e_n^m)$$

devient

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\dim A_{t+m}} c^k_{(j,t)(n,m)} r^l_{(i,s)(k,t+m)} = & \sum_{k=1}^{\dim A_{s+t}} r^k_{(i,s)(j,t)} c^l_{(k,s+t)(n,m)} \\ & + (-1)^{st} \sum_{k=1}^{\dim A_{s+m}} r^k_{(i,s)(n,m)} c^l_{(j,t)(k,s+m)}, \quad \forall\ 1 \leq l \leq \dim A_{s+t+m};\end{aligned} \tag{4.8}$$

- La condition de compatibilité, donnée par l'équation

$$[f_i^s, e_j^t \cdot f_n^m] = \rho(f_i^s)(e_j^t) \cdot f_n^m + (-1)^{st} e_j^t \cdot [f_i^s, f_n^m]$$

devient

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\dim L_{t+m}} b^k_{(j,t)(n,m)} d^l_{(i,s)(k,t+m)} = & \sum_{k=1}^{\dim A_{s+t}} r^k_{(i,s)(j,t)} b^l_{(k,s+t)(n,m)} \\ & + (-1)^{st} \sum_{k=1}^{\dim L_{s+m}} d^k_{(i,s)(n,m)} b^l_{(j,t)(k,s+m)}, \quad \forall\ 1 \leq l \leq \dim L_{s+t+m}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Variété algébrique des super-algèbres de Lie-Rinehart. Notons pour simplifier

$$\begin{cases} (c) & = c^k_{(i,s)(j,t)}, \quad 0 \leq s,t \leq 1,\ 1 \leq i \leq A_s,\ 1 \leq j \leq A_t,\ 1 \leq k \leq A_{s+t}; \\ (d) & = d^k_{(i,s)(j,t)}, \quad 0 \leq s,t \leq 1,\ 1 \leq i \leq L_s,\ 1 \leq j \leq L_t,\ 1 \leq k \leq L_{s+t}; \\ (b) & = b^k_{(i,s)(j,t)}, \quad 0 \leq s,t \leq 1,\ 1 \leq i \leq A_s,\ 1 \leq j \leq L_t,\ 1 \leq k \leq L_{s+t}; \\ (r) & = r^k_{(i,s)(j,t)}, \quad 0 \leq s,t \leq 1,\ 1 \leq i \leq L_s,\ 1 \leq j \leq A_t,\ 1 \leq k \leq A_{s+t}. \end{cases}$$

Notons $n = \dim A_0$, $p = \dim A_1$, $m = \dim L_0$, $q = \dim L_1$ et soit

$$N = (n+p)^3 + (m+q)^3 + (n+p)(m+q)^2 + (n+p)^2(m+q).$$

On considère l'espace affine $\mathbb{K}^N$. La variété algébrique des super-algèbres de Lie-Rinehart, notée $\mathcal{LR}_{(n|p,m|q)}$ correspond à des points $\Big\{(c),(d),(b),(r)\Big\}$ de $\mathbb{K}^N$ vérifiant les équations (4.1) à (4.9).

On peut affiner la borne sur la dimension ci-dessus grâce aux graduations des super-algèbres A et L. De nombreuses constantes de structure sont automatiquement nulles du fait que les applications de structure (multiplication de A, crochet de Lie de L, action de A sur L, ancre) sont de degré zéro. On obtient alors

$$\dim\left(\mathcal{LR}_{(n|p,m|q)}\right) \leq n^3+3np^2+m^3+3mq^2+nm^2+nq^2+2pqm+mn^2+mp^2+2pqn.$$

Action du (super-)groupe linéaire. Si (A,L,ρ) est une super-algèbre de Lie-Rinehart, on va noter dans ce paragraphe μ la loi associative super-commutative de A et α l'action de A sur L. On reprend également les notations n,p,m,q du paragraphe précédent. Rappelons que dans le cas le plus général, un morphisme de super-algèbres de Lie-Rinehart $(A,L,\rho)\to(A',L',\rho')$ est un couple (ϕ,ψ) avec $\phi: A\to A'$ un morphisme de super-algèbre associative et $\psi: L\to L'$ un morphisme de super-algèbres de Lie tels que

$$\phi\left(\rho_x(a)\right)=\rho'_{\psi(x)}\left(\phi(a)\right),\quad \forall a\in A,\forall x\in L.$$

On peut faire agir $GL_{n+p}\times GL_{m+q}$ sur la variété algébrique $\mathcal{LR}_{(n|p,m|q)}$:

$$\begin{aligned}\Big(GL_{n+p}\times GL_{m+q}\Big)\times\mathcal{LR}_{(n|p,m|q)} &\longrightarrow \mathcal{LR}_{(n|p,m|q)}\\ \Big((\phi,\psi),(\mu,[\cdot,\cdot],\alpha,\rho)\Big) &\longmapsto \begin{pmatrix}\phi\circ\mu\circ(\phi^{-1}\times\phi^{-1})\\ \psi\circ[\cdot,\cdot]\circ(\psi^{-1}\times\psi^{-1})\\ \phi\circ(\alpha\circ\phi^{-1})\circ\psi^{-1}\\ \phi\circ(\rho\circ\psi^{-1})\circ\phi^{-1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Il est alors possible de considérer les orbites sous l'action de $GL_{n+p}\times GL_{m+q}$. Deux structures $(\mu,[\cdot,\cdot],\alpha,\rho)$ et $(\mu',[\cdot,\cdot]',\alpha',\rho')$ sont alors isomorphes si elles sont dans la même orbite.

4.2 Classification des super-algèbres associatives et de Lie

A partir d'ici, on fixe $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, le corps des nombres complexes. On rappelle ici la classification des super-algèbres associatives super-commutatives unitaires (tirée de [ACZ09], [AM14] et [GP74]) et celle des super-algèbres de Lie ([BP89] et [BS99]) en petites dimensions.

4.2.1 Super-algèbres associatives super-commutatives unitaires

On dresse la liste des super-algèbres associatives super-commutatives unitaires de dimension plus petite ou égale à 4. Comme ci-dessus, on note les éléments de base de A_0 par e_i^0 et ceux de A_1 par e_j^1. L'unité est e_1^0. On n'écrit que les produits non-nuls, ces derniers devant être complétés par super-commutativité et multilinéarité.

- les super-algèbres purement impaires $\mathbf{A_{0|p}}$ sont toujours équipées d'un produit nul.
- $\dim A=(1|0)$: Il n'y a qu'une seule super-algèbre associative super-commutative unitaire $\mathbf{A^1_{1|0}}$, dont le produit est donné par $e_1^0e_1^0=e_1^0$.
- $\dim A=(1|1)$: Il n'y a qu'une seule super-algèbre associative super-commutative unitaire $\mathbf{A^1_{1|1}}$ dont le produit est donné par $e_1^1e_1^1=0$.

- $\dim A = (1|p),\ p \geq 2$: on a le résultat suivant :

Proposition 4.2.1 ([ACZ09]). *Soit $p \geq 2$. Si A est une super-algèbre associative de dimension $(1|p)$, alors $(A_1)^2 = \{0\}$.*

Preuve. On a $A_0 = \mathbb{K}$. Si on considère deux éléments linéairement indépendants $x, y \in A_1$, $x \neq 0$, on obtient $x^2 \in A_0$, ainsi que $xy \in A_0$. il existe alors $\alpha, \beta \in K$ tels que $x^2 = \alpha$ et $xy = \beta$. Cependant,

$$\alpha x = (xx)y = x(xy) = \beta x.$$

Il s'en suit que α et β doivent être nuls, en raison de l'indépendance linéaire de x et y. Ainsi, on a $(A_1)^2 = \{0\}$. □

- $\dim A = (2|0)$: il y a deux super-algèbres associatives super-commutatives unitaires non isomorphes deux-à-deux :

$\mathbf{A^1_{2|0}}$: tout produit non trivial est nul ;
$\mathbf{A^2_{2|0}}$: $e^0_2 e^0_2 = e^0_2$.

- $\dim A = (2|1)$: il y a deux super-algèbres associatives super-commutatives unitaires non isomorphes deux-à-deux :

$\mathbf{A^1_{2|1}}$: tout produit non-trivial est nul ;
$\mathbf{A^2_{2|1}}$: $e^0_2 e^0_2 = e^0_2,\ e^1_1 e^1_1 = 0,\ e^0_2 e^1_1 = e^1_1$.

- $\dim A = (2|2)$: il y a cinq super-algèbres associatives super-commutatives unitaires non isomorphes deux-à-deux :

$\mathbf{A^1_{2|2}}$: $e^0_2 e^0_2 = e^0_2,\ e^0_2 e^1_1 = e^1_1$;
$\mathbf{A^2_{2|2}}$: $e^0_2 e^0_2 = e^0_2$;
$\mathbf{A^3_{2|2}}$: $e^0_2 e^1_1 = e^1_2$;
$\mathbf{A^4_{2|2}}$: tout produit non-trivial est nul ;
$\mathbf{A^5_{2|2}}$: $e^1_1 e^1_2 = e^0_2$.

- $\dim A = (3|0)$: il y a quatre super-algèbres associatives super-commutatives unitaires non isomorphes deux-à-deux :

$\mathbf{A^1_{3|0}}$: $e^0_2 e^0_2 = e^0_2,\ e^0_2 e^0_3 = e^0_3,\ e^0_3 e^0_3 = e^0_3$;
$\mathbf{A^2_{3|0}}$: $e^0_2 e^0_2 = e^0_2,\ e^0_2 e^0_3 = e^0_3$;
$\mathbf{A^3_{3|0}}$: $e^0_2 e^0_2 = e^0_2$;
$\mathbf{A^4_{3|0}}$: tout produit non-trivial est nul ;

- $\dim A = (3|1)$: il y a cinq super-algèbres associatives super-commutatives unitaires non isomorphes deux-à-deux :

$\mathbf{A^1_{3|1}}$: $e^0_2 e^0_2 = e^0_2,\ e^0_3 e^0_3 = e^0_3$;
$\mathbf{A^2_{3|1}}$: $e^0_2 e^0_2 = e^0_2,\ e^0_2 e^0_3 = e^0_3$;
$\mathbf{A^3_{3|1}}$: $e^0_2 e^0_2 = e^0_2$;
$\mathbf{A^4_{3|1}}$: $e^0_2 e^0_2 = e^0_3$;
$\mathbf{A^5_{3|1}}$: tout produit non-trivial est nul ;

- $\dim A = (4|0)$: il y a neuf super-algèbres associatives super-commutatives unitaires non isomorphes deux-à-deux :

$\mathbf{A^1_{4|0}}$: $e^0_2e^0_2 = e^0_2,\ e^0_3e^0_3 = e^0_3,\ e^0_4e^0_4 = e^0_4$;
$\mathbf{A^2_{4|0}}$: $e^0_2e^0_2 = e^0_2,\ e^0_3e^0_3 = e^0_3$;
$\mathbf{A^3_{4|0}}$: $e^0_2e^0_2 = e^0_2\ e^0_2e^0_3 = e^0_3$;
$\mathbf{A^4_{4|0}}$: $e^0_2e^0_2 = e^0_2,\ e^0_2e^0_3 = e^0_3,\ e^0_2e^0_4 = e^0_4,\ e^0_3e^0_3 = e^0_4$;
$\mathbf{A^5_{4|0}}$: $e^0_2e^0_2 = e^0_3,\ e^0_2e^0_3 = e^0_4$;
$\mathbf{A^6_{4|0}}$: $e^0_2e^0_2 = e^0_2,\ e^0_2e^0_3 = e^0_3,\ e^0_2e^0_4 = e^0_4$;
$\mathbf{A^7_{4|0}}$: $e^0_2e^0_3 = e^0_4$;
$\mathbf{A^8_{4|0}}$: $e^0_3e^0_3 = e^0_3$;
$\mathbf{A^9_{4|0}}$: tout produit non-trivial est nul ;

4.2.2 Super-algèbres de Lie

On dresse la liste des super-algèbres de Lie de dimension plus petite ou égale à 4. Comme précédemment, on note les éléments de base de L_0 par f^0_i et ceux de L_1 par f^1_j. On n'écrit que les crochets non-nuls, ces derniers devant être complétés par super-antisymétrie et multilinéarité.

- Les super-algèbres de Lie purement impaires $\mathbf{L_{0|q}}$ sont toujours équipées d'un crochet identiquement nul.
- $\dim L = (1|0)$: il n'y a qu'une super-algèbre de Lie $\mathbf{L^1_{1|0}}$, dont le crochet est donné par $[f^0_1, f^0_1] = 0$.
- $\dim L = (1|1)$: il y a trois super-algèbres de Lie non isomorphes deux-à-deux :

$\mathbf{L^1_{1|1}}$: $[f^1_1, f^1_1] = f^0_1$;
$\mathbf{L^2_{1|1}}$: $[f^0_1, f^1_1] = f^1_1$.
$\mathbf{L^3_{1|1}}$: crochet nul.

- $\dim L = (1|2)$: il y a six super-algèbres de Lie non isomorphes deux-à-deux :

$\mathbf{L^1_{1|2}}$: $[f^0_1, f^1_1] = f^1_1,\ [f^0_1, f^1_2] = pf^1_2\ (0 < |p| \leq 1)$;
$\mathbf{L^2_{1|2}}$: $[f^0_1, f^1_2] = f^1_1$;
$\mathbf{L^3_{1|2}}$: $[f^0_1, f^1_1] = f^1_1,\ [f^0_1, f^1_2] = f^1_1 + f^1_2$;
$\mathbf{L^4_{1|2}}$: $[f^0_1, f^1_1] = pf^1_1 - f^1_2,\ [f^0_1, f^1_2] = f^1_1 + pf^1_2\ (p \in \mathbb{C})$;
$\mathbf{L^5_{1|2}}$: $[f^1_1, f^1_1] = f^0_1,\ [f^1_2, f^1_2] = f^0_1$;
$\mathbf{L^6_{1|2}}$: crochet nul.

- $\dim L = (1|3)$: il y a huit super-algèbres de Lie non isomorphes deux-à-deux :

$\mathbf{L^1_{1|3}}$: $[f^0_1, f^1_1] = f^1_1,\ [f^0_1, f^1_2] = pf^1_2,\ [f^0_1, f^1_3] = qf^1_3\ (0 < |p| \leq |q| \leq 1)$;
$\mathbf{L^2_{1|3}}$: $[f^0_1, f^1_1] = f^1_1,\ [f^0_1, f^1_3] = f^1_2$;
$\mathbf{L^3_{1|3}}$: $[f^0_1, f^1_1] = pf^1_1,\ [f^0_1, f^1_2] = f^1_2,\ [f^0_1, f^1_3] = f^1_2 + f^1_3$;
$\mathbf{L^4_{1|3}}$: $[f^0_1, f^1_1] = pf^1_1,\ [f^0_1, f^1_2] = qf^1_2 - f^1_3,\ [f^0_1, f^1_3] = f^1_2 + qf^1_3,\ p \neq 0$;
$\mathbf{L^5_{1|3}}$: $[f^0_1, f^1_2] = f^1_1,\ [f^0_1, f^1_3] = f^1_2,\ p, q \neq 0$;
$\mathbf{L^6_{1|3}}$: $[f^0_1, f^1_1] = f^1_1,\ [f^0_1, f^1_2] = f^1_1 + f^1_2,\ [f^0_1, f^1_3] = f^1_2 + f^1_3$;
$\mathbf{L^7_{1|3}}$: $[f^1_1, f^1_1] = f^0_1,\ [f^1_2, f^1_2] = f^0_1,\ [f^1_3, f^1_3] = f^0_1$;
$\mathbf{L^8_{1|3}}$: crochet nul.

- $\dim L = (2|0)$: il y a deux super-algèbres de Lie non isomorphes deux-à-deux :

$\mathbf{L^1_{2|0}}$: crochet nul ;

$\mathbf{L^2_{2|0}}$: $[f_1^0, f_2^0] = f_2^0$.

- $\dim L = (2|1)$: il y a six super-algèbres de Lie non isomorphes deux-à-deux :

$\mathbf{L^1_{2|1}}$: $[f_1^1, f_1^1] = f_2^0$;
$\mathbf{L^2_{2|1}}$: $[f_1^0, f_1^1] = f_1^1\ [f_2^0, f_1^1] = -f_1^1$;
$\mathbf{L^3_{2|1}}$: $[f_1^0, f_2^0] = f_2^0,\ [f_1^0, f_1^1] = \frac{1}{2}f_1^1$;
$\mathbf{L^4_{2|1}}$: $[f_1^0, f_2^0] = f_2^0,\ [f_1^0, f_1^1] = pf_1^1,\ (p \neq 0)$;
$\mathbf{L^5_{2|1}}$: $[f_1^0, f_2^0] = f_2^0$.
$\mathbf{L^6_{2|1}}$: crochet nul.

- $\dim L = (2|2)$: il y a dix-huit super-algèbres de Lie non isomorphes deux-à-deux :

$\mathbf{L^1_{2|2}}$: $[f_1^0, f_1^1] = f_1^1,\ [f_1^0, f_2^1] = f_2^1,\ [f_2^0, f_2^1] = f_1^1$;
$\mathbf{L^2_{2|2}}$: $[f_1^0, f_1^1] = f_1^1,\ [f_1^0, f_2^1] = f_2^1,\ [f_2^0, f_2^1] = f_1^1,\ [f_2^0, f_1^1] = -f_2^1$;
$\mathbf{L^3_{2|2}}$: $[f_1^0, f_2^0] = f_2^0,\ [f_1^0, f_1^1] = pf_1^1,\ [f_1^0, f_2^1] = qf_2^1,\ pq \neq 0$;
$\mathbf{L^4_{2|2}}$: $[f_1^0, f_2^0] = f_2^0,\ [f_1^0, f_1^1] = pf_1^1,\ [f_1^0, f_2^1] = f_1^1 + pf_2^1,\ p \neq 0$;
$\mathbf{L^5_{2|2}}$: $[f_1^0, f_2^0] = f_2^0,\ [f_1^0, f_1^1] = pf_1^1 - qf_2^1,\ [f_1^0, f_2^1] = qf_1^1 + pf_2^1,\ q \neq 0$;
$\mathbf{L^6_{2|2}}$: $[f_1^0, f_2^0] = f_2^0,\ [f_1^0, f_1^1] = (p+1)f_1^1,\ [f_1^0, f_2^1] = pf_2^1,\ [f_2^0, f_2^1] = f_1^1,\ p \neq 0$;
$\mathbf{L^7_{2|2}}$: $[f_1^0, f_2^0] = f_2^0,\ [f_1^0, f_1^1] = \frac{1}{2}f_1^1,\ [f_1^0, f_2^1] = \frac{1}{2}f_2^1,\ [f_1^1, f_1^1] = f_2^0,\ [f_2^1, f_2^1] = f_2^0$;
$\mathbf{L^8_{2|2}}$: $[f_1^0, f_2^0] = f_2^0,\ [f_1^0, f_1^1] = \frac{1}{2}f_1^1,\ [f_1^0, f_2^1] = \frac{1}{2}f_2^1,\ [f_1^1, f_1^1] = f_2^0$;
$\mathbf{L^9_{2|2}}$: $[f_1^0, f_2^0] = f_2^0,\ [f_1^0, f_1^1] = pf_1^1,\ [f_1^0, f_2^1] = (1-p)f_2^1,\ [f_1^1, f_2^1] = f_2^0$;
$\mathbf{L^{10}_{2|2}}$: $[f_1^0, f_2^0] = f_2^0,\ [f_1^0, f_1^1] = \frac{1}{2}f_1^1,\ [f_1^0, f_2^1] = f_1^1 + \frac{1}{2}f_2^1,\ [f_2^1, f_2^1] = f_2^0$;
$\mathbf{L^{11}_{2|2}}$: $[f_1^0, f_2^0] = f_2^0,\ [f_1^0, f_1^1] = \frac{1}{2}f_1^1 - pf_2^1,\ [f_1^0, f_2^1] = pf_1^1 + \frac{1}{2}f_2^1,\ [f_1^1, f_1^1] = f_2^0,\ [f_2^1, f_2^1] = f_2^0,\ p \neq 0$;
$\mathbf{L^{12}_{2|2}}$: $[f_1^0, f_2^0] = f_2^0,\ [f_1^0, f_1^1] = f_1^1,\ [f_2^0, f_2^1] = f_1^1,\ [f_1^1, f_2^1] = -\frac{1}{2}f_2^0,\ [f_2^1, f_2^1] = f_1^0$;
$\mathbf{L^{13}_{2|2}}$: $[f_1^1, f_1^1] = f_1^0,\ [f_2^1, f_2^1] = f_2^0$;
$\mathbf{L^{14}_{2|2}}$: $[f_1^0, f_2^0] = f_2^0,\ [f_1^0, f_1^1] = f_1^1,\ [f_1^1, f_2^1] = f_2^0$;
$\mathbf{L^{15}_{2|2}}$: $[f_1^0, f_2^0] = f_2^0,\ [f_1^0, f_1^1] = \frac{1}{2}f_1^1,\ [f_1^1, f_1^1] = f_2^0$;
$\mathbf{L^{16}_{2|2}}$: $[f_1^0, f_1^1] = f_1^1,\ [f_1^0, f_2^1] = -f_2^1,\ [f_1^1, f_2^1] = f_2^0$;
$\mathbf{L^{17}_{2|2}}$: $[f_1^0, f_2^1] = f_1^1,\ [f_2^1, f_2^1] = f_2^0$;
$\mathbf{L^{18}_{2|2}}$: crochet nul.

- $\dim L = (3|0)$: il y a six super-algèbres de Lie non isomorphes deux-à-deux :

$\mathbf{L^1_{3|0}}$: crochet nul ;
$\mathbf{L^2_{3|0}}$: $[f_1^0, f_2^0] = f_3^0$;
$\mathbf{L^3_{3|0}}$: $[f_1^0, f_2^0] = f_1^0$;
$\mathbf{L^4_{3|0}}$: $[f_1^0, f_2^0] = f_2^0, [f_1^0, f_3^0] = f_2^0 + f_3^0$;
$\mathbf{L^5_{3|0}}$: $[f_1^0, f_2^0] = f_2^0, [f_1^0, f_3^0] = pf_3^0, p \neq 0$;
$\mathbf{L^6_{3|0}}$: $[f_1^0, f_2^0] = f_3^0, [f_1^0, f_3^0] = -2f_1^0, [f_2^0, f_3^0] = 2f_2^0$;

- $\dim L = (3|1)$: il y a sept super-algèbres de Lie non isomorphes deux-à-deux :

$\mathbf{L^1_{3|1}}$: $[f_2^0, f_3^0] = f_1^0,\ [f_2^0, f_1^1] = f_1^1$;
$\mathbf{L^2_{3|1}}$: $[f_1^0, f_3^0] = f_1^0,\ [f_2^0, f_3^0] = f_1^0 + f_2^0,\ [f_3^0, f_1^1] = qf_1^1,\ q \neq 0$;
$\mathbf{L^3_{3|1}}$: $[f_1^0, f_3^0] = pf_1^0 - f_2^0,\ [f_2^0, f_3^0] = f_1^0 + pf_2^0,\ [f_3^0, f_1^1] = qf_1^1,\ pq \neq 0$;
$\mathbf{L^4_{3|1}}$: $[f_2^0, f_3^0] = f_1^0,\ [f_1^1, f_1^1] = f_1^0$;

$\mathbf{L^5_{3|1}}$: $[f^0_1, f^0_2] = f^0_2,\ [f^0_1, f^0_3] = pf^0_3,\ [f^0_1, f^1_1] = \frac{1}{2}f^1_1,\ [f^1_1, f^1_1] = f^0_2,\ p \neq 0$;
$\mathbf{L^6_{3|1}}$: $[f^0_1, f^0_2] = f^0_2,\ [f^0_1, f^0_3] = f^0_2 + f^0_3,\ [f^0_1, f^1_1] = \frac{1}{2}f^1_1,\ [f^1_1, f^1_1] = f^0_2.$
$\mathbf{L^7_{3|1}}$: crochet nul.

- $\dim L = (4|0)$: il y a seize super-algèbres de Lie non isomorphes deux-à-deux :

$\mathbf{L^1_{4|0}}$: crochet nul ;
$\mathbf{L^2_{4|0}}$: $[f^0_1, f^0_2] = f^0_3$;
$\mathbf{L^3_{4|0}}$: $[f^0_1, f^0_2] = f^0_1$;
$\mathbf{L^4_{4|0}}$: $[f^0_1, f^0_2] = f^0_2$, $[f^0_1, f^0_3] = f^0_2 + f^0_3$;
$\mathbf{L^5_{4|0}}$: $[f^0_1, f^0_2] = f^0_2$, $[f^0_1, f^0_3] = pf^0_3$, $0 < |p| \leq 1$;
$\mathbf{L^6_{4|0}}$: $[f^0_1, f^0_2] = f^0_1$, $[f^0_3, f^0_4] = f^0_3$;
$\mathbf{L^7_{4|0}}$: $[f^0_1, f^0_2] = f^0_3$, $[f^0_1, f^0_3] = -2f^0_1$, $[f^0_2, f^0_3] = 2f^0_2$;
$\mathbf{L^8_{4|0}}$: $[f^0_1, f^0_2] = f^0_3$, $[f^0_1, f^0_3] = f^0_4$;
$\mathbf{L^9_{4|0}}$: $[f^0_1, f^0_2] = f^0_2$, $[f^0_1, f^0_3] = f^0_3$, $[f^0_1, f^0_4] = pf^0_3$, $p \neq 0$;
$\mathbf{L^{10}_{4|0}}$: $[f^0_1, f^0_2] = f^0_3$, $[f^0_1, f^0_3] = f^0_4$, $[f^0_1, f^0_4] = pf^0_2 - qf^0_3 + f^0_4$, $(p,q) \in \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}$ ou bien $(p,q) = (0,0)$;
$\mathbf{L^{11}_{4|0}}$: $[f^0_1, f^0_2] = f^0_3$, $[f^0_1, f^0_3] = f^0_4$, $[f^0_1, f^0_4] = p(f^0_2 + f^0_3)$, $p \neq 0$;
$\mathbf{L^{12}_{4|0}}$: $[f^0_1, f^0_2] = f^0_3$, $[f^0_1, f^0_3] = f^0_4$, $[f^0_1, f^0_4] = f^0_2$;
$\mathbf{L^{13}_{4|0}}$: $[f^0_1, f^0_2] = \frac{1}{3}f^0_2 + f^0_3$, $[f^0_1, f^0_3] = \frac{1}{3}f^0_3$, $[f^0_1, f^0_4] = \frac{1}{3}f^0_4$;
$\mathbf{L^{14}_{4|0}}$: $[f^0_1, f^0_2] = f^0_2$, $[f^0_1, f^0_3] = f^0_3$, $[f^0_1, f^0_4] = 2f^0_4$, $[f^0_2, f^0_3] = f^0_4$;
$\mathbf{L^{15}_{4|0}}$: $[f^0_1, f^0_2] = f^0_3$, $[f^0_1, f^0_3] = f^0_2$, $[f^0_2, f^0_3] = f^0_4$;
$\mathbf{L^{16}_{4|0}}$: $[f^0_1, f^0_2] = f^0_3$, $[f^0_1, f^0_3] = -pf^0_2 + f^0_3$, $[f^0_1, f^0_4] = f^0_4$, $[f^0_2, f^0_3] = f^0_4$, $p \neq 0$.

4.3 Super-dérivations de super-algèbres associatives super-commutatives unitaires

Si A est une super-algèbre associative, la définition d'une super-dérivation de A a été donnée à la définition 2.3.3. Soit maintenant (A, L, ρ) une super-algèbre de Lie-Rinehart. Puisqu'une ancre $\rho : L \longrightarrow L$ correspond à une famille $\{\rho(x)\}_{x \in L}$ de super-dérivations de A, il semble naturel d'étudier et de décrire les espaces de super-dérivations pour toutes les super-algèbres associatives que l'on rencontre. Rappelons que dans ce cas, $\mathrm{Der}(A)$ possède une structure de super-algèbre de Lie, le crochet étant donné par le super-commutateur.

Pour chaque super-algèbre associative super-commutative unitaire listée précédemment, on donne la forme générale des super-dérivations D associées. On décrit D relativement à la base $\left\{e^0_1,\ e^0_2,\ ...,\ e^0_n,\ e^1_1,\ e^1_2,\ ...,\ e^1_p\right\}$ de la super-algèbre $\mathbf{A^k_{n|p}}$. On n'écrit que les valeurs non nulles. Tous les paramètres sont complexes et indépendants dans chaque colonne.

Super-algèbre	**Super-dérivations de degré** 0	**Super-dérivations de degré** 1
$\mathbf{A^1_{1\|0}}$	0	0
$\mathbf{A^1_{1\|1}}$	$D(e^1_1) = \lambda_1 e^1_1$	$D(e^1_1) = \lambda_1 e^0_1$
$\mathbf{A^1_{1\|2}}$	$D(e^1_1) = \lambda_1 e^1_1 + \lambda_2 e^1_2,\ D(e^1_2) = \lambda_3 e^1_1 + \lambda_4 e^1_2$	0
$\mathbf{A^1_{1\|3}}$	$D(e^1_1) = \lambda_1 e^1_1 + \lambda_2 e^1_2 + \lambda_3 e^1_3$ $D(e^1_2) = \lambda_4 e^1_1 + \lambda_5 e^1_2 + \lambda_6 e^1_3$	0

	$D(e_3^1)=\lambda_7e_1^1+\lambda_8e_2^1+\lambda_9e_3^1$	
$\mathbf{A^1_{2\vert 0}}$	$D(e_2^0)=\lambda_1e_2^0$	0
$\mathbf{A^2_{2\vert 0}}$	0	0
$\mathbf{A^1_{2\vert 1}}$	$D(e_2^0)=\lambda_1e_2^0,\ D(e_1^1)=\lambda_2e_1^1$	$D(e_2^0)=\lambda_1e_1^1,\ D(e_1^1)=\lambda_2e_2^0$
$\mathbf{A^2_{2\vert 1}}$	$D(e_1^1)=\lambda_1e_1^1$	$D(e_1^1)=\lambda_1e_2^0$
$\mathbf{A^1_{2\vert 2}}$	$D(e_1^1)=\lambda_1e_1^1,\ D(e_2^1)=\lambda_2e_2^1$	$D(e_1^1)=\lambda_1e_2^0,\ D(e_2^1)=\lambda_2(e_1^0-e_2^0)$
$\mathbf{A^2_{2\vert 2}}$	$D(e_1^1)=\lambda_1e_1^1+\lambda_2e_2^1,\ D(e_2^1)=\lambda_3e_1^1+\lambda_4e_2^1$	0
$\mathbf{A^3_{2\vert 2}}$	$D(e_2^0)=\lambda_1e_2^0,\ D(e_1^1)=\lambda_2e_1^1+\lambda_3e_2^1,$ $D(e_2^1)=(\lambda_1+\lambda_2)e_2^1$	$D(e_2^0)=\lambda_1e_2^1,\ D(e_1^1)=\lambda_2e_1^0+\lambda_3e_2^0,$ $D(e_2^1)=\lambda_2e_2^0$
$\mathbf{A^4_{2\vert 2}}$	$D(e_2^0)=\lambda_1e_2^0,\ D(e_1^1)=\lambda_2e_1^1+\lambda_3e_2^1,$ $D(e_2^1)=\lambda_4e_1^1+\lambda_5e_2^1$	$D(e_2^0)=\lambda_1e_1^1+\lambda_2e_2^1,\ D(e_1^1)=\lambda_3e_2^0$ $D(e_2^1)=\lambda_2e_2^0$
$\mathbf{A^5_{2\vert 2}}$	$D(e_2^0)=\lambda_1e_2^0,\ D(e_1^1)=\lambda_2e_1^1+\lambda_3e_2^1,$ $D(e_2^1)=\lambda_4e_1^1+(\lambda_1-\lambda_2)e_2^1$	$D(e_2^0)=\lambda_1e_1^1+\lambda_2e_2^1,\ D(e_1^1)=\lambda_2e_1^0+\lambda_3e_2^0$ $D(e_2^1)=-\lambda_1e_1^0+\lambda_4e_2^0$
$\mathbf{A^1_{3\vert 0}}$	0	0
$\mathbf{A^2_{3\vert 0}}$	$D(e_3^0)=\lambda_1e_3^0$	0
$\mathbf{A^3_{3\vert 0}}$	$D(e_3^0)=\lambda_1e_3^0$	0
$\mathbf{A^4_{3\vert 0}}$	$D(e_2^0)=\lambda_1e_2^0+\lambda_2e_3^0,\ D(e_3^0)=\lambda_3e_2^0+\lambda_4e_3^0$	0
$\mathbf{A^1_{3\vert 1}}$	$D(e_1^1)=\lambda_1e_1^1$	$D(e_1^1)=\lambda_1(e_1^0-e_2^0-e_3^0)$
$\mathbf{A^2_{3\vert 1}}$	$D(e_3^0)=\lambda_1e_3^0,\ D(e_1^1)=\lambda_2e_1^1$	$D(e_1^1)=\lambda_1(e_1^0-e_2^0)$
$\mathbf{A^3_{3\vert 1}}$	$D(e_3^0)=\lambda_1e_3^0,\ D(e_1^1)=\lambda_2e_1^1$	$D(e_3^0)=\lambda_1e_1^1,\ D(e_1^1)=\lambda_2e_3^0$
$\mathbf{A^4_{3\vert 1}}$	$D(e_2^0)=\lambda_1e_2^0+\lambda_2e_3^0,\ D(e_3^0)=2\lambda_1e_3^0,$ $D(e_1^1)=\lambda_3e_1^1$	$D(e_2^0)=\lambda_1e_1^1,\ D(e_1^1)=\lambda_2e_3^0$
$\mathbf{A^5_{3\vert 1}}$	$D(e_2^0)=\lambda_1e_2^0+\lambda_2e_3^0,\ D(e_3^0)=\lambda_3e_2^0+\lambda_4e_3^0$ $D(e_1^1)=\lambda_5e_1^1$	$D(e_2^0)=\lambda_1e_1^1,\ D(e_3^0)=\lambda_2e_1^1,$ $D(e_1^1)=\lambda_3e_2^0+\lambda_4e_3^0$
$\mathbf{A^1_{4\vert 0}}$	0	0
$\mathbf{A^2_{4\vert 0}}$	$D(e_4^0)=\lambda_1e_4^0$	0
$\mathbf{A^3_{4\vert 0}}$	$D(e_3^0)=\lambda_1e_3^0,\ D(e_4^0)=\lambda_2e_4^0$	0
$\mathbf{A^4_{4\vert 0}}$	$D(e_3^0)=\lambda_1e_3^0+\lambda_2e_4^0,\ D(e_4^0)=2\lambda_1e_4^0$	0
$\mathbf{A^5_{4\vert 0}}$	$D(e_2^0)=\lambda_1e_2^0+\lambda_2e_3^0+\lambda_3e_4^0,\ D(e_4^0)=3\lambda_1e_4^0,$ $D(e_3^0)=2\lambda_1e_3^0+2\lambda_2e_4^0$	0
$\mathbf{A^6_{4\vert 0}}$	$D(e_3^0)=\lambda_1e_3^0+\lambda_2e_4^0,\ D(e_4^0)=\lambda_3e_3^0+\lambda_4e_4^0$	0
$\mathbf{A^7_{4\vert 0}}$	$D(e_2^0)=\lambda_1e_2^0+\lambda_2e_4^0,\ D(e_4^0)=\lambda_3e_3^0+\lambda_24e_4^0$	0
$\mathbf{A^8_{4\vert 0}}$	$D(e_2^0)=\lambda_1e_2^0+\lambda_2e_3^0+\lambda_3e_4^0,\ D(e_3^0)=2\lambda_1e_3^0$ $D(e_4^0)=\lambda_4e_3^0+\lambda_5e_4^0$	0
$\mathbf{A^9_{4\vert 0}}$	$D(e_2^0)=\lambda_1e_2^0+\lambda_2e_3^0+\lambda_3e_4^0$ $D(e_3^0)=\lambda_4e_2^0+\lambda_5e_3^0+\lambda_6e_4^0$	0

	$D(e_4^0) = \lambda_7 e_2^0 + \lambda_8 e_3^0 + \lambda_9 e_4^0$	

4.4 Classification des super-algèbres de Lie-Rinehart

Dans cette section, on présente une classification des super-algèbres de Lie-Rinehart en petites dimensions qui se base sur les résultats généraux ci-dessous ainsi que le logiciel de calcul formel Mathematica. On n'écrit que les relations non triviales et non nulles. Si (A, L, ρ) est une super-algèbre de Lie-Rinehart, on note sa dimension par un quadruplet $(n|p, m|q)$, avec $n = \dim A_0$, $p = \dim A_1$, $m = \dim L_0$, $q = \dim L_1$. On dit qu'une action est *triviale* si $e_i^s \cdot f_j^t = f_j^t$ pour $i = 1, s = 0$, et 0 sinon.

4.4.1 Résultats généraux

Grâce aux propriétés des degrés et avec des calculs basiques, on obtient les résultats généraux suivants.

Proposition 4.4.1. *Si A est une super-algèbre associative super-commutative unitaire et L une super-algèbre de Lie, alors on peut toujours équiper le couple (A, L) d'une structure de super-algèbre de Lie-Rinehart en prenant l'action triviale et l'ancre nulle.*

Preuve. Si $\rho(x)(a) = 0 \ \forall x \in L, \ \forall a \in A$, il est clair que $\rho : L \longrightarrow \mathrm{Der}(A)$ est un morphisme A-linéaire de super-algèbres de Lie et que $\rho(x)$ est une super-dérivation. Pour tout $y \in L$, la condition de compatibilité devient

$$[x, ay] = (-1)^{|a||x|} a[x, y],$$

qui est toujours vérifiée, puisque l'action est triviale. □

Proposition 4.4.2. *Soit (A, L, ρ) une super-algèbre de Lie-Rinehart.*
Si $\dim(A, L) \in \Big\{(n|p, 0|0),\ (1|0, m|q),\ (1|p, 0|q)\Big\}$, la seule structure de super-algèbre de Lie-Rinehart possible est celle donnée par l'action triviale et l'ancre nulle.

Preuve.

1. cas $(n|p, 0|0)$: immédiat ;
2. cas $(1|0, m|q)$: si e_1^0 est l'unité de A, alors $e_1^0 \cdot x = x \ \forall x \in L$ et $\rho(x)(e_1^0) = 0 \ \forall x \in L$;
3. cas $(1|p, 0|q)$: $L_0 = \{0\}$, donc l'action est triviale. Soit $1 \leq k \leq q$ et $1 \leq l \leq p$. on a

   $$\rho(f_k^1)(e_l^1) = r_{(k,1)(l,1)}^1 e_1^0, \ r_{(k,1)(l,1)}^1 \in \mathbb{C}\,.$$

   En utilisant la A-linéarité de l'ancre, on obtient

   $$0 = \rho(e_l^1 \cdot f_k^1)(e_l^1) = e_l^1 \rho(f_k^1)(e_l^1) = e_1^1 \cdot r_{(k,1)(l,1)}^1 e_1^0 = r_{(k,1)(l,1)}^1 e_l^1.$$

   Ainsi, $r_{(k,1)(l,1)}^1 = 0$ et l'ancre s'annule.

□

Il y a quelques cas exceptionnels, trouvés par calcul formel sur ordinateur, pour lesquels la seule structure compatible est donnée par l'action triviale et l'ancre nulle.

Proposition 4.4.3. *Pour les super-algèbres de Lie-Rinehart suivantes, la seule structure possible est donnée par l'action triviale et l'ancre nulle.*

$$\left(\mathbf{A^1_{1|1}}, \mathbf{L^{12}_{2|2}}\right); \ \left(\mathbf{A^1_{1|1}}, \mathbf{L^{6}_{3|0}}\right); \ \left(\mathbf{A^1_{2|0}}, \mathbf{L^{1}_{1|1}}\right); \ \left(\mathbf{A^1_{2|0}}, \mathbf{L^{2}_{1|2}}\right); \ \left(\mathbf{A^1_{2|0}}, \mathbf{L^{7}_{1|3}}\right).$$

On remarque que toutes les super-algèbres associatives super-commutatives unitaires de la liste ci-dessus ont une multiplication triviale, *i.e.* tous les produits sont nuls, exception faite de ceux impliquant l'unité. On peut émettre la conjecture que si l'unique structure de super-algèbre de Lie-Rinehart possible pour un couple (A, L) est donnée par l'action triviale et l'ancre nulle, alors A doit avoir une multiplication triviale. Ce résultat reste à démontrer.

Proposition 4.4.4.
- *Si* $\dim(A, L) = (0|p, m|0)$*, l'action est nulle ;*
- *Si* $\dim(A, L) = (n|0, 0|q)$*, l'ancre est nulle ;*
- *Si* $\dim(A, L) = (n|p, m|0)$ *ou* $(A, L) = (n|p, 0|q)$*, les éléments de* A_1 *agissent par* 0 *;*
- *Si* $\dim(A, L) = (n|0, m|q)$*, les éléments de* L_1 *agissent (via l'ancre) par* 0.

Proposition 4.4.5. *Soit* (A, L, ρ) *une super-algèbre de Lie-Rinehart, avec* $\dim(A) \leq 2$ *et* L *abélienne. Alors soit l'action est triviale, soit l'ancre est nulle.*

Preuve. Puisque L est abélienne, la condition de compatibilité devient $\rho(x)(a) \cdot y = 0, \ \ \forall x, y \in L, \ \forall a \in A$.

- $A = \mathbf{A^1_{(1|0)}}$. On a déjà vu que la seule structure possible est donnée par l'action triviale et l'ancre nulle.
- $A = \mathbf{A^1_{(1|1)}}$. Si $a = e^0_1$, alors $\rho(x)(e^0_1) = 0$, donc la condition de compatibilité est satisfaite. Si $a = e^1_1$, on a deux cas, selon de degré de x.
  $|x| = 0$: il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\rho(x)(e^1_1) = \lambda e^1_1$. Pour $y \in L$, on obtient $\lambda e^1_1 \cdot y = 0$. On a alors la dichotomie suivante : ou bien $\lambda = 0$, ce qui signifie que l'ancre est nulle, ou bien $e^1_1 \cdot y = 0$, ce qui signifie que l'action est triviale.
  $|x| = 1$: il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\rho(x)(e^1_1) = \lambda e^0_1$. Pour $y \in L$, on obtient $\lambda e^0_1 \cdot y = 0$, donc $\lambda = 0$ et l'ancre est nulle.
- $A = \mathbf{A^1_{(2|0)}}$. On a $\rho(x)(e^0_1) = 0$ pour tout $x \in L$. Soit $a = e^0_2$. On a également deux cas, selon le degré de x :
  $|x| = 0$: il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tel que $\rho(x)(e^0_2) = \lambda e^0_1 + \mu e^0_2$. On a alors $0 = \rho(x)(e^0_2) \cdot y = \lambda y + \mu e^0_2 \cdot y$. Si $\mu = 0$, on obtient $\lambda y = 0$, donc $\lambda = 0$ et l'ancre est nulle. Si $\mu \neq 0$, on a $e^0_2 \cdot y = -\frac{\lambda}{\mu} y$.
  La A-linéarité de l'ancre donne $\rho(e^0_2 \cdot x)(e^0_2) = e^0_2 \rho(x)(e^0_2)$, donc $-\frac{\lambda^2}{\mu} e^0_1 - \lambda e^0_2 = \lambda e^0_2$. On conclut que $\lambda = 0$ et donc l'action est triviale.
  $|x| = 1$: $\rho(x)(e^0_2) \in \left(\mathbf{A^1_{(2|0)}}\right)_1 = \{0\}$, donc l'ancre est nulle.
- $A = \mathbf{A^2_{(2|0)}}$. L'espace des super-dérivations est réduit à $\{0\}$, donc toutes les ancres sont nulles.

□

Dans la suite, on dresse la liste des super-algèbres de Lie-Rinehart qui ne sont pas déjà classifiées par les résultats précédents. Elles sont rangées par dimension totale $(n + p|m + q)$, puis par ordre lexicographique du quadruplet $(n|p, m|q)$ au sein de chaque classe de dimension. Pour chaque quadruplet, un tableau donne toutes les super-algèbres possibles, avec tous les couples action / ancre compatibles. Chaque ligne d'un tableau présente une super-algèbre de Lie-Rinehart différente. On présente ici tous les tableaux avec $\dim(A) \leq 2$ et $\dim(L) \leq 4$.

4.4.2 Dimension $(2|1)$

Type (1|1, 1|0) :
La seule super-algèbre de Lie-Rinehart possible est donnée par l'action triviale et l'ancre $\rho(f_1^0)(e_1^1) = \lambda e_1^1$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Type (2|0, 0|1) :
Le seul couple remarquable est $\left(\mathbf{A^2_{2|0}}, \mathbf{L^1_{0|1}}\right)$, équipé de l'action $e_2^0 \cdot f_1^1 = f_1^1$ et de l'ancre nulle.

Type (2|0, 1|0) : $(\lambda \in \mathbb{C})$

A	**L**	**Action**	**Ancre**
$A^1_{2\|0}$	$L_{1\|0}$	triviale	$\rho(f_1^0)(e_2^0) = \lambda e_2^0$
$A^2_{2\|0}$	$L_{1\|0}$	$e_2^0 \cdot f_1^0 = f_1^0$	nulle

4.4.3 Dimension $(2|2)$

Type (1|1, 1|1) : $(\lambda \in \mathbb{C})$

A	**L**	**Action**	**Ancre**
$A^1_{1\|1}$	$L^1_{1\|1}$	$e_1^1 \cdot f_1^1 = \lambda f_1^0$	nulle
	$L^2_{1\|1}$	triviale	$\rho(f_1^0)(e_1^1) = \lambda e_1^1$
		$e_1^1 \cdot f_1^1 = \lambda f_1^0$	$\rho(f_1^0)(e_1^1) = -e_1^1,\ \rho(f_1^1)(e_1^1) = -\lambda e_1^0$
		$e_1^1 \cdot f_1^0 = \lambda f_1^1$	$\rho(f_1^0)(e_1^1) = e_1^1$
	$L^3_{1\|1}$	triviale	$\rho(f_1^0)(e_1^1) = \lambda e_1^1$
		$e_1^1 \cdot f_1^0 = \lambda f_1^1$	nulle

Type (1|1, 2|0) : $(\lambda, \mu \in \mathbb{C})$

A	**L**	**Action**	**Ancre**
$A^1_{1\|1}$	$L^1_{2\|0}$	triviale	$\rho(f_1^0)(e_1^1) = \lambda e_1^1,\ \rho(f_2^0)(e_1^1) = \mu e_1^1$
	$L^2_{2\|0}$	triviale	$\rho(f_1^0)(e_1^1) = \lambda e_1^1$

Type (2|0, 0|2) :

Ici, $L = \mathbf{L^1_{0|2}}$ et l'ancre est toujours nulle. On liste les actions compatibles possibles pour chaque super-algèbre associative super-commutative de dimension $(2|0)$:

- $A = A^1_{2|0}$:
  1. $e^0_2 \cdot f^1_2 = \lambda f^1_1, \ \lambda \in \mathbb{C}$;
  2. $e^0_2 \cdot f^1_1 = \lambda f^1_1 + \mu f^1_2$, $e^0_2 \cdot f^1_2 = -\frac{\lambda^2}{\mu} f^1_1 - \mu f^1_2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times$.
- $A = A^2_{2|0}$:
  1. $e^0_2 \cdot f^1_2 = \lambda f^1_1 + f^1_2, \ \lambda \in \mathbb{C}$;
  2. $e^0_2 \cdot f^1_1 = f^1_1$, $e^0_2 \cdot f^1_2 = \lambda f^1_1$, $\lambda \in \mathbb{C}$;
  3. $e^0_2 \cdot f^1_2 = f^1_2$;
  4. $e^0_2 \cdot f^1_1 = f^1_1$, $e^0_2 \cdot f^1_2 = f^1_2$;
  5. $e^0_2 \cdot f^1_1 = \lambda f^1_1 + \mu f^1_2$, $e^0_2 \cdot f^1_2 = \frac{\lambda - \lambda^2}{\mu} f^1_1 - (1-\mu) f^1_2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times$.

Type (2|0, 1|1) : $(\lambda \in \mathbb{C})$

A	**L**	**Action**	**Ancre**
$A^1_{2\|0}$	$L^2_{1\|1}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^0_2) = \lambda e^0_2$
	$L^3_{1\|1}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^0_2) = \lambda e^0_2$
$A^2_{2\|0}$	$L^1_{1\|1}$ & $L^2_{1\|1}$	$e^0_2 \cdot f^0_1 = f^0_1, \ e^0_2 \cdot f^1_1 = f^1_1$	nulle
	$L^3_{1\|1}$	$e^0_2 \cdot f^1_1 = f^1_1$	nulle
		$e^0_2 \cdot f^0_1 = f^0_1$	
		$e^0_2 \cdot f^0_1 = f^0_1, \ e^0_2 \cdot f^1_1 = f^1_1$	

Type (2|0, 2|0) : $(\lambda \in \mathbb{C})$

A	**L**	**Action**	**Ancre**
$A^1_{2\|0}$	$L^1_{2\|0}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^0_2) = \lambda e^0_2, \ \rho(f^0_2)(e^0_2) = \mu e^0_2$
		$e^0_2 \cdot f^0_2 = \lambda f^0_1$	nulle
		$e^0_2 \cdot f^0_1 = \lambda f^0_1 + \mu f^0_2, \ e^0_2 \cdot f^0_2 = -\frac{\lambda^2}{\mu} f^0_1 - \lambda f^0_2, \ \mu \neq 0$	nulle
	$L^2_{2\|0}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^0_2) = \lambda e^0_2$
		$e^0_2 \cdot f^0_1 = \lambda f^0_2$	$\rho(f^0_1)(e^0_2) = e^0_2$
$A^2_{2\|0}$	$L^1_{2\|0}$	$e^0_2 \cdot f^0_1 = f^0_1, \ e^0_2 \cdot f^0_2 = f^0_2$	nulle
		$e^0_2 \cdot f^0_2 = \lambda f^0_1$	
		$e^0_2 \cdot f^0_2 = \lambda f^0_2$	
		$e^0_2 \cdot f^0_2 = \lambda f^0_1 + f^0_2$	
		$e^0_2 \cdot f^0_1 = \lambda f^0_1 + \mu f^0_2, \ \mu \neq 0$ $e^0_2 \cdot f^0_2 = -\frac{(\lambda-1)\lambda}{\mu} f^0_1 + (1-\lambda) f^0_2,$	
	$L^2_{2\|0}$	$e^0_2 \cdot f^0_1 = f^0_1, \ e^0_2 \cdot f^0_2 = f^0_2$	nulle

Remarque. On voit que pour $A = A^2_{2|0}$, toutes les ancre sont nulles. C'est une conséquence immédiate du fait que l'espace des super-dérivations de $A^2_{2|0}$ est $\{0\}$.

4.4.4 Dimension $(2|3)$

Type (1|1, 1|2) : $(\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{C})$

A	**L**	**Action**	**Ancre**
$A^1_{1\|1}$	$L^1_{1\|2}$	triviale	$\rho(f_1^0)(e_1^1) = \lambda e_1^1$
		$e_1^1 \cdot f_1^0 = \mu f_1^1$	$\rho(f_1^0)(e_1^1) = e_1^1$
		$e_1^1 \cdot f_1^0 = \mu f_2^1$	$\rho(f_1^0)(e_1^1) = pe_1^1$
	$L^2_{1\|2}$	triviale	$\rho(f_1^0)(e_1^1) = \lambda e_1^1$
		$e_1^1 \cdot f_1^0 = \mu f_1^1$	nulle
	$L^3_{1\|2}$	triviale	$\rho(f_1^0)(e_1^1) = \lambda e_1^1$
		$e_1^1 \cdot f_1^0 = \mu f_1^1$	$\rho(f_1^0)(e_1^1) = e_1^1$
	$L^4_{1\|2}$	triviale	$\rho(f_1^0)(e_1^1) = \lambda e_1^1$
		$e_1^1 \cdot f_1^0 = \mu(f_1^1 - if_2^1)$	$\rho(f_1^0)(e_1^1) = (p-i)e_1^1$
		$e_1^1 \cdot f_1^0 = \mu(f_1^1 + if_2^1)$	$\rho(f_1^0)(e_1^1) = (p+i)e_1^1$
	$L^5_{1\|2}$	$e_1^1 \cdot f_1^1 = \mu f_1^0,\ e_1^1 f_2^1 = \gamma f_1^0$	nulle
	$L^6_{1\|2}$	triviale	$\rho(f_1^1)(e_1^1) = \lambda e_1^0$
		$e_1^1 \cdot f_1^1 = \lambda f_1^0,\ e_1^1 \cdot f_2^1 = \mu f_1^0$	nulle
		$e_1^1 \cdot f_1^0 = \lambda f_1^1 + \mu f_2^1$	nulle

Type (1|1, 2|1) : $(\lambda, \mu \in \mathbb{C})$

A	**L**	**Action**	**Ancre**
$A^1_{1\|1}$	$L^1_{2\|1}$	triviale	$\rho(f_1^0)(e_1^1) = \lambda e_1^1$
		$e_1^1 \cdot f_1^1 = \lambda f_1^0 + \mu f_2^0$	nulle
	$L^2_{2\|1}$	triviale	$\rho(f_1^0)(e_1^1) = \lambda e_1^1,\ \rho(f_2^0)(e_1^1) = \mu e_1^1$
		$e_1^1 \cdot f_1^0 = \lambda f_1^1,\ e_1^1 \cdot f_2^0 = \mu f_1^1$	$\rho(f_1^0)(e_1^1) = e_1^1,\ \rho(f_2^0)(e_1^1) = -e_1^1$
	$L^3_{2\|1}$	triviale	$\rho(f_1^0)(e_1^1) = \lambda e_1^1$
	$L^4_{2\|1}$	triviale	$\rho(f_1^0)(e_1^1) = \lambda e_1^1$
		$e_1^1 \cdot f_1^0 = \mu f_1^1$	$\rho(f_1^0)(e_1^1) = pe_1^1$
	$L^5_{2\|1}$	triviale	$\rho(f_1^0)(e_1^1) = \lambda e_1^1$
		$e_1^1 \cdot f_1^0 = \mu f_1^1$	nulle
		$e_1^1 \cdot f_1^1 = \mu f_2^0$	$\rho(f_1^0)(e_1^1) = e_1^1$
	$L^6_{2\|1}$	triviale	$\rho(f_1^0)(e_1^1) = \lambda e_1^1,\ \rho(f_2^0)(e_1^1) = \mu e_1^1$
		$e_1^1 \cdot f_1^1 = \lambda f_1^0 + \mu f_2^0$	nulle
		$e_1^1 \cdot f_1^0 = \lambda f_1^1,\ e_1^1 \cdot f_2^0 = \mu f_1^1$	nulle

Type (1|1, 3|0) : $(\lambda, \mu \in \mathbb{C})$

A	**L**	**Action**	**Ancre**
$A^1_{1\|1}$	$L^1_{3\|0}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1,\ \rho(f^0_2)(e^1_1) = \mu e^1_1$ $\rho(f^0_3)(e^1_1) = \gamma e^1_1$
	$L^2_{3\|0}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1,\ \rho(f^0_2)(e^1_1) = \mu e^1_1$
	$L^3_{3\|0}$	triviale	$\rho(f^0_2)(e^1_1) = \lambda e^1_1,\ \rho(f^0_3)(e^1_1) = \mu e^1_1$
	$L^4_{3\|0}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1$
	$L^5_{3\|0}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1$

Type (2|0, 0|3) : On sait déjà que l'ancre est nulle. Il y a trop d'actions compatibles pour les lister ici (90 juste pour le couple $\left(\mathbf{A^2_{2|0}}, \mathbf{L^1_{0|3}}\right)$, par exemple).

Type (2|0, 1|2) : $(\lambda, \mu \in \mathbb{C})$

A	**L**	**Action**	**Ancre**
$A^1_{2\|0}$	$L^1_{1\|2}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^0_2) = \lambda e^0_2$
	$L^2_{1\|2}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^0_2) = \lambda e^0_2$
		$e^0_2 \cdot f^1_2 = \lambda f^1_1$	nulle
	$L^3_{1\|2}$ & $L^4_{1\|2}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^0_2) = \lambda e^0_2$
	$L^6_{1\|2}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^0_2) = \lambda e^0_2$
		$e^0_2 \cdot f^1_2 = \lambda f^1_1$	nulle
		$e^0_2 \cdot f^1_1 = -\lambda f^1_1 + \mu f^1_2,\ \mu \neq 0$ $e^0_2 \cdot f^1_2 = -\frac{\lambda^2}{\mu} f^1_1 + \mu f^1_2$	nulle
$A^2_{2\|0}$	$L^k_{1\|2}$ $1 \leq k \leq 5$	$e^0_2 \cdot f^0_1 = f^0_1,\ e^0_2 \cdot f^1_1 = f^1_1,$ $e^0_2 \cdot f^1_2 = f^1_2$	nulle
	$L^6_{1\|2}$	$e^0_2 \cdot f^1_1 = (1-\lambda) f^1_1 + \mu f^1_2,\ \mu \neq 0$ $e^0_2 \cdot f^1_2 = \frac{\lambda(\lambda-1)}{\mu} f^1_1 + \mu f^1_2$	nulle
		$e^0_2 \cdot f^1_2 = \lambda f^1_1 + f^1_2$	
		$e^0_2 \cdot f^1_1 = f^1_1,\ e^0_2 \cdot f^1_2 = \lambda f^1_1$	
		$e^0_2 \cdot f^0_1 = f^0_1,\ e^0_2 \cdot f^1_2 = f^1_2$	
		$e^0_2 \cdot f^1_1 = f^1_1,\ e^0_2 \cdot f^1_2 = \lambda f^1_1$	
		$e^0_2 \cdot f^0_1 = f^0_1,\ e^0_2 \cdot f^1_1 = f^1_1,$ $e^0_2 \cdot f^1_2 = f^1_2$	

Type (2|0,2|1) : $(\lambda, \mu \in \mathbb{C})$

A	**L**	**Action**	**Ancre**
$A^1_{2\|0}$	$L^1_{2\|1}$	triviale	$\rho(f_1^0)(e_2^0) = \lambda e_2^0$
		$e_2^0 \cdot f_1^0 = \lambda f_2^0$	nulle
	$L^2_{2\|1}$	triviale	$\rho(f_1^0)(e_2^0) = \lambda e_2^0,\ \rho(f_2^0)(e_2^0) = \lambda e_2^0$
		$e_2^0 \cdot f_1^0 = \lambda(f_1^0 - f_2^0),\ e_2^0 \cdot f_2^0 = \lambda(f_1^0 + f_2^0)$	nulle
	$L^k_{2\|1}$	triviale	$\rho(f_1^0)(e_2^0) = \lambda e_2^0$
	$3 \leq k \leq 5$	$e_2^0 \cdot f_1^0 = \lambda f_2^0$	$\rho(f_1^0)(e_2^0) = e_2^0$
	$L^6_{2\|1}$	triviale	$\rho(f_1^0)(e_2^0) = \lambda e_2^0,\ \rho(f_2^0)(e_2^0) = \lambda e_2^0$
		$e_2^0 \cdot f_1^0 = \lambda f_2^0$	nulle
		$e_2^0 \cdot f_1^0 = -\lambda f_1^0 + \mu f_2^0,\ \mu \neq 0$ $e_2^0 \cdot f_2^0 = -\frac{\lambda^2}{\mu} f_1^0 + \lambda f_2^0$	nulle
$A^2_{2\|0}$	$L^1_{2\|1}$	$e_2^0 \cdot f_1^0 = f_1^0 + \lambda f_2^0$	nulle
		$e_2^0 \cdot f_1^0 = \lambda f_2^0$	
		$e_2^0 \cdot f_2^0 = f_2^0,\ e_2^0 \cdot f_1^1 = f_1^1$	
		$e_2^0 \cdot f_1^0 = f_1^0,\ e_2^0 \cdot f_2^0 = f_2^0,\ e_2^0 \cdot f_1^1 = f_1^1$	
	$L^2_{2\|1}$	$e_2^0 \cdot f_1^0 = (1-\lambda)(f_1^0 + f_2^0)$ $e_2^0 \cdot f_2^0 = \lambda(f_1^0 + f_2^0)$	nulle
		$e_2^0 \cdot f_1^0 = f_1^0 + f_2^0$	
		$e_2^0 \cdot f_1^0 = (1-\lambda) f_1^0 - \lambda f_2^0,$ $e_2^0 \cdot f_2^0 = -(1-\lambda) f_1^0 + \lambda f_2^0$	
		$e_2^0 \cdot f_1^0 = f_1^0,\ e_2^0 \cdot f_2^0 = \pm f_2^0,\ e_2^0 \cdot f_1^1 = f_1^1$	
	$L^3_{2\|1}$ & $L^4_{2\|1}$	$e_2^0 \cdot f_1^0 = f_1^0,\ e_2^0 \cdot f_2^0 = f_2^0,\ e_2^0 \cdot f_1^1 = f_1^1$	nulle
	$L^5_{2\|1}$	$e_2^0 \cdot f_1^1 = f_1^1$	nulle
		$e_2^0 \cdot f_1^0 = f_1^0,\ e_2^0 \cdot f_2^0 = f_2^0$	
		$e_2^0 \cdot f_1^0 = f_1^0,\ e_2^0 \cdot f_2^0 = f_2^0,\ e_2^0 \cdot f_1^1 = f_1^1$	
	$L^6_{2\|1}$	$e_2^0 \cdot f_1^0 = (1-\lambda) f_1^0 + \mu f_2^0,\ \mu \neq 0$ $e_2^0 \cdot f_2^0 = \frac{\lambda(\lambda-1)}{\mu} f_1^0 + \lambda f_2^0$	nulle
		$e_2^0 \cdot f_1^0 = f_1^0 + \lambda f_2^0$	
		$e_2^0 \cdot f_1^0 = f_1^0 + \lambda f_2^0,\ e_2^0 \cdot f_1^1 = f_1^1$	
		$e_2^0 \cdot f_1^0 = f_1^0 + \lambda f_2^0$	
		$e_2^0 \cdot f_2^0 = \lambda f_1^0 + f_2^0,\ e_2^0 \cdot f_1^1 = f_1^1$	
		$e_2^0 \cdot f_2^0 = \lambda f_1^0$	
		$e_2^0 \cdot f_1^1 = f_1^1$	
		$e_2^0 \cdot f_1^0 = f_1^0,\ e_2^0 \cdot f_2^0 = f_2^0,\ e_2^0 \cdot f_1^1 = f_1^1$	

Type (2|0, 3|0) : aucun résultat pertinent à mentionner ici.

4.4.5 Dimension (2|4)

Type (1|1, 1|3) : $(\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{C})$

A	**L**	**Action**	**Ancre**
$A^1_{1\|1}$	$L^1_{1\|3}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \mu f^1_1$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \mu f^1_2$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = pe^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \mu f^1_3$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = qe^1_1$
	$L^2_{1\|3}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \mu f^1_2$	nulle
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \mu f^1_1$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = e^1_1$
	$L^3_{1\|3}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \mu f^1_1$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = pe^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \mu f^1_2$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = e^1_1$
	$L^4_{1\|3}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \mu f^1_1$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = pe^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \gamma(f^1_2 - i f^1_3)$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = (q-i)e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \gamma(f^1_2 + i f^1_3)$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = (q+i)e^1_1$
	$L^5_{1\|3}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \mu f^1_1$	nulle
	$L^6_{1\|3}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \mu f^1_1$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = e^1_1$
	$L^7_{1\|3}$	$e^1_1 \cdot f^1_1 = \mu f^0_1,\ e^1_1 \cdot f^1_2 = \gamma f^0_1,\ e^1_1 \cdot f^1_3 = \lambda f^0_1$	nulle
	$L^8_{1\|3}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^1_1 = \lambda f^0_1,\ e^1_1 \cdot f^1_2 = \mu f^0_1$ $e^1_1 \cdot f^1_1 = \gamma f^0_1$	nulle
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \lambda f^1_1 + \mu f^1_2 + \gamma f^1_3$	nulle

Type (1|1,2|2) : $(\lambda, \mu, \gamma, \theta \in \mathbb{C})$

A	L	Action	Ancre
$A^1_{1\|1}$	$L^1_{2\|2}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1,\ \rho(f^0_2)(e^1_1) = \mu e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \lambda f^1_1,\ e^1_1 \cdot f^0_2 = \mu f^1_1$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = e^1_1$
	$L^2_{2\|2}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1,\ \rho(f^0_2)(e^1_1) = \mu e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \lambda(-if^1_1 + f^1_2)$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = e^1_1,\ \rho(f^0_2)(e^1_1) = ie^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \lambda(if^1_1 + f^1_2),\ e^1_1 \cdot f^0_2 = \mu(if^1_1 + f^1_2)$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = e^1_1,\ \rho(f^0_2)(e^1_1) = -ie^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \lambda(f^1_1 - if^1_2),\ e^1_1 \cdot f^0_2 = \mu(f^1_1 - if^1_2)$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = e^1_1,\ \rho(f^0_2)(e^1_1) = -ie^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \lambda(f^1_1 + if^1_2),\ e^1_1 \cdot f^0_2 = \mu(f^1_1 + if^1_2)$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = e^1_1,\ \rho(f^0_2)(e^1_1) = ie^1_1$
	$L^3_{2\|2}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \lambda f^1_2$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = qe^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \lambda f^1_1$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = pe^1_1$
	$L^4_{2\|2}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \lambda f^1_1$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = pe^1_1$
	$L^5_{2\|2}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \lambda(f^1_1 - if^1_2)$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = (p - iq)e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \lambda(f^1_1 + if^1_2)$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = (p + iq)e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \lambda(if^1_1 + f^1_2)$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = (p - iq)e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \lambda(-if^1_1 + f^1_2)$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = (p + iq)e^1_1$
	$L^6_{2\|2}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \lambda f^1_2,\ e^1_1 \cdot f^0_2 = -\lambda f^1_1$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = pe^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \lambda f^1_1$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = (1 + p)e^1_1$
	$L^7_{2\|2}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \lambda(f^1_1 - if^1_2),\ e^1_1 \cdot f^1_1 = 2\lambda f^0_2$ $e^1_1 \cdot f^1_2 = \pm 2i\lambda f^0_2$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \frac{1}{2}e^1_1$
	$L^8_{2\|2}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \mu f^1_2$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \frac{1}{2}e^1_1$
	$L^9_{2\|2}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \lambda f^1_2,\ e^1_1 \cdot f^1_1 = \frac{1}{p}f^0_2$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = (1 - p)e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = (1 - p)\lambda f^1_1,\ e^1_1 \cdot f^1_2 = \lambda f^0_2$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = pe^1_1$
	$L^{10}_{2\|2}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \mu f^1_1$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \frac{1}{2}e^1_1$
	$L^{11}_{2\|2}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \lambda(-if^1_1 + f^1_2),\ e^1_1 \cdot f^1_1 = \frac{2\lambda}{i+2p}f^0_2$ $e^1_1 \cdot f^1_2 = \frac{2i\lambda}{i+2p}f^0_2$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \frac{1+2ip}{2}e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^1_1 = \frac{2\lambda}{2p-i}f^0_2,\ e^1_1 \cdot f^0_1 = \lambda(if^1_1 + f^1_2)$ $e^1_1 \cdot f^1_2 = \frac{2i\lambda}{2p-i}f^0_2$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = -\frac{2ip-1}{2}e^1_1$

$A^1_{1\|1}$	$L^{13}_{2\|2}$	$e^1_1 \cdot f^1_1 = \lambda f^0_1 + \mu f^0_2,\ e^1_1 \cdot f^1_2 = \gamma f^0_1 + \theta f^0_2$	nulle
	$L^{14}_{2\|2}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^1_2 = \lambda f^0_2$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \lambda f^1_2$ $e^1_1 \cdot f^1_1 = \lambda f^0_2$	nulle
	$L^{15}_{2\|2}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_2 = \lambda f^1_2$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^1_2 = \lambda f^0_2$	nulle
	$L^{16}_{2\|2}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \lambda f^1_2,\ e^1_1 \cdot f^0_2 = \mu f^1_2$ $e^1_1 \cdot f^1_1 = \lambda f^0_2 - \mu f^0_1$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = -e^1_1,\ \rho(f^1_1)(e^1_1) = \mu e^0_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \lambda f^1_1,\ e^1_1 \cdot f^0_2 = \mu f^1_1$ $e^1_1 \cdot f^1_1 = \mu f^0_1 - \lambda f^0_2$	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = e^1_1,\ \rho(f^1_1)(e^1_1) = \mu e^0_1$
	$L^{17}_{2\|2}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_1 = \lambda f^1_1,\ e^1_1 \cdot f^0_2 = \mu f^1_1$ $e^1_1 \cdot f^1_2 = \mu f^0_1 - \lambda f^0_2$	nulle
	$L^{18}_{2\|2}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1,\ \rho(f^0_2)(e^1_1) = \mu e^1_1$
		trop d'actions compatibles pour être listées	nulle

Type (1|1, 3|1) : $(\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{C})$

A	**L**	**Action**	**Ancre**
$A^1_{1\|1}$	$L^1_{3\|1}$	triviale	$\rho(f^0_2)(e^1_1) = \lambda e^1_1,\ \rho(f^0_3)(e^1_1) = \mu e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_2 = \lambda f^1_1$ $e^1_1 \cdot f^0_3 = \mu f^1_1$	$\rho(f^0_2)(e^1_1) = e^1_1$
	$L^2_{3\|1}$	triviale	$\rho(f^0_3)(e^1_1) = \mu e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_3 = \lambda f^1_1$	$\rho(f^0_3)(e^1_1) = q e^1_1$
	$L^3_{3\|1}$	triviale	$\rho(f^0_3)(e^1_1) = \mu e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^0_3 = \lambda f^1_1$	$\rho(f^0_3)(e^1_1) = q e^1_1$
	$L^4_{3\|1}$	triviale	$\rho(f^0_2)(e^1_1) = \lambda e^1_1,\ \rho(f^0_3)(e^1_1) = \mu e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^1_1 = \lambda f^0_1$	nulle
	$L^5_{3\|1}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \mu e^1_1$
	$L^6_{3\|1}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \mu e^1_1$
	$L^7_{3\|1}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1,\ \rho(f^0_2)(e^1_1) = \mu e^1_1$ $\rho(f^0_3)(e^1_1) = \gamma e^1_1$
		$e^1_1 \cdot f^1_1 = \lambda f^0_1 + \mu f^0_2 + \gamma f^0_3$	nulle
		$e^1_1 \cdot f^1_1 = \lambda f^0_1,\ e^1_1 \cdot f^0_2 = \mu f^0_2$ $e^1_1 \cdot f^0_3 = \gamma f^1_1$	nulle

Type (1|1, 4|0) : $(\lambda, \mu, \gamma, \theta \in \mathbb{C})$

A	**L**	**Action**	**Ancre**
$A^1_{1\|1}$	$L^1_{4\|0}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1,\ \rho(f^0_2)(e^1_1) = \mu e^1_1$ $\rho(f^0_3)(e^1_1) = \gamma e^1_1,\ \rho(f^0_4)(e^1_1) = \theta e^1_1$
	$L^2_{4\|0}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1,\ \rho(f^0_2)(e^1_1) = \mu e^1_1$ $\rho(f^0_4)(e^1_1) = \gamma e^1_1$
	$L^3_{4\|0}$	triviale	$\rho(f^0_2)(e^1_1) = \lambda e^1_1,\ \rho(f^0_3)(e^1_1) = \mu e^1_1$ $\rho(f^0_4)(e^1_1) = \gamma e^1_1$
	$L^4_{4\|0}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1,\ \rho(f^0_4)(e^1_1) = \mu e^1_1$
	$L^5_{4\|0}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1,\ \rho(f^0_3)(e^1_1) = \mu e^1_1$ $\rho(f^0_4)(e^1_1) = \gamma e^1_1$
	$L^6_{4\|0}$	triviale	$\rho(f^0_2)(e^1_1) = \lambda e^1_1,\ \rho(f^0_4)(e^1_1) = \mu e^1_1$
	$L^7_{4\|0}$	triviale	$\rho(f^0_4)(e^1_1) = \lambda e^1_1$
	$L^8_{4\|0}$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1,\ \rho(f^0_2)(e^1_1) = \mu e^1_1$
	$L^k_{4\|0}$ $9 \leq k \leq 16$	triviale	$\rho(f^0_1)(e^1_1) = \lambda e^1_1$

Type (2|0, 0|4) : On sait déjà que l'ancre est nulle. Il y a trop d'actions compatibles pour les citer ici.

Type (2|0, 1|3) : ($\lambda \in \mathbb{C}$)

<table>
<tr><th>A</th><th>L</th><th>Action</th><th>Ancre</th></tr>
<tr><td rowspan="8">$A^1_{2|0}$</td><td>$L^k_{1|3}$
$k \in \{1,3,4,6\}$</td><td>triviale</td><td>$\rho(f^0_1)(e^0_2) = \lambda e^0_2$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$L^2_{1|3}$</td><td>triviale</td><td>$\rho(f^0_1)(e^0_2) = \lambda e^0_2$</td></tr>
<tr><td>$e^0_2 \cdot f^1_3 = \lambda f^1_2$</td><td>nulle</td></tr>
<tr><td>$e^0_2 \cdot f^1_3 = \lambda f^1_1$</td><td>$\rho(f^0_1)(e^0_2) = e^0_2$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$L^5_{1|3}$</td><td>triviale</td><td>$\rho(f^0_1)(e^0_2) = \lambda e^0_2$</td></tr>
<tr><td>$e^0_2 \cdot f^1_3 = \lambda f^1_1$</td><td>nulle</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$L^8_{1|3}$</td><td>triviale</td><td>$\rho(f^0_1)(e^0_2) = \lambda e^0_2$</td></tr>
<tr><td>trop d'actions compatibles pour être listées</td><td>nulle</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$A^2_{2|0}$</td><td>$L^k_{1|3}$
$1 \leq k \leq 7$</td><td>$e^0_2 \cdot f^0_1 = f^0_1,\ e^0_2 \cdot f^1_1 = f^1_1$
$e^0_2 \cdot f^1_2 = f^1_2,\ e^0_2 \cdot f^1_3 = f^1_3$</td><td>nulle</td></tr>
<tr><td>$L^8_{1|3}$</td><td>trop d'actions compatibles pour être listées</td><td>nulle</td></tr>
</table>

Type (2|0,2|2) : $(\lambda, \mu, \gamma, \theta \in \mathbb{C})$

<table>
<tr><th>A</th><th>L</th><th>Action</th><th>Ancre</th></tr>
<tr><td rowspan="17">$A^1_{2|0}$</td><td rowspan="2">$L^1_{2|2}$</td><td>triviale</td><td>$\rho(f^0_1)(e^0_2) = \lambda e^0_2,\ \rho(f^0_2)(e^0_2) = \lambda e^0_2$</td></tr>
<tr><td>$e^0_2 \cdot f^0_1 = \lambda f^0_2,\ e^0_2 \cdot f^1_2 = \lambda f^1_1$</td><td>nulle</td></tr>
<tr><td>$L^2_{2|2}$</td><td>triviale</td><td>$\rho(f^0_1)(e^0_2) = \lambda e^0_2,\ \rho(f^0_2)(e^0_2) = \lambda e^0_2$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$L^k_{2|2}$
$3 \leq k \leq 15,$
$k \notin \{6, 12, 13\}$</td><td>triviale</td><td>$\rho(f^0_1)(e^0_2) = \lambda e^0_2$</td></tr>
<tr><td>$e^0_2 \cdot f^0_1 = \lambda f^0_2$</td><td>$\rho(f^0_1)(e^0_2) = e^0_2$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$L^6_{2|2}$</td><td>triviale</td><td>$\rho(f^0_1)(e^0_2) = \lambda e^0_2$</td></tr>
<tr><td>$e^0_2 \cdot f^0_1 = \lambda f^0_2,\ e^0_2 \cdot f^1_2 = \frac{\lambda}{p} f^1_1$</td><td>$\rho(f^0_1)(e^0_2) = e^0_2$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$L^{16}_{2|2}$</td><td>triviale</td><td>$\rho(f^0_1)(e^0_2) = \lambda e^0_2$</td></tr>
<tr><td>$e^0_2 \cdot f^0_1 = \lambda f^0_2,$</td><td>nulle</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$L^{17}_{2|2}$</td><td>triviale</td><td>$\rho(f^0_1)(e^0_2) = \lambda e^0_2$</td></tr>
<tr><td>$e^0_2 \cdot f^0_1 = \lambda f^0_2,\ e^0_2 \cdot f^1_2 = \mu f^1_1$</td><td>nulle</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$L^{18}_{2|2}$</td><td>triviale</td><td>$\rho(f^0_1)(e^0_2) = \lambda e^0_2,\ \rho(f^0_2)(e^0_2) = \mu e^0_2$</td></tr>
<tr><td>$e^0_2 \cdot f^0_1 = \lambda f^0_2,\ e^0_2 \cdot f^1_2 = \mu f^1_1$</td><td rowspan="5">nulle</td></tr>
<tr><td>$(\mu, \theta \neq 0) \dashrightarrow$</td><td>$e^0_2 \cdot f^0_1 = -\lambda f^0_2 + \mu f^0_2,\ e^0_2 \cdot f^0_2 = -\frac{\lambda^2}{\mu} f^0_1 + \lambda f^0_2$
$e^0_2 \cdot f^1_1 = -\gamma f^1_1 + \theta f^1_2,\ e^0_2 \cdot f^1_2 = -\frac{\gamma^2}{\theta} f^1_1 + \gamma f^1_2$</td></tr>
<tr><td></td><td>$e^0_2 \cdot f^0_2 = \lambda f^0_1,\ e^0_2 \cdot f^1_2 = \mu f^1_1$</td></tr>
<tr><td>$(\mu \neq 0) \dashrightarrow$</td><td>$e^0_2 \cdot f^1_1 = -\lambda f^1_1 + \mu f^1_2,\ e^0_2 \cdot f^1_2 = -\frac{\lambda^2}{\mu} f^1_1 + \mu f^1_2$</td></tr>
<tr><td>$(\mu \neq 0) \dashrightarrow$</td><td>$e^0_2 \cdot f^0_1 = -\lambda f^0_1 + \mu f^0_2,\ e^0_2 \cdot f^0_2 = -\frac{\lambda^2}{\mu} f^0_1 + \mu f^0_2$</td></tr>
<tr><td rowspan="10">$A^2_{2|0}$</td><td>$L^k_{2|2}$
$1 \leq k \leq 17$
$k \notin \{2, 13, 15\}$</td><td>$e^0_2 \cdot f^0_1 = f^0_1,\ e^0_2 \cdot f^0_2 = f^0_2,$
$e^0_2 \cdot f^1_1 = f^1_1,\ e^0_2 \cdot f^1_2 = f^1_2$</td><td>nulle</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$L^2_{2|2}$</td><td>$e^0_2 \cdot f^0_1 = \frac{1}{2} f^0_1 - \frac{i}{2} f^0_2,\ e^0_2 \cdot f^0_2 = \frac{i}{2} f^0_1 + \frac{1}{2} f^0_2$
$e^0_2 \cdot f^1_1 = \frac{1}{2} f^1_1 + \frac{i}{2} f^1_2,\ e^0_2 \cdot f^1_2 = -\frac{i}{2} f^1_2 + \frac{1}{2} f^1_2$</td><td rowspan="2">nulle</td></tr>
<tr><td>$e^0_2 \cdot f^0_1 = \frac{1}{2} f^0_1 + \frac{i}{2} f^0_2,\ e^0_2 \cdot f^0_2 = -\frac{i}{2} f^0_1 + \frac{1}{2} f^0_2$
$e^0_2 \cdot f^1_1 = \frac{1}{2} f^1_1 - \frac{i}{2} f^1_2,\ e^0_2 \cdot f^1_2 = \frac{i}{2} f^1_2 + \frac{1}{2} f^1_2$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$L^{13}_{2|2}$</td><td>$e^0_2 \cdot f^0_1 = f^0_1,\ e^0_2 \cdot f^0_2 = f^0_2,$
$e^0_2 \cdot f^1_1 = f^1_1,\ e^0_2 \cdot f^1_2 = f^1_2$</td><td rowspan="3">nulle</td></tr>
<tr><td>$e^0_2 \cdot f^0_2 = f^0_2,\ e^0_2 \cdot f^1_2 = f^1_2$</td></tr>
<tr><td>$e^0_2 \cdot f^0_1 = f^0_1,\ e^0_2 \cdot f^1_1 = f^1_1$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$L^{15}_{2|2}$</td><td>$e^0_2 \cdot f^0_1 = f^0_1,\ e^0_2 \cdot f^0_2 = f^0_2,$
$e^0_2 \cdot f^1_1 = f^1_1,\ e^0_2 \cdot f^1_2 = f^1_2$</td><td rowspan="3">nulle</td></tr>
<tr><td>$e^0_2 \cdot f^1_2 = f^1_2$</td></tr>
<tr><td>$e^0_2 \cdot f^0_1 = f^0_1,\ e^0_2 \cdot f^0_2 = f^0_2$
$e^0_2 \cdot f^1_1 = f^1_1$</td></tr>
<tr><td>$L^{18}_{2|2}$</td><td>trop d'actions compatibles pour être listées</td><td>nulle</td></tr>
</table>

Type $(2|0,\ 3|1)$ et Type $(2|0,\ 4|0)$: aucun résultat pertinent à mentionner ici.

Remarque. Pour les cas non-gradués, on retrouve certains résultats obtenus dans [RE20].

Deuxième partie

(Super-)Algèbres de Lie-Rinehart en caractéristique positive

Chapitre 5

Algèbres de Lie-Rinehart restreintes en caractéristique $p \geq 3$

A partir de ce chapitre, on va s'intéresser aux structures de Lie-Rinehart dans le cas où le corps de base est de caractéristique $p > 0$. Dans cette situation, davantage de structure apparaît pour certains objets algébriques. Si A est une algèbre associative sur un corps $\mathbb{F}$ de caractéristique positive p, on peut regarder son algèbre de Lie des dérivations $\mathrm{Der}(A)$. Alors, le morphisme de Frobenius $(\cdot)^p : \mathrm{Der}(A) \to \mathrm{End}(A),\ D \mapsto D^p$ est en fait un endomorphisme de $\mathrm{Der}(A)$, ce qui n'est en général pas vrai en caractéristique nulle. Cette constatation, ainsi que l'étude des propriétés issues des interactions entre ce morphisme de Frobenius et les applications structurantes de $\mathrm{Der}(A)$ ont conduit à la définition d'algèbre de Lie restreinte [1], qui est une algèbre de Lie L équipée d'une application non-linéaire notée généralement $(\cdot)^{[p]} : L \to L$, respectant certaines conditions de compatibilité avec le crochet de Lie de L et sa loi additive. Ces objets ont été introduits par Jacobson ([JN37], [JN41]) et ensuite étudiés par Hochschild ([HG54], [HG55.1], [HG55.2]). On expose ces éléments de façon détaillée dans la section 5.1.1.

En caractéristique positive p, on va s'intéresser aux algèbres de Lie-Rinehart restreintes. Elles sont apparues d'abord de façon implicite dans des travaux de Hochschild portant sur sa théorie de Galois-Jacobson des extensions de degré 1 purement inséparables ([HG55.1]). Elles ont ensuite été étudiées pour elles-mêmes par plusieurs auteurs ([RD00], [DI12], [SC15], [SP16]). La théorie des déformations formelles des algèbres de Lie-Rinehart restreintes, ainsi que la cohomologie associée sont étroitement liées aux algèbres de Lie restreintes. La cohomologie restreinte a d'abord été définie par Hochschild en utilisant la notion d'algèbre enveloppante restreinte d'une algèbre de Lie restreinte. Ce dernier a également établi une connexion entre cette cohomologie et la cohomologie ordinaire de Chevalley-Eilenberg avec une suite exacte à six termes ([HG54]). May a également apporté des contributions dans [MJP66]. Toutefois, la définition de Hochschild de la cohomologie restreinte n'est pas bien adaptée aux calculs concrets. Evans et Fuchs ont tenté de pallier cet inconvénient en construisant une nouvelle résolution libre du corps de base à l'aide de modules sur l'algèbre enveloppante restreinte, mais leur approche n'a permis de calculer explicitement les groupes de cohomologie que jusqu'à l'ordre p dans le cas où l'algèbre de Lie restreinte est abélienne. Dans le cas général, le crochet de Lie et la non-linéarité de l'application $(\cdot)^{[p]}$ rend le problème bien plus compliqué. Evans et Fuchs ont néanmoins pu décrire explicitement les premier et second groupes de cohomologie restreinte ([ET00], [EF08]). Ces descriptions sont suffisantes pour certaines interprétations algébriques, mais pas pour développer une théorie complète des déformations formelles dans la

1. Cette terminologie “restreinte” n'est pas universelle dans la francophonie, c'est un choix personnel tiré de l'anglais “restricted”. Je n'ai pas trouvé d'appellation universelle francophone de ces objets.

veine de Gerstenhaber ([GM64]) et Nijenhuis-Richardson ([NR66], [NR67]).

Le but de ce chapitre est de comprendre les déformations formelles des algèbres de Lie-Rinehart restreintes et de montrer qu'elles sont encodées d'une certaine façon par la cohomologie restreinte. Une première large partie du travail consiste à comprendre la construction de Evans et Fuchs et de voir comment elle permet d'interpréter les déformations d'algèbres de Lie restreintes. Puis, nous avons étendu cela aux algèbres de Lie-Rinehart restreintes en tentant d'imiter les techniques du chapitre 3 (section 5.4). Toutefois, nous sommes limités par la connaissance partielle de la cohomologie restreinte.

Un certain nombre des résultats précédents ne sont pas valides en caractéristique 2. Bouarroudj et ses collaborateur·trice·s ont largement étudié ce cas ([BB18], [BGL09], [BLLS15], [BLLS21] et les références qui y figurent). Plus récemment, Bouarroudj et Makhlouf ont trouvé un complexe de cohomologie complet pour les Hom-super-algèbres de Lie en caractéristique 2 et ont prouvé des interprétations algébriques intéressantes, parmi lesquelles le contrôle des déformations formelles ([BM22]). La cas particulier de la caractéristique 2 est traité dans le chapitre 6.

Le présent chapitre est organisé de la façon suivante. Tout d'abord, on rappelle la théorie des algèbres de Lie restreintes en caractéristique p, avec des exemples. On donne ensuite les premier et second groupes de cohomologie restreinte tels que construits dans [EF08] (section 5.2). Puis, on rappelle la définition d'algèbre de Lie restreinte (définition 5.3.3), on introduit le concept de multidérivation restreinte (définition 5.3.7), et on développe une théorie des déformation formelles contrôlées par la cohomologie restreinte (section 5.4). On conclut ce chapitre en discutant des structures restreintes sur l'algèbre de Heisenberg de dimension 3. On montre qu'il y a (à isomorphisme restreints près) trois différentes algèbres de Heisenberg restreintes (Théorème 5.5.3), et pour chacune on calcule le second groupe de cohomologie restreint à coefficients adjoints (Théorèmes 5.5.7 et 5.5.9). On construit enfin des algèbres de Lie-Rinehart restreintes sur ces algèbres de Heisenberg et on calcule des déformations (section 5.5.3).

Dans ce chapitre, l'adjectif "ordinaire" signifie "non restreint" et toutes les algèbres sont supposées de dimension finie.

Ce chapitre se base en partie sur le contenu de l'article [EM23].

5.1 Algèbres de Lie restreintes

Dans cette première section, on rappelle les fondamentaux sur les algèbres de Lie restreintes, ainsi que sur la cohomologie restreinte. Le corps de base $\mathbb{F}$ sera un corps de caractéristique $p > 0$. Rappelons que si A est un anneau unitaire, il existe un unique morphisme d'anneaux

$$\varphi : \mathbb{Z} \to A,\ n \mapsto \underbrace{1_A + \cdots + 1_A}_{n \text{ termes}}.$$

L'anneau $\mathbb{Z}$ étant principal, le noyau de φ est donc soit nul, soit de la forme $p\,\mathbb{Z},\ p \in \mathbb{N}$. De plus, si A est un corps on peut montrer que p est premier. Ce nombre p est appelé la *caractéristique* de l'anneau A.

5.1.1 Du morphisme de Frobenius aux p-opérations

Cette section est tirée de [SF88]. Soit A une $\mathbb{F}$-algèbre associative. Pour $x \in A$, on définit deux applications

$$L_x : A \longrightarrow A,\ y \longmapsto xy \quad \text{et} \quad R_x : A \longrightarrow A,\ y \longmapsto yx.$$

Soit $m \in \mathbb{N}$. On remarque que

$$\mathrm{ad}_x^m(y) := \left(L_x - R_x\right)^m(y) = \sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}L_x^j \circ R_x^{m-j}(y) = \sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j}x^j y x^{m-j}. \qquad (5.1)$$

En prenant $m = p$ dans la formule ci-dessus, on obtient

$$\mathrm{ad}_x^p(y) = x^p y - y^p x.$$

On a ainsi une relation entre le morphisme de Frobenius $x \mapsto x^p$ et le commutateur. Vérifions maintenant comment ce morphisme de Frobenius interagit avec la structure de $\mathbb{F}$-espace vectoriel de A. Il est immédiat de voir que $(\lambda a)^p = \lambda^p a^p$, pour $\lambda \in \mathbb{F}$ et $a \in A$. Il reste à étudier les interactions éventuelles entre la loi additive de A et notre morphisme de Frobenius.

Lemme 5.1.1. *Soit A une $\mathbb{F}$-algèbre associative. Il existe alors une dérivation D de $A[X]$ telle que*

$$D(aX^j) = jaX^{j-1} \quad \forall j > 0,\ \forall a \in A.$$

Cas $p \neq 2$: Soient $a, b \in A$. On considère le polynôme $(aX+b)^p$. Écrivons

$$(aX+b)^p = a^pX^p + b^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(a,b)X^i, \quad s_i(a,b) \in A. \qquad (5.2)$$

Lemme 5.1.2. *Avec les notations ci-dessus, on a la formule*

$$\sum_{i=0}^{p-1}(aX+b)^i a (aX+b)^{p-i-1} = \sum_{i=1}^{p-1} i s_i(a,b)X^{i-1}. \qquad (5.3)$$

Preuve. En appliquant la dérivation D du lemme 5.1.1 à l'équation (5.2), on obtient

$$\begin{aligned}
D(a^pX^p) &= pa^pX^{p-1} = 0\ ;\\
D(b^p) &= 0\ ;\\
D\left(\sum_{i=1}^{p-1} s_i(a,b)X^i\right) &= \sum_{i=1}^{p-1} i s_i(a,b)X^{i-1}\ ;\\
D\big((aX+b)^p\big) &= D\Big((aX+b)(aX+b)^{p-1}\Big)\\
&= a(aX+b)^{p-1} + (aX+b)D\Big((aX+b)^{p-1}\Big)\\
&= (\ldots)\\
&= \sum_{i=0}^{p-1}(aX+b)^i a (aX+b)^{p-i-1}.
\end{aligned}$$

D'où la formule (5.3). $\square$

Lemme 5.1.3. *Si char*$(\mathbb{F}) = p$, *on a*

$$(-1)^i \binom{p-1}{i} = 1. \tag{5.4}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\binom{p-1}{i} &= \frac{(p-1)(p-2)...3 \times 2 \times 1}{i(i-1)(i-2)... \times 3 \times 2 \times 1 \times (p-1-i)(p-2-i)... \times 3 \times 2 \times 1} \\
&= \frac{(p-1)(p-2)...(p-i)}{i(i-1)(i-2)... \times 3 \times 2 \times 1} \\
&= \frac{(-1)(-2)...(-i)}{i(i-1)(i-2)... \times 3 \times 2 \times 1} \\
&= (-1)^i.
\end{aligned}$$

□

Lemme 5.1.4. *Avec les notations ci-dessus, on a*

$$(a+b)^p = a^p + b^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(a,b), \tag{5.5}$$

avec $is_i(a,b)$ *le coefficient de* X^{i-1} *dans l'expression polynomiale* $\mathrm{ad}^{p-1}_{aX+b}(a)$.

Preuve. Avec l'équation (5.4), on peut réécrire (5.3) pour obtenir

$$\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \binom{p-1}{i} (aX+b)^i a (aX+b)^{p-1-i} = \sum_{i=1}^{p-1} is_i(a,b) X^{i-1}.$$

D'autre part, en prenant $m = p-1$ dans (5.1), on a

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{ad}^{p-1}_{aX+b}(a)\right) &= \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{p-1-i} \binom{p-1}{i} (aX+b)^i a (aX+b)^{p-1-i} \\
&= \sum_{i=1}^{p-1} is_i(a,b) X^{i-1}, \text{ car } (-1)^{p-1-i} = (-1)^i, \ p \text{ étant impair.}
\end{aligned}$$

En prenant $X = 1$ dans les expressions précédentes, on obtient $(a+b)^p = a^p + b^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(a,b)$, avec $is_i(a,b)$ le coefficient de X^{i-1} dans l'expression polynomiale $\mathrm{ad}^{p-1}_{aX+b}(a)$.

□

Cas $p = 2$: Soient $a, b \in A$. Un calcul direct donne $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ba$. D'un autre côté, on a $\mathrm{ad}_{aX+b}(a) = ba + ab$.

L'idée est maintenant de se baser sur cet exemple afin de définir une p-opération sur une algèbre de Lie quelconque.

5.1.2 Définitions et exemples

Soit $\mathbb{F}$ un corps de caractéristique $p \neq 0$. Les notions de cette sections sont issues de [SF88] et ont été introduites par Jacobson dans [JN37, JN41].

Définition 5.1.5 (Algèbre de Lie restreinte)**.** Une algèbre de Lie restreinte sur $\mathbb{F}$ est une $\mathbb{F}$-algèbre de Lie L équipée d'une application $(-)^{[p]} : L \longrightarrow L$ vérifiant

1. $(\lambda x)^{[p]} = \lambda^p x^{[p]}$, $\forall x \in L$, $\forall \lambda \in \mathbb{F}$;
2. $\left[x, y^{[p]}\right] = [[\cdots [x, \overbrace{y], y], \cdots, y}^{p \text{ termes}}]$, $\forall x, y \in L$;
3. $(x+y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} s_i(x,y)$, $\forall x, y \in L$,

avec $is_i(x,y)$ le coefficient de Z^{i-1} dans $\mathrm{ad}^{p-1}_{Zx+y}(x)$. Une telle application $(-)^{[p]} : L \longrightarrow L$ est appelée *p-opération*[2].

On a la formule explicite

$$is_i(x,y) = \sum_{\substack{x_k \in \{x,y\} \\ \sharp\{k,\ x_k = x\} = i-1}} [x_1, [x_2, [\cdots, [x_k, \cdots, [x_{p-2}, [y,x]] \cdots],$$

où $\sharp\{k,\ x_k = x\}$ désigne le nombre de x_k égaux à x.

Dans tout ce chapitre, on notera $\sharp\{x\}$ le nombre de x parmi les x_k. On a alors en effet

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p-1} s_i(x,y) &= \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i} \sum_{\substack{x_k \in \{x,y\} \\ \sharp\{k,\ x_k = x\} = i-1}} [x_1, [x_2, [\cdots, [x_k, \cdots, [x_{p-2}, [y,x]] \cdots] \\ &= \sum_{\substack{x_k \in \{x,y\} \\ x_{p-1} = y,\ x_p = x}} \frac{1}{\sharp\{x\}} [x_1, [x_2, [\cdots, [x_k, \cdots, [x_{p-1}, x_p]] \cdots], \end{aligned} \tag{5.6}$$

puisque $\frac{1}{i}$ est exactement l'inverse du nombre de x parmi les x_k.

Nous avons les cas particuliers suivants :

- $\underline{p = 2}$: pour tous $x, y \in L$, on a $\mathrm{ad}_{Zx+y}(x) = [x, Zx+y] = [x,y]$. On en déduit que $s_1(x,y) = [x,y]$. Ainsi,
$$(x+y)^{[2]} = x^{[2]} + y^{[2]} + [x,y].$$
- $\underline{p = 3}$: pour tous $x, y \in L$, on a $\mathrm{ad}^2_{Zx+y}(x) = \Big[[x, Zx+y], Zx+y\Big] = Z[[x,y],x] + [[x,y],y]$. On déduit que
$$s_1(x,y) = [[x,y],y]; \quad s_2(x,y) = 2[[x,y],x].$$

Remarque. Si la représentation adjointe $\mathrm{ad} : x \mapsto [x, \cdot]$ est fidèle (où de façon équivalente, si le centre de l'algèbre de Lie est trivial), alors les conditions 1. et 3. de la définition 5.1.5 sont conséquences de la condition 2. Cela vient de la preuve du théorème de Jacobson 5.1.16, voir le corollaire (5.1.17).

2. Comme pour les algèbres restreintes, il n'y a pas de terminologie francophone établie pour cette application, qui en anglais se dit "p-map". L'appellation "p-opération" relève d'un choix personnel.

Exemples :

1. Soit A une algèbre associative sur $\mathbb{F}$. On l'équipe du crochet $[x, y] := xy - yx$. Alors A admet une p-opération avec $x \longmapsto x^p$, appelée *morphisme de Frobenius* (voir section 5.1.1).
2. Soit L une algèbre de Lie abélienne. Alors, toute application $f : L \to L$ vérifiant
$$f(\lambda x + y) = \lambda^p f(x) + f(y),\ \forall x, y \in L,\ \forall \lambda \in \mathbb{F} \tag{5.7}$$
est une p-opération sur L. Une telle application est dite *p-semilinéaire.*
3. Soit $\mathbb{F}$ un corps de caractéristique $p \geq 3$. On considère $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}\{X, Y, H\}$ muni du crochet $[X, Y] = H$, $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$. On l'équipe d'une structure restreinte avec la p-opération définie sur la base par $X^{[p]} = Y^{[p]} = 0$, $H^{[p]} = 2^{p-1}H$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ est simple, donc la p-opération est unique. En effet, deux p-opérations sur une algèbre de Lie diffèrent d'une application dont l'image est dans le centre. Ainsi, si l'algèbre est simple, le centre est réduit à $\{0\}$ (voir [SF88]).

   Remarque. Dans [EM22] et dans le chapitre 4, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est notée $L^6_{3|0}$.
4. Soit $\mathbb{F}$ un corps de caractéristique $p \geq 5$. On considère l'*algèbre de Witt* $W(1) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}\{e_{-1}, e_0, ..., e_{p-2}\}$ avec le crochet
$$[e_i, e_j] = \begin{cases} (j - i)e_{i+j} & \text{si } i + j \in \{-1, ..., p - 2\}; \\ 0 & \text{sinon}; \end{cases}$$
et la p-opération
$$\begin{cases} e_0^{[p]} = e_0; \\ e_i^{[p]} = 0 \quad \text{si } i \neq 0. \end{cases}$$
Alors $\left(W(1), [\cdot, \cdot], (\cdot)^{[p]}\right)$ est une algèbre de Lie restreinte (voir [EFP16]). De plus, cette algèbre de Lie est aussi simple, donc la structure restreinte est unique.

   On peut voir l'algèbre de Witt comme algèbre des dérivations de l'algèbre associative commutative $A := \mathbb{F}[x] / (x^p - 1)$ (voir [EF02]). Dans ce contexte, les éléments de base sont $e_i = x^{i+1}\frac{d}{dx}$, le crochet étant le commutateur : si $f \in A$, on a
$$\left[x^{i+1}\frac{d}{dx}, x^{j+1}\frac{d}{dx}\right](f) = (j - i)x^{i+j+1}\frac{d}{dx}(f) \text{ si } i + j + 1 \in \{-1, ..., p - 2\},\ 0 \text{ sinon.}$$
La p-opération est alors donnée par
$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^{[p]} = x\frac{d}{dx},\ \left(x^k\frac{d}{dx}\right)^{[p]} = 0,\ k \neq 1.$$
5. Soit $\mathbb{F}$ un corps de caractéristique $p \geq 5$. On considère l'*algèbre de Lie filiforme restreinte* $\mathfrak{m}_0^\lambda(p) = \mathrm{Span}\{e_1, \cdots, e_p\}$, munie du crochet $[e_1, e_i] = e_{i+1}$, $2 \leq i \leq p - 1$. Soit $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{F}^p$. Alors, on peut montrer que $e_k^{[p]} = \lambda_k e_p$ définit une p-opération sur $\mathfrak{m}_0^\lambda(p)$ (voir [EF19]).

Définition 5.1.6. Soit $\left(L_1, [\cdot, \cdot]_1, (\cdot)^{[p]_1}\right)$ et $\left(L_2, [\cdot, \cdot]_2, (\cdot)^{[p]_2}\right)$ deux algèbres de Lie restreintes. Un *morphisme de Lie restreint* (ou *p-morphisme*, ou *morphisme restreint*) $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ est un morphisme de Lie vérifiant $\varphi\left(x^{[p]_1}\right) = \varphi(x)^{[p]_2}$, $\forall x \in L_1$.

Définition 5.1.7. Soit $\left(L, [\cdot,\cdot], (\cdot)^{[p]}\right)$ une algèbre de Lie restreinte et M un L-module. On dit que M est un *module restreint* si l'action vérifie $x^{[p]}\cdot m = \left(\overbrace{x\cdot(x\cdots(x}^{p \text{ termes}}\cdot m)\cdots)\right)$, pour $m \in M$ et $x \in L$.

Définition 5.1.8. Soit $\left(L, [\cdot,\cdot], (\cdot)^{[p]}\right)$ une algèbre de Lie restreinte sur $\mathbb{F}$.

1. Une sous-algèbre de Lie $H \subset L$ est une *p-sous-algèbre* si $x^{[p]} \in H\ \forall x \in H$.
2. Un idéal $I \subset L$ est *p-idéal* si $x^{[p]} \in I\ \forall x \in I$.

Proposition 5.1.9. *Soit $\left(L, [\cdot,\cdot], (\cdot)^{[p]}\right)$ une algèbre de Lie restreinte, G une algèbre de Lie et $f : L \longrightarrow G$ un morphisme de Lie tel que Ker(f) est un p-idéal de L. Alors il existe une unique p-opération sur $f(L)$ telle que $f : L \longrightarrow f(L)$ soit un morphisme restreint.*

Preuve. Soit $x \in L$ et $y = f(x)$. On pose $y^{[p]} := f(x^{[p]})$. Alors, si $x_1,\ x_2 \in L$ vérifient $f(x_1) = f(x_2)$, on a $x_1 - x_2 \in \mathrm{Ker}(f)$. De plus, on a

$$x_1^{[p]} = ((x_1 - x_2) + x_2)^{[p]} = (x_1 - x_2)^{[p]} + x_2^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(x_1 - x_2, x_2).$$

En appliquant f à cette équation, on obtient $f(x_1^{[p]}) = f(x_2^{[p]})$, donc la p-opération est bien définie. Les autres propriétés sont immédiates. □

Corollaire 5.1.10. *Si $I \subset L$ est p-idéal d'une algèbre de Lie restreinte $\left(L, [\cdot,\cdot], (\cdot)^{[p]}\right)$, on peut définir $(x+I)^{[p]} := x^{[p]} + I$. Ainsi, l'algèbre de Lie quotient L/I est restreinte et la projection $L \longrightarrow L/I$ est un morphisme restreint.*

Définition 5.1.11. Soit $\left(L, [\cdot,\cdot], (\cdot)^{[p]}\right)$ une algèbre de Lie restreinte.

1. Un p-idéal $I \subset L$ est dit *p-nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I^{[p]^n} = 0$.
2. Un élément $x \in L$ est dit *p-nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(x^{[p]})^n = 0$.
3. Un p-idéal I est dit *p-nil* si tous ses éléments sont p-nilpotents.

5.1.3 Existence de p-opérations

Soit L une algèbre de Lie et $S \subset L$ un sous-ensemble. On note son *centralisateur*

$$C_L(S) := \{x \in L,\ [x,s] = 0\ \forall s \in S\}.$$

Si $S = L$, on notera simplement $C_L(L) = C(L)$.

Proposition 5.1.12. *Soient $(L, [\cdot,\cdot], (\cdot)^{[p]})$ une algèbre de Lie restreinte et $(\cdot)^{[p]_1} : L \longrightarrow L$ une application. Alors*

$[p]_1$ est une p-opération sur $L \iff \exists f : L \longrightarrow C(L)$ p-semilinéaire telle que $(\cdot)^{[p]_1} = (\cdot)^{[p]} + f$.

Preuve. Supposons que $(\cdot)^{[p]_1}$ est une p-opération. Posons alors $f : L \longrightarrow L,\ x \longmapsto x^{[p]_1} - x^{[p]}$. On a $\mathrm{ad}_{f(x)}(y) = 0,\ \forall x, y \in L$. Ainsi, $f(L) \subset C(L)$. Il reste à montrer que f est p-semilinéaire, ce qui est presque immédiat :

$$f(\lambda x + y) = (\lambda x + y)^{[p]_1} - (\lambda x + y)^{[p]}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda^p x^{[p]_1} + y^{[p]_1} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(\lambda x, y) - \lambda^p x^{[p]} - y^{[p]} - \sum_{i=1}^{p-1} s_i(x,y) \\
&= \lambda^p f(x) + f(y).
\end{aligned}
$$

Réciproquement, supposons que f soit une application p-semilinéaire telle que $(\cdot)^{[p]_1} = (\cdot)^{[p]} + f$, avec $(\cdot)^{[p]}$ une p-opération. Alors

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{[p]_1} &= (x+y)^{[p]} + f(x+y) \\
&= x^{[p]} + y^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(x,y) + f(x) + f(y) \\
&= x^{[p]_1} + y^{[p]_1} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(x,y).
\end{aligned}
$$

Ainsi, $(\cdot)^{[p]_1}$ est une p-opération. □

En particulier, les p-opérations sur L forment un espace affine sur l'espace vectoriel des applications p-semilinéaires $L \to C(L)$.

Corollaire 5.1.13. *Avec les notations précédentes, on a :*

1. *Si $C(L) = \{0\}$, alors L admet au plus une p-opération ;*
2. *Si deux p-opérations coïncident sur une base de L, elles ont égales ;*
3. *Si $(L, [\cdot,\cdot], (\cdot)^{[p]})$ est une algèbre de Lie restreinte, il existe une p-opération sur L qui s'annule sur les éléments centraux de L.*

Corollaire 5.1.14. *Soit L une algèbre de Lie restreinte simple. Alors, la p-opération est unique.*

Preuve. Si L est simple (non abélienne), alors son centre est réduit à $\{0\}$. Par le corollaire précédent, la p-opération est unique. □

Corollaire 5.1.15. *Soit L une algèbre de Lie abélienne. Alors toute application p-semilinéaire $f : L \longrightarrow L$ est une p-opération sur L.*

Preuve. Puisque L est abélienne, l'application nulle $x \longmapsto 0$ est une p-opération sur L. □

Rappelons que si L est une algèbre de Lie, on note $U(L)$ son algèbre enveloppante, qui peut être muni d'une structure de Lie avec le commutateur.

Théorème 5.1.16 (Théorème de Jacobson ([JN62])). *Soit L une algèbre de Lie de dimension n sur un corps $\mathbb{F}$ de caractéristique p. Supposons que $(e_j)_{j \in \{1,\cdots,n\}}$ soit une base de L telle qu'il existe $y_j \in L$, $\left(\mathrm{ad}_{e_j}\right)^p = \mathrm{ad}_{y_j}$. Alors, il existe exactement une p-opération $(\cdot)^{[p]}$ sur L telle que $e_j^{[p]} = y_j$, $\forall j = 1, \cdots, n$.*

Preuve. Puisque $\mathrm{ad}_{e_j}^p = \mathrm{ad}_{y_j}$, on a $0 = \left(\mathrm{ad}_{e_j}^p - \mathrm{ad}_{y_j}\right)(z)$ $\forall z \in L$. On obtient donc

$$
0 = \left(\mathrm{ad}_{e_j}^p - \mathrm{ad}_{y_j}\right)(z) = \left[e_j^p - y_j, z\right], \quad \forall z \in L.
$$

On en déduit que $e_j^p - y_j \in C_{U(L)}(L)$. On peut ainsi définir une application p-semilinéaire

$$f : L \longrightarrow C_{U(L)}(L),\ \ f\left(\sum_j \alpha_j e_j\right) := \sum_j \alpha_j^p (y_j - e_j^p),\ \alpha_j \in \mathbb{F}\,.$$

puis, on pose

$$V := \{x \in L,\ x^p + f(x) \in L\}\,.$$

On a $(\alpha x + y)^p + f(\alpha x + y) = \alpha^p x^p + y^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(\alpha x, y) + \alpha^p f(x) + f(y) \in L$, donc V est un sous-espace de L. Mais la base $(e_j)_j$ de L est contenue dans V, donc $V = L$. On en déduit que $x^p + f(x) \in L\ \forall x \in L$. En appliquant la proposition 5.1.12, on obtient que $(\cdot)^{[p]} : x \longmapsto x^p + f(x)$ est une p-opération. Toutes les p-opérations obtenues de cette façon coïncident sur la base, elles sont donc égales. □

Corollaire 5.1.17. *Soit L une algèbre de Lie de centre trivial telle qu'il existe une application $(\cdot)^{[p]} : L \to L$ vérifiant la condition 2. de la définition 5.1.5, c'est-à-dire telle que*

$$\mathrm{ad}_{x^{[p]}} = \mathrm{ad}_x^p,\ \forall x \in L.$$

Alors $(\cdot)^{[p]}$ est une p-opération sur L.

Preuve. Soit $\{e_i\}$ une base de L. Notons $y_i = (e_i)^{[p]}$, les conditions du théorème de Jacobson sont alors remplies. En imitant la preuve, on voit que la p-opération construite diffère de $(\cdot)^{[p]}$ par une application à valeurs dans le centre de L. Celui-ci étant trivial, on déduit que $(\cdot)^{[p]}$ est une p-opération compatible avec la structure de L, faisant de celle-ci une algèbre de Lie restreinte. □

Remarque. Une algèbre de Lie équipée d'une application $(\cdot)^{[p]} : L \to L$ telle que $\mathrm{ad}_{x^{[p]}} = \mathrm{ad}_x^p,\ \forall x \in L$ est dite *restreignable*[3]. Le théorème de Jacobson montre qu'il est équivalent d'être restreinte ou restreignable. Toutefois, si le centre n'est pas trivial, l'application qui rend L restreignable n'est pas forcément une p-opération.

Le résultat suivant est probablement bien connu, mais on ne l'a pas trouvé énoncé de cette façon.

Proposition 5.1.18. *Soit L une algèbre de Lie sur une corps de caractéristique $p > 0$ telle que $H^1_{CE}(L, L) = 0$. Alors, il existe (au moins) une p-opération sur L.*

Preuve. Puisque $H^1_{CE}(L, L) = 0$, toute dérivation est intérieure. En particulier, si $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est une base de L, la dérivation $(\mathrm{ad}_{e_i})^p,\ i = 1, \cdots, n$ est intérieure. Ainsi, il existe $u_i \in L,\ i = 1, \cdots, n$ tels que $(\mathrm{ad}_{e_i})^p = \mathrm{ad}_{u_i}$. On conclut on utilisant le théorème de Jacobson 5.1.16. □

5.2 Cohomologie restreinte des algèbres de Lie restreintes

A partir d'ici, le corps de base $\mathbb{F}$ sera un corps de caractéristique $p > 2$. Le cas $p = 2$ sera traité en détails dans le chapitre suivant.On présente la définition de la cohomologie restreinte à la façon de Evans et Fuchs ([EF08]). Comme expliqué précédemment, on n'est capable de calculer les cochaînes restreintes qu'aux ordres $0, 1, 2, 3$ et les cocycles restreints qu'aux ordres $0, 1, 2$.

3. de l'anglais “restrictable”, voir [JN37, JN41, SF88].

5.2.1 Cas général

Soit L une algèbre de Lie restreinte et M un L-module restreint.

Définition 5.2.1. Soient $\varphi \in C^2_{CE}(L, M)$ et $\omega : L \longrightarrow M$ une application. On dit que ω *possède la propriété* $(*)$ *relativement à* φ si [4]

$$\omega(\lambda x) = \lambda^p \omega(x),\ \forall \lambda \in \mathbb{F},\ \forall x \in L; \tag{5.8}$$

$$\omega(x+y) = \omega(x) + \omega(y) + \sum_{\substack{x_i \in \{x,y\} \\ x_1 = x,\ x_2 = y}} \frac{1}{\sharp\{x\}} \sum_{k=0}^{p-2} (-1)^k x_p \cdots x_{p-k+1} \varphi\Big([[\cdots[x_1, x_2], x_3] \cdots, x_{p-k-1}], x_{p-k} \Big), \tag{5.9}$$

avec $x, y \in L$, $\sharp\{x\}$ le nombre de facteurs x_i égaux à x. On définit ensuite

$$C^2_*(L, M) = \Big\{ (\varphi, \omega),\ \varphi \in C^2_{CE}(L, M),\ \omega : L \longrightarrow M \text{ possède la propriété } (*) \text{ relativement à } \varphi \Big\}.$$

Exemple : Soient $p = 3$ et $\varphi \in C^2_{CE}(L, M)$. Alors, une application $\omega : L \to M$ a la propriété $(*)$ relativement à φ si et seulement si

$$\omega(\lambda x) = \lambda^3 \omega(x),\ \forall \lambda \in \mathbb{F},\ \forall x \in L; \tag{5.10}$$

$$\omega(x+y) = \omega(x) + \omega(y) + \varphi([x,y],y) + \frac{1}{2}\varphi([x,y],x) - \frac{1}{2} x \cdot \varphi(x,y) - y \cdot \varphi(x,y),\ \forall x, y \in L. \tag{5.11}$$

L'équation (5.11) peut se réécrire en

$$\omega(x+y) = \omega(x) + \omega(y) + \varphi([x,y],y) - \varphi([x,y],x) + x \cdot \varphi(x,y) - y \cdot \varphi(x,y),\ \forall x, y \in L.$$

Définition 5.2.2. Soient $\alpha \in C^3_{CE}(L, M)$ et $\beta : L \times L \longrightarrow M$ une application. On dit que β *possède la propriété* $(**)$ *relativement à* α si

1. $\beta(x, y)$ est linéaire relativement à la variable x ;
2. $\beta(x, \lambda y) = \lambda^p \beta(x, y)$;
3.
$$\begin{aligned}
\beta(x, y_1 + y_2) &= \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2) \\
&\quad - \sum_{\substack{h_i \in \{y_1, y_2\} \\ h_1 = y_1,\ h_2 = y_2}} \frac{1}{\sharp\{y_1\}} \sum_{j=0}^{p-2} (-1)^j \\
&\quad \times \sum_{k=1}^{j} \binom{j}{k} h_p \cdots h_{p-k-1} \alpha\Big([\cdots[x, h_{p-k}], \cdots, h_{p-j+1}], [\cdots[h_1, h_2], \cdots, h_{p-j-1}], h_{p-j} \Big),
\end{aligned}$$

avec $\lambda \in \mathbb{F}$, $x, y, y_1, y_2 \in L$ et $\sharp\{y_1\}$ le nombre de facteurs h_i égaux à y_1. Alors, on définit

$$C^3_*(L, M) = \Big\{ (\alpha, \beta),\ \alpha \in C^3_{CE}(L, M),\ \beta : L \times L \longrightarrow M \text{ possède la propriété } (**) \text{ relativement à } \alpha \Big\}.$$

Pour définir les différentielles, on remarque qu'un élément $\varphi \in C^1_*(L, M)$ induit une application

4. On peut aussi trouver l'expression "ω est φ-compatible"

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}^1(\varphi) : L &\longrightarrow M\\ x &\longmapsto \varphi\left(x^{[p]}\right) - x^{p-1}\varphi(x).\end{aligned}$$

On remarque également qu'un élément $(\alpha,\beta) \in C^2_*(L,M)$ induit une application

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}^2(\alpha,\beta) : L\times L &\longrightarrow M\\ (x,y) &\longmapsto \alpha\left(x,y^{[p]}\right) - \sum_{i+j=p-1}(-1)^i y^i \alpha\left([\cdots[x,\overbrace{y],\cdots,y}^{j\text{ termes}}],y\right) + x\beta(y).\end{aligned}$$

Lemme 5.2.3 ([EF08])**.** *L'application $ind^1(\varphi)$ vérifie la propriété $(*)$ relativement à $d^1_{CE}\varphi$, et l'application $ind^2(\alpha,\beta)$ vérifie la propriété $(**)$ relativement à $d^2_{CE}\alpha$.*

Définition 5.2.4. Les différentielles restreintes sont définies de la façon suivante :

$$\begin{aligned}&d^0_* : C^0_*(L,M) \longrightarrow C^1_*(L,M),\ d^0_* = d^0_{CE};\\ &d^1_* : C^1_*(L,M) \longrightarrow C^2_*(L,M),\ d^1_*(\varphi) = \left(d^1_{CE}\varphi, \mathrm{ind}^1(\varphi)\right);\\ &d^2_* : C^2_*(L,M) \longrightarrow C^3_*(L,M),\ d^2_*(\alpha,\beta) = \left(d^2_{CE}\alpha, \mathrm{ind}^2(\alpha,\beta)\right).\end{aligned}$$

Si $1 \leq m \leq 2$, on a $d^m_* \circ d^{m-1}_* = 0$. On note $Z^m_*(L,M) = \mathrm{Ker}(d^m_*)$les m-cocycles restreints et $B^m_*(L,M) = \mathrm{Im}(d^{m-1}_*)$ les m-cobords restreints. Enfin, on définit les *groupes de cohomologie restreints* par

$$H^m_*(L,M) = Z^m_*(L,M)/B^m_*(L,M).$$

Remarque : $H^0_*(L,M) = H^0_{CE}(L,M)$.

5.2.2 Cas particulier des algèbres de Lie abéliennes restreintes

Dans cette section, $p > 3$ et L est une algèbre de Lie abélienne restreinte. Dans ce cas, on a vu que toute application p-semilinéaire $f : L \to L$ est une p-opération sur L. Dans [EF08], les auteurs ont construit pour ces algèbres une cohomologie restreinte jusqu'à l'ordre p. On rappelle ce complexe ci-dessous.

Définition 5.2.5. Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel. Pour $\lambda \in \mathbb{F}$, on a le morphisme de Frobenius $F : \lambda \longmapsto \lambda^p$. Si la structure de $\mathbb{F}$-espace vectoriel sur V est donnée par $\mathbb{F} \longrightarrow \mathrm{End}(V)$, on note $\bar{V}$ le $\mathbb{F}$-espace vectoriel (isomorphe à V) qui est obtenu en précomposant $\mathbb{F} \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ par F^{-1}.

Soient $k \leq p$, L une algèbre de Lie abélienne restreinte et M un L-module restreint. On définit

$$C^k_{ab}(L,M) = \bigoplus_{2t+s=k} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}\left(S^t\bar{L}\otimes \wedge^s L, M\right),$$

où $S\bar{L} = \bigoplus_{t\geq 0} S^t\bar{L}$ est l'algèbre symétrique sur $\bar{L}$. Un élément $\gamma \in C^k_{ab}(L,M)$ est une famille $\gamma = \{\gamma_t\}_{0\leq t\leq \lfloor \frac{k}{2}\rfloor}$, avec $\lfloor\cdot\rfloor$ la fonction partie entière et

$$\begin{aligned}\gamma_t : S^t\bar{L}\otimes \wedge^s L &\longrightarrow M, \quad (2t+s=k)\\ (x_1,...,x_t,y_1,...,y_s) &\longmapsto \gamma_t(x_1,...,x_t,y_1,...,y_s).\end{aligned}$$

Ces applications γ_t sont linéaires antisymétriques en les variables y et p-semilinéaires symétriques en les variables x.

On peut ensuite définir un opérateur différentiel sur $C^k_{ab}(L,M)$ par

$$\begin{aligned}d^k_{ab} : C^k_{ab}(L,M) &\longrightarrow C^{k+1}_{ab}(L,M)\\ \{\gamma_t\}_{0\leq t\leq \lfloor \frac{k}{2}\rfloor} &\longmapsto \{\beta_t\}_{0\leq t\leq \lfloor \frac{k+1}{2}\rfloor},\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\beta_t(x_1,\cdots,x_t;y_1,\cdots,y_s) = &\sum_{j=1}^{s}(-1)^j y_j\cdot\gamma_t(x_1,\cdots,x_t,y_1,\cdots,\hat{y_j},\cdots,y_s)\\ &+\sum_{i=1}^{t}\gamma_{t-1}(x_1,\cdots,\hat{x_i},\cdots,x_t,x_i^{[p]},y_1,\cdots,y_s)\\ &+\sum_{i=1}^{t}x_i^{p-1}\cdot\gamma_{t-1}(x_1,\cdots,\hat{x_i},\cdots,x_t,x_i,y_1,\cdots,y_s).\end{aligned}$$

Proposition 5.2.6 ([EF08]). *Le complexe* $\left(C^k_{ab}(L,M),d^k_{ab}\right)_{0\leq k\leq p}$ *est un complexe de cochaînes.*

Calculs aux petits ordres. On explicite ci-après les différentielles d'ordre 1 et 2 dans le cas abélien.

$$\begin{aligned}d^1_{ab} : \mathrm{Hom}(L,M) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(\wedge^2 L,M)\oplus\mathrm{Hom}(\bar{L},M)\\ \gamma_0 &\longmapsto \{\beta_0,\beta_1\},\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\beta_0(y_1,y_2) &= y_2\gamma_0(y_1)-y_1\gamma_0(y_2);\\ \beta_1(x) &= \gamma_0(x^{[p]})+x^{p-1}\gamma_0(x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d^2_{ab} : \mathrm{Hom}(\wedge^2 L,M)\oplus\mathrm{Hom}(\bar{L},M) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(\wedge^3 L,M)\oplus\mathrm{Hom}(\bar{L}\otimes L,M)\\ \{\gamma_0,\gamma_1\} &\longmapsto \{\beta_0,\beta_1\},\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\beta_0(y_1,y_2,y_3) &= -y_1\gamma_0(y_2,y_3)+y_2\gamma_0(y_1,y_3)-y_3\gamma_0(y_1,y_2);\\ \beta_1(x,y) &= -y\gamma_1(x)+\gamma_0(x^{[p]},y)+x^{p-1}\gamma_0(x,y).\end{aligned}$$

On résume cela en dessinant le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[d] & & \\
C^0_{ab}(L,M) \arrow[d, "d^0_{ab}"'] & = & & & M \arrow[d] & & \\
C^1_{ab}(L,M) \arrow[d, "d^1_{ab}"'] & = & & & \mathrm{Hom}(L,M) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
C^2_{ab}(L,M) \arrow[d, "d^2_{ab}"'] & = & & \mathrm{Hom}(\bar{L},M) \arrow[d] & \bigoplus & \mathrm{Hom}(\wedge^2 L,M) \arrow[dll] \arrow[d] & \\
C^3_{ab}(L,M) \arrow[d, "d^3_{ab}"'] & = & & \mathrm{Hom}(\bar{L}\otimes L,M) \arrow[dl] \arrow[dr] & \bigoplus & \mathrm{Hom}(\wedge^3 L,M) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
C^4_{ab}(L,M) \arrow[d, "d^4_{ab}"'] & = & \mathrm{Hom}(S^2\bar{L},M) \arrow[d] & \bigoplus & \mathrm{Hom}(\bar{L}\otimes\wedge^2 L,M) \arrow[dll] \arrow[d] & \bigoplus & \mathrm{Hom}(\wedge^4 L,M) \arrow[dll] \arrow[d] \\
C^5_{ab}(L,M) \arrow[d] & = & \mathrm{Hom}(S^2\bar{L}\otimes L,M) \arrow[d] & \bigoplus & \mathrm{Hom}(\bar{L}\otimes\wedge^3 L,M) \arrow[d] & \bigoplus & \mathrm{Hom}(\wedge^5 L,M) \arrow[d] \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{tikzcd}
$$

En suivant la flèche la plus à droite, on reconnaît le complexe de Chevalley-Eilenberg ordinaire.

5.3 Algèbres de Lie-Rinehart restreintes

En caractéristique positive, on s'intéresse aux algèbres de Lie restreintes. Lorsque l'algèbre de Lie sous-jacente à une algèbre de Lie-Rinehart admet une p-opération, davantage de structure apparaît grâce aux interactions entre les actions définissant l'algèbre de Lie-Rinehart et la p-opération. On encode cela dans la notion d'algèbre de Lie-Rinehart restreinte.

5.3.1 Définitions et exemples

Soient $\mathbb{F}$ un corps de caractéristique positive et A une $\mathbb{F}$-algèbre associative. Rappelons que l'espace des dérivations de A est défini par

$$\mathrm{Der}(A) = \{D : A \to A \text{ linéaire telle que } D(ab) = D(a)b + aD(b),\ \forall a, b \in A\}.$$

Si A est une algèbre associative et commutative, il est bien connu que le couple $(A, \mathrm{Der}(A))$ peut être équipé d'une structure de Lie-Rinehart. On a aussi vu que $\mathrm{Der}(A)$ admet une p-opération : pour tout $D \in \mathrm{Der}(A)$ et tous $a, b \in A$, on a

$$D^p(ab) = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} D^i(a) D^{p-i}(b) = aD^p(b) + D^p(a)b. \tag{5.12}$$

On conclut que D^p est aussi une dérivation. Ainsi, $\mathrm{Der}(A)$ est restreinte, avec la p-opération $D \longmapsto D^p$. Rappelons maintenant la définition d'une représentation d'une algèbre de Lie-Rinehart.

Définition 5.3.1 ([SP16])**.** Soit (A, L, ρ) une algèbre de Lie-Rinehart. Une représentation de (A, L, ρ) est un A-module M équipée d'un morphisme de Lie $\pi : L \longrightarrow \mathrm{End}(M),\ x \longmapsto \pi_x$ tel que

$$\pi_x(am) = a\pi_x(m) + \rho_x(a)m, \quad \forall a \in A,\ \forall m \in M,\ \forall x \in L$$

Le lemme suivant est une reformulation du lemme 1 de [HG55.1].

Lemme 5.3.2 ([SP16])**.** *Soit M une représentation d'une algèbre de Lie-Rinehart (A, L, ρ). On a alors la relation suivante dans End(M), pour $a \in A,\ x \in L$:*

$$\pi_{ax}^p = a^p \pi_x^p + \rho_{ax}^{p-1}(a)\pi_x.$$

Ce lemme fournit une relation entre un élément $D \in \mathrm{Der}(A)$ et un élément $a \in A$, en prenant $\rho = \mathrm{id}$:

$$(aD)^p = a^p D^p + (aD)^{p-1}(a)D.$$

Ces considérations ont inspiré la définition d'algèbre de Lie-Rinehart restreinte, qui est apparue implicitement dans [HG55.1] et explicitement dans [DI12] et [RD00].

Définition 5.3.3. Une *algèbre de Lie-Rinehart restreinte* sur un corps $\mathbb{F}$ de caractéristique p est un couple (A, L) avec A une $\mathbb{F}$-algèbre associative commutative et $\left(L, (-)^{[p]}\right)$ une $\mathbb{F}$-algèbre de Lie restreinte satisfaisant les conditions

- (A, L, ρ) est une algèbre de Lie-Rinehart ;
- $\rho\left(x^{[p]}\right) = \rho(x)^p$ (ρ est un morphisme restreint) ;
- $(ax)^{[p]} = a^p x^{[p]} + \rho(ax)^{p-1}(a)x,\ \forall a \in A,\ \forall x \in L$ (condition de Hochschild).

Remarque. Tout comme l'ancre mesure le défaut de A-linéarité du crochet, elle permet aussi de mesurer le défaut de p-homogénéité de la p-opération relativement à l'action de A.

Exemples :

1. Si A est une $\mathbb{F}$-algèbre associative commutative unitaire et $\left(L, (\cdot)^{[p]}\right)$ est une algèbre de Lie-Rinehart restreinte, on peut toujours équiper le couple (A, L) d'une structure de Lie-Rinehart restreinte avec l'action triviale et l'ancre nulle.
2. On a vu plus haut que si A est une algèbre associative commutative, alors on peut équiper $(A, \mathrm{Der}(A))$ d'une structure de Lie-Rinehart restreinte.
3. Soit $(L, (-)^{[p]})$ une algèbre de Lie restreinte sur $\mathbb{F}$. Alors $(\mathbb{F}, L)$ peut être équipé d'une structure de Lie-Rinehart d'une façon triviale.
4. Les algèbres de Lie-Rinehart restreintes apparaissent dans la théorie de Galois-Jacobson des extensions purement inséparables de degré 1, voir [DI12] pour des références.
5. Soit $(\mathfrak{g}, [\cdot]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre de Lie restreinte, équipée d'un morphisme de Lie $\gamma : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Der}(A)$, où A est une algèbre associative commutative. Alors $L := A \otimes \mathfrak{g}$ admet une structure de Lie-Rinehart restreinte définie pour tous $a, b \in A,\ x, y \in L$ par
$$\begin{aligned}
[a \otimes x, b \otimes y]_L &= ab \otimes [x, y] + a\gamma(x)(b) \otimes y - b\gamma(y)(a) \otimes x;\\
\rho_L(a \otimes x)(b) &= a\gamma(x)(b);\\
(a \otimes x)^{[p]_L} &= a^p \otimes x^{[p]_{\mathfrak{g}}} - \big(a\gamma(x)\big)^{p-1}(a) \otimes x.
\end{aligned}$$
6. On regarde l'algèbre de Witt $W(1)$ définie dans la section 5.1.2. On a vu que cette algèbre de Lie restreinte peut être réalisée comme $W(1) = \mathrm{Der}(A)$, avec $A = \mathbb{F}[x]/(x^p - 1)$. Ainsi, $(A, W(1))$ possède une structure de Lie-Rinehart restreinte, avec ancre $\rho = \mathrm{id}$.

Définition 5.3.4. Soit (A, L, ρ) une algèbre de Lie-Rinehart restreinte. Une représentation restreinte de (A, L, ρ) est une représentation de Lie-Rinehart (π, M) de telle que π soit un morphisme restreint.

Remarque. Les représentations restreintes d'algèbres de Lie-Rinehart restreintes sont étudiées dans le chapitre 7.

Proposition 5.3.5 ([DI12], analogue du théorème de Jacobson pour les algèbres de Lie-Rinehart restreintes)**.** *Soit (A, L, ρ) une algèbre de Lie-Rinehart telle que L est libre en tant que A-module. Soit $(u_i)_i$ une A-base de L. S'il existe une application $u_i \mapsto u_i^{[p]}$ telle que $\mathrm{ad}_{u_i}^p = \mathrm{ad}_{u_i^{[p]}}$ $\forall i$, alors (A, L, ρ) peut être équipée d'une structure de Lie-Rinehart restreinte.*

Algèbre enveloppante. On a vu dans la section 1.3.3 comment construire l'algèbre enveloppante $U(A, L, \rho)$ d'une algèbre de Lie-Rinehart (A, L, ρ). Suivant [SP16], si (A, L, ρ) est une algèbre de Lie-Rinehart restreinte, on définit *l'algèbre enveloppante restreinte* par
$$U(A, L, \rho)_p := U(A, L, \rho)/J,$$
avec J le p-idéal engendré par les éléments de la forme $\left\langle x^{[p]} - x^p,\ x \in L \right\rangle$. Cette algèbre satisfait la même propriété universelle de l'algèbre enveloppante ordinaire, les morphismes étant dans ce cas des morphismes restreints.

5.3.2 Multidérivations restreintes et structures de Lie-Rinehart restreintes

Soient A une algèbre associative et L une algèbre de Lie restreinte telle que A agit sur L.

Définition 5.3.6. Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel. Une application $\varphi : V \to V$ est dite *p-homogène* si elle satisfait $\varphi(\lambda x) = \lambda^p \varphi(x)$, pour tous $x \in L$ et tous $\lambda \in \mathbb{F}$.

Définition 5.3.7. Une *multidérivation restreinte* (d'ordre 1) est un couple (m, ω), avec $m : L \times L \to L$ une application bilinéaire antisymétrique, $\omega : L \to L$ une application p-homogène vérifiant

$$\omega(x+y) = \omega(x) + \omega(y) + \sum_{i=1}^{p-1} \theta_i(x,y), \tag{5.13}$$

où $i\theta_i(x,y)$ est le coefficient de Z^{i-1} dans $\left(\tilde{\mathrm{ad}}_m(Zx+y)\right)^{p-1}(x)$, avec $\tilde{\mathrm{ad}}_m(x)(y) := m(x,y)$, tels qu'il existe une application $\sigma : L \to \mathrm{Der}(A)$ appelée *symbole restreint* qui doit satisfaire les quatre conditions suivantes, pour $x, y \in L$ et $a \in A$:

$$\sigma(ax) = a\sigma(x); \tag{5.14}$$

$$m(x, ay) = am(x,y) + \sigma(x)(a)y; \tag{5.15}$$

$$\sigma \circ \omega(x) = \sigma(x)^p; \tag{5.16}$$

$$\omega(ax) = a^p\, \omega(x) + \sigma(ax)^{p-1}(a)x. \tag{5.17}$$

Remarque. Si les conditions (5.16) et (5.17) ne sont pas satisfaites, on dit que m (sans ω) est une multidérivation ordinaire (voir [MM20] et [EM22]).

Proposition 5.3.8. *Il y a une correspondance bijective entre les structures de Lie-Rinehart restreintes sur le couple (A, L) et les multidérivations restreintes (m, ω) d'ordre 1 vérifiant, pour tous $x, y, z \in L$ les relations*

$$m(x, m(y,z)) + m(y, m(z,x)) + m(z, m(x,y)) = 0 \tag{5.18}$$

et

$$m(x, \omega(y)) = m(m(\cdots m(x, \overbrace{y), y), \cdots, y}^{p \text{ termes}}) \tag{5.19}$$

Preuve. Supposons que $\left(A, L, [\cdot,\cdot], (\cdot)^{[p]}, \rho\right)$ est une algèbre de Lie-Rinehart restreinte. Posons $m := [\cdot,\cdot]$, $\omega := (\cdot)^{[p]}$ et $\sigma := \rho$. Alors, l'équation (5.18) n'est rien de plus que l'identité de Jacobi pour le crochet de Lie et l'équation (5.19) est également satisfaite, par définition de la p-opération sur L. De plus, il n'est pas difficile de voir que $\sigma = \rho$ est un symbole restreint adapté à (m, ω). Ainsi, le couple (m, ω) est une multidérivation restreinte d'ordre 1, avec pour symbole restreint σ défini précédemment. Réciproquement, si (m, ω) est une multidérivation restreinte d'ordre 1 avec σ pour symbole restreint, il est facile de vérifier que $(A, L, m, \omega, \sigma)$ est une algèbre de Lie-Rinehart restreinte.

□

Remarque. Si la condition (5.19) n'est pas vérifiée, on a alors une correspondance bijective entre les multidérivations (ordinaires) m d'ordre 1 qui vérifient l'équation (5.18) et les algèbres de Lie-Rinehart sur (A, L) (voir [MM20] et [EM22]).

5.4 Déformations formelles des algèbres de Lie-Rinehart restreintes

Soit $\mathbb{F}$ un corps de caractéristique $p > 2$. Dans [EF08], Evans et Fuchs ont esquissé une théorie des déformations formelles des algèbres de Lie restreintes. Ils ont introduit les notions de déformations restreintes infinitésimales et d'équivalence de telles déformations, et ont montré que le second groupe de cohomologie restreinte classifie à équivalence près les déformations restreintes infinitésimales (théorème 6 de [EF08]). Ici, on s'intéresse aux déformations formelles d'algèbres de Lie-Rinehart restreintes. La proposition 5.3.8 nous permet de considérer les multidérivations restreintes d'ordre 1 pour étudier les déformations formelles d'algèbres de Lie-Rinehart restreintes.

5.4.1 Déformations formelles restreintes

Soit $\left(A, L, [\cdot,\cdot], (-)^{[p]}, \rho\right)$ une algèbre de Lie-Rinehart restreinte. Notre but est de déformer le crochet de Lie, la p-opération et l'ancre. Soit (m, ω) la multidérivation restreinte associée.

Définition 5.4.1. Une déformation formelle de (m, ω) est donnée, pour $x, y \in L$, par deux applications

$$m_t : (x, y) \longmapsto \sum_{i \geq 0} t^i m_i(x, y), \quad \omega_t : x \longmapsto \sum_{j \geq 0} t^j\, \omega_j(x),$$

avec $m_0 = m$, $\omega_0 = \omega$, et (m_i, ω_i) des multidérivations restreintes. De plus, les quatre conditions suivantes doivent être satisfaites, pour tous $x, y, z \in L$, et tous $a \in A$:

$$m_t(x, m_t(y, z))_t + m_t(y, m_t(z, x)) + m_t(z, m_t(x, y)) = 0; \tag{5.20}$$

$$m_t\left(x, \omega_t(y)\right)_t = m_t(m_t(\cdots m_t(x, \overbrace{y), y), \cdots, y}^{p \text{ terms}}); \tag{5.21}$$

$$\sum_{i=0}^{k} \sigma_i\left(\omega_{k-i}(x)\right)(a) = \sum_{i_1+\cdots+i_p=k} \sigma_{i_1}(x) \circ \cdots \circ \sigma_{i_p}(x)(a), \quad \forall k \geq 0; \tag{5.22}$$

$$\sigma_k(x)^{p-1} = \sum_{i_1+\cdots+i_{p-1}=k} \sigma_{i_1}(x) \circ \sigma_{i_2}(x) \circ \cdots \sigma_{i_{p-1}}(x) \quad \forall k \geq 0; \tag{5.23}$$

Remarque.

1. m_t s'étend à $L[[t]]$ par $\mathbb{F}[[t]]$-linéarité.
2. ω_t s'étend à $L[[t]]$ par p-homogénéité et en appliquant la formule

$$\omega_t(x + ty) = \omega_t + \omega_t(ty) + \sum_{k=1}^{p-1} \tilde{s}(x, ty),$$

avec$k\tilde{s}(x, ty)$ le coefficient de Z^{p-1} dans l'expression formelle $m_t(xZ + ty, x)$.

Remarque. La condition (5.20) assure que l'objet déformé $(A, L[[t]], m_t, \sigma_t)$ est une algèbre de Lie-Rinehart. Les conditions (5.20) et (5.21) assurent que $(L[[t]], m_t, \omega_t)$ est une algèbre de Lie restreinte. De plus, si les conditions (5.22) and (5.23) sont satisfaites, alors $(A, L[[t]], m_t, \omega_t, \sigma_t)$ est une algèbre de Lie-Rinehart restreinte. En effet, supposons que l'équation (5.20) est vérifiée. Il est immédiat de vérifier que m_t est une multidérivation de symbole σ_t. Par la proposition 3.2.1, $(A, L[[t]], m_t, \sigma_t)$ est une algèbre de Lie-Rinehart. Si de plus l'équation (5.21) est vérifiée, alors ω_t est une p-opération compatible avec m_t. Ainsi, $(L[[t]], m_t, \omega_t)$ est une algèbre de Lie restreinte. Maintenant, supposons que les autre équations (5.20), (5.21), (5.22) et (5.23) sont vérifiées. On sait déjà que $(A, L[[t]], m_t, \sigma_t)$ est une algèbre de Lie-Rinehart et que $(L[[t]], m_t, \omega_t)$ est une algèbre de Lie restreinte. Il reste à vérifier que ω_t et σ_t satisfont les équations (5.16) et (5.17) de la définition 5.3.7. Supposons que (5.22) est vérifiée. On a alors

$$\sum_{k \geq 0} t^k \sum_{i=0}^{k} \sigma_i\left(\omega_{k-i}(x)\right)(a) = \sum_{k \geq 0} t^k \sum_{i_1+\cdots+i_p=k} \sigma_{i_1}(x) \circ \cdots \circ \sigma_{i_p}(x)(a),$$

ce qui est équivalent à

$$\sum_{i,j \geq 0} t^k \sum_{i=0}^{k} \sigma_i\left(\omega_j(x)\right)(a) = \left(\sum_{k \geq 0} \sigma_k(x)\right)^p (a).$$

Ainsi,

$$\sigma_t\left(\omega_t(x)\right)(a) = \sigma_t(x)^p(a).$$

La condition (5.23) est obtenue d'une façon similaire.

Définition 5.4.2. Si les conditions (5.22) et (5.23) de la définition 5.4.1 ne sont pas vérifiées, la déformation est appelée *déformation faible.*

Notation. Si f est une application à deux variables, on utilisera la notation

$$f[x_1, \cdots, x_n] := f(f(\cdots f(x_1, x_2), x_3), \cdots, x_n).$$

Remarque. Tous les résultats suivants concernant les déformations restreintes, équivalences et obstructions sont également valides pour les algèbres de Lie restreintes, en "oubliant" la structure de Lie-Rinehart. Avoir une déformation faible est suffisant pour que ces résultats sur les algèbres de Lie restreintes soient valables.

Lemme 5.4.3. *Soit (m_t, ω_t) une déformation restreinte de (m, ω). Alors ω_1 possède la propriété $(*)$ relativement à m_1.*

Preuve. Soient $\lambda \in \mathbb{F}$, $x \in L$.

- $\omega_t(\lambda x) = \lambda^p\, \omega_t(x) \Leftrightarrow \omega(\lambda x) + t\, \omega_1(\lambda x) + \sum_{i\geq 2} t^i\, \omega_i(\lambda x) = \lambda^p \left(\omega(x) + t\, \omega_1(x) + \sum_{i\geq 2} t^i\, \omega_i(x)\right).$
  En identifiant les coefficients de t dans l'équation ci-dessus, on obtient $\omega_1(\lambda x) = \lambda^p\, \omega_1(x)$.
- Les calculs suivants sont faits modulo t^2. On a

$$m_t[x_1, \cdots, x_p] = m[x_1, \cdots, x_p] + t\left(\sum_{k=0}^{p-2} m\left[m_1(m[x_1, \cdots, x_{p-k-1}], x_{p-k}), x_{p-k+1}, \cdots, x_p\right]\right). \tag{5.24}$$

  Notons (✠) les conditions $(x_i \in \{x, y\},\ x_1 = x,\ x_2 = y)$. Avec la définition de ω_t et l'équation (5.6), on a

$$\begin{aligned}\omega_t(x+y) &= \omega_t(x) + \omega_t(y) + \sum_{(✠)} \frac{1}{\sharp\{x\}} m_t\left[x_1, x_2, \cdots, x_p\right]\\ &= \omega(x) + \omega(y) + \sum_{(✠)} \frac{1}{\sharp\{x\}} m\left[x_1, x_2, \cdots, x_p\right]\\ &\quad + t\sum_{(✠)}\left(\sum_{k=0}^{p-2} m\left[m_1(m[x_1, \cdots, x_{p-k-1}], x_{p-k}), x_{p-k+1}, \cdots, x_p\right]\right) \mod (t^2).\end{aligned}$$

  On a également $\omega_t(x+y) = \omega(x+y) + t\, \omega_1(x+y) \mod (t^2)$. En comparant les coefficients dans les expressions ci-dessus, on obtient

$$\omega(x+y) = \omega(x) + \omega(y) + \sum_{(✠)} \frac{1}{\sharp\{x\}} m[x_1, \cdots, x_p]; \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned}\omega_1(x+y) &= \omega_1(x) + \omega_1(y) + \sum_{(✠)}\left(\sum_{k=0}^{p-2} m\left[m_1(m[x_1, \cdots, x_{p-k-1}], x_{p-k}), x_{p-k+1}, \cdots, x_p\right]\right)\\ &= \omega_1(x) + \omega_1(y) + \sum_{(✠)}\left(\sum_{k=0}^{p-2} (-1)^k m\left(x_p x_{p-1} \cdots x_{p-k-1} m_1([x_1, \cdots, x_{p-k-1}], x_{p-k})\right)\right).\end{aligned} \tag{5.26}$$

On conclut que ω_1 possède la propriété $(*)$ relativement à m_1.

$\square$

Remarque sur l'action adjointe. Rappelons que $m = [\cdot,\cdot]$; si $x, y \in L$, on a $\mathrm{ad}_y(x) = [y,x] = -[x,y]$, donc $y \cdot x = \mathrm{ad}_y(x) = -m(x,y)$.

Exemple : le cas $p = 3$. Soit (m,ω) une multidérivation restreinte associée à une algèbre de Lie-Rinehart restreinte $\Big(A, L, [\cdot,\cdot], (\cdot)^{[p]}, \rho\Big)$. Considérons une déformation infinitésimale (m_t, ω_t) de (m,ω) donnée par $m_t = m + tm_1,\ \omega_t = \omega + t\,\omega_1$, et soient $x, y \in L$.

$$\begin{aligned}
\omega_t(x+y) - \omega_t(x) - \omega_t(y) &= \sum_{\substack{x_k \in \{x,y\} \\ x_1 = x,\ x_2 = y}} \frac{1}{\sharp\{x\}} m_t(m_t(x_1,x_2),x_3) \\
&= 2m_t(m_t(x,y),x) + m_t(m_t(x,y),y) \\
&= 2\left([[x,y],x] + tm_1([x,y],x) + t[m_1(x,y),x]\right) \\
&\quad + [[x,y],y] + tm_1([x,y],y) + t[m_1(x,y),y].
\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de t des deux côtés, on obtient

$$\omega_1(x+y) - \omega_1(x) - \omega_2(x) = 2m_1([x,y],x) + 2m_1[m_1(x,y),x] + m([x,y],y) + [m(x,y),y],$$

ce qui est équivalent à dire que ω_1 satisfait la propriété $(*)$ relativement à m_1.

Théorème 5.4.4. *Soit (m_t,ω_t) une déformation restreinte de (m,ω). Alors (m_1,ω_1) est un 2-cocyle de la cohomologie restreinte.*

Preuve. Par le lemme précédent, $(m_1,\omega_1) \in C^2_*(L,L)$. La théorie ordinaire des déformations assure que $m_1 \in Z^2_{CE}(L,L)$. Il reste à montrer que l'application induite $\mathrm{ind}^2(m_1,\omega_1)$ est nulle. On développe l'équation

$$m\left(x,\omega_t(y)\right)_t = m_t(m_t(\cdots m_t(x,\overbrace{y),y),\cdots,y}^{p \text{ terms}}). \tag{5.27}$$

D'une part,

$$\begin{aligned}
m_t\left(x,\omega_t(y)\right) &= m\left(x,\omega_t(y)\right) + tm_1(x,\omega_t(y)) + \sum_{i\geq 2} t^i m_i(x,\omega_t(y)) \\
&= m\left(x,\omega(y)\right) + tm(x,\omega_1(y)) + tm_1(x,\omega(y)) \mod (t^2).
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
m_t(m_t(\cdots m_t(x,\overbrace{y),y),\cdots,y}^{p \text{ termes}}) &= \sum_{i_p}\cdots\sum_{i_1} t^{i_1+\cdots+i_p} m_{i_p}\left(m_{i(p-1)}(\cdots(m_{i_1}(x,y),y),\cdots,y),y\right) \\
&= m[x,y,\cdots,y] + t\sum_{\substack{i_k = 0 \text{ ou } 1 \\ \sharp\{k,\ i_k=1\}=1}} m_{i_p}\left(\cdots(m_{i_1}(x,y),y),\cdots,y),y\right) \mod (t^2) \\
&= m[x,y,\cdots,y] + t\sum_{i+j=p-1} m\left[m_1(m[x,\overbrace{y,\cdots,y}^{j}],y),\overbrace{y,\cdots,y}^{i}\right] \mod (t^2) \\
&= m[x,y,\cdots,y] + t\sum_{i+j=p-1} (-1)^i y^i m_1(m[x,\overbrace{y,\cdots,y}^{j}],y) \mod (t^2).
\end{aligned}$$

On obtient finalement l'équation

$$m\left(x, \omega(y)\right)+t\left(m(x, \omega_1(y))+m_1(x, \omega(y))\right)=m[x, y, \cdots, y]+t \sum_{i+j=p-1}(-1)^i y^i m_1(m[x, \overbrace{y, \cdots, y}^{j}], y) \tag{5.28}$$

En identifiant les coefficients de t^0 et t, on retrouve l'identité classique $m(x, \omega(y))=m[x, y, \cdots, y]$ et la nouvelle identité

$$\left(m(x, \omega_1(y))+m_1(x, \omega(y))\right)=\sum_{i+j=p-1}(-1)^i y^i m_1([x, \overbrace{y, \cdots, y}^{j}], y), \tag{5.29}$$

ce qui est équivalent à dire que $\operatorname{ind}^2(m_1, \omega_1)=0$. On en conclut que (m_1, ω_1) est un 2-cocycle de la cohomologie restreinte. □

Remarque. En oubliant la structure de Lie-Rinehart et en construisant une déformation $(L[[t]], m_t, \omega_t)$ de l'algèbre de Lie restreinte $(L[[t]], m, \omega)$, on retrouve le même résultat pour les algèbres de Lie restreintes, prouvé dans [EF08].

5.4.2 Équivalence de déformations formelles restreintes

Soit $\phi : L[[t]] \longrightarrow L[[t]]$ un automorphisme formel défini sur L par

$$\phi(x)=\sum_{i \geq 0} t^i \phi_i(x),\ \ \phi_i : L \longrightarrow L\ \ \mathbb{F}\text{-linéaire},\ \ \phi_0=\mathrm{id},$$

puis étendu par $\mathbb{F}[[t]]$-linéarité.

Définition 5.4.5. Soient (m_t, ω_t) et (m_t', ω_t') deux déformations formelles restreintes de (m, ω). Elles sont dites *équivalentes* (par ϕ) si pour tous $x, y \in L$, on a

$$m_t(\phi(x), \phi(y))=\phi\left(m_t'(x, y)\right) \tag{5.30}$$

et

$$\phi\left(\omega_t(x)\right)=\omega_t'\left(\phi(x)\right). \tag{5.31}$$

Lemme 5.4.6. *Soit (m_t, ω_t) et (m_t', ω_t') deux déformations formelles restreintes équivalentes de (m, ω). Alors il existe $\psi : L \longrightarrow L$ tel que, $\forall x, y \in L$,*

$$m_1(x, y)-m_1'(x, y)=\psi\left(m(x, y)\right)-m\left(x, \psi(y)\right)-m\left(\psi(x), y\right) \tag{5.32}$$

et

$$\omega_1(x)-\omega_1'(x)=m[\psi(x), \overbrace{x, \cdots, x}^{p-1}]-\psi(\omega(x)). \tag{5.33}$$

Si l'équivalence est donnée par $\phi=\sum_{i \geq 0} t^i \phi_i$, alors $\psi=\phi_1$.

Preuve.

$$m_t(\phi(x), \phi(y))=\phi\left(m_t'(x, y)\right) \Longleftrightarrow \sum_{k \geq 0} t^k m_t(\phi(x), \phi(y))=\sum_{k \geq 0} t^k \phi\left(m_t'(x, y)\right).$$

On déduit que

$$m(\phi(x), \phi(y))+t m_1(\phi(x), \phi(y))=\phi(m(x, y))+t \phi(m_1'(x, y)) \mod (t^2)$$

$$\Rightarrow m\left(\sum_{i\geq 0} t^i\phi_i(y), \sum_{j\geq 0} t^j\phi_j(y)\right) + tm_1\left(\sum_{i\geq 0} t^i\phi_i(y), \sum_{j\geq 0} t^j\phi_j(y)\right)$$
$$= \sum_{i\geq 0} t^i\phi_i(m(x,y)) + t\sum_{j\geq 0} t^j\phi_j(m_1'(x,y)) \mod (t^2)$$
$$\Rightarrow m(x,y) + t\left(m(x,\phi_1(y)) + m(\phi_1(x),y) + m_1(x,y)\right) = m(x,y) + t\left(\phi_1(m(x,y)) + m_1'(x,y)\right) \mod (t^2).$$

En identifiant les coefficients de t, on obtient la première identité. Puis,

$$\phi\left(\omega_t(x)\right) = \omega\left(\phi(x)\right) \Rightarrow \phi\left(\sum_{i>0} t^i\,\omega_i(x)\right) = \omega_t'\left(x + t\phi_1(x)\right) \mod (t^2)$$
$$\Rightarrow \omega(x) + t\left(\omega_1(x) + \phi_1(\omega(x))\right) = \omega_t'\left(x + t\phi_1(x)\right) \mod (t^2).$$

Calculons le membre de droite de l'équation ci-dessus. On note encore $(\maltese)$ les conditions $(x_i \in \{x,y\},\ x_1 = x,\ x_2 = y)$, où on note provisoirement $y = t\phi_1(x)$. On a

$$\begin{aligned}
\omega_t'\left(x + t\phi_1(x)\right) &= \omega_t'(x) + \omega_t'(y) + \sum_{(\maltese)} \frac{1}{\sharp\{x\}} m_t[x_1,\cdots,x_p] \\
&= \omega_t'(x) + \omega_t'(y) + \sum_{(\maltese)} \frac{1}{\sharp\{x\}} m[x_1,\cdots,x_p] \mod (t^2) \\
&= \omega_t'(x) + \omega_t'(t\phi_1(x)) + \frac{1}{p-1} m[x, t\phi_1(x), x, x, \cdots, x] \mod (t^2) \\
&= \omega_t'(x) - tm[x,\phi_1(x),x,x,\cdots,x] \mod (t^2) \\
&= \omega(x) + t\left(\omega_1'(x) - m[x,\phi_1(x),x,x,\cdots,x]\right) \mod (t^2).
\end{aligned}$$

Avec ce résultat, on a

$$\omega(x) + t\left(\omega_1(x) + \phi_1(\omega(x))\right) = \omega(x) + t\left(\omega_1'(x) - m[x,\phi_1(x),x,x,\cdots,x]\right) \mod (t^2).$$

En identifiant les coefficients de t dans l'équation précédente, on obtient

$$\omega_1(x) - \omega_1'(x) = m[\phi_1(x), \overbrace{x,\cdots,x}^{p-1}] - \phi_1(\omega(x)),$$

ce qui l'identité désirée. □

Remarque. Le lemme 5.4.6 justifie les définitions données dans [EF08] et [ET00] dans le cas des déformations infinitésimales.

Théorème 5.4.7. *Soient (m_t,ω_t) et (m_t',ω_t') deux déformations formelles restreintes de (m,ω). Alors leurs éléments infinitésimaux sont dans la même classe de cohomologie.*

Preuve. Soient (m_t,ω_t) et (m_t',ω_t') deux déformations formelles restreintes équivalentes via $\phi = \sum_{i\geq 0} t^i\phi_i$. Par le lemme 5.4.6, on a

$$m_1(x,y) - m_1'(x,y) = \phi_1\left(m(x,y)\right) - m\left(x,\phi_1(y)\right) - m\left(\phi_1(x),y\right) \text{ et} \tag{5.34}$$

$$\omega_1(x) - \omega_1' = m[\phi_1(x), \overbrace{x,\cdots,x}^{p-1}] - \psi(\omega(x)). \tag{5.35}$$

On peut facilement vérifier que ϕ_1 appartient à $C^1_{CE}(L,L)$. On peut alors calculer $d^1_*(\phi_1) = \Big(d^1_{CE}(\phi_1), \operatorname{ind}^1(\phi_1)\Big)$.

$$\begin{aligned}\Big(d^1_{CE}(\phi_1)\Big)(x,y) &= x\cdot\phi_1(y) - y\cdot\phi_1(x) - \phi_1(m(x,y))\\ &= m(x,\phi_1(y)) - m(y,\phi_1(x)) - \phi_1(m(x,y))\\ &= m(x,\phi_1(y)) + m(\phi_1(x),y) - \phi_1(m(x,y))\\ &= -\left(\phi_1(m(x,y)) - m(x,\phi_1(y)) - m(\phi_1(x),y)\right).\end{aligned}$$

EN utilisant l'équation (5.34), on déduit que $m_1(x,y) - m_1'(x,y) = -d^1\phi_1(x,y)$, donc $(m_1 - m_1') \in B^2_{CE}(L,L)$.

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}^1(\phi_1) &= \phi_1\left(\omega(x)\right) - m[\phi_1(x), x, x, \cdots, x]\\ &= -\left(\omega_1(x) - \omega_1'(x)\right).\end{aligned}$$

Finalement, $(m_1 - m_1',\ \omega_1 - \omega_1') = -d^1_*\phi_1 \in B^2_*(L,L)$. On conclut que (m_1,ω_1) et(m_1',ω_1') diffèrent d'un cobord, ces deux éléments sont donc dans la même classe de cohomologie restreinte. □

Définition 5.4.8. Soit (m_t,ω_t) une déformation formelle restreinte de (m,ω). La déformation est dite *triviale* s'il existe un automorphisme formel ϕ tel que

$$\phi\left(m(x,y)\right) = m_t(\phi(x),\phi(y)) \tag{5.36}$$

et

$$\phi\left(\omega_t(x)\right) = \omega\left(\phi(x)\right). \tag{5.37}$$

Proposition 5.4.9. *La déformation* $(m + tm_1, \omega + t\,\omega_1)$ *est triviale si et seulement si* (m_1,ω_1) *est un cobord restreint.*

Preuve. En développant l'équation(5.36) modulo (t^2), on obtient que m_1 est un cobord de Chevalley-Eilenberg. Plus précisément, on a $m_1 = -d^1_{CE}(\phi_1)$. Focalisons-nous sur le membre de droite de l'équation (5.37). Les calculs suivants sont faits modulo t^2, pour $x \in L$:

$$\begin{aligned}\omega\left(\phi(x)\right) &= \omega\left(\sum_i t^i\phi_i(x)\right)\\ &= \omega\left(x + t\phi_1(x)\right)\\ &= \omega(x) + \omega\left(t\phi_1(x)\right) + \sum_{\substack{x_i\in\{x,\ t\phi_1(x)\}\\ x_{p-1}=t\phi_1(x),\ x_p=x}} \frac{1}{\sharp\{x\}} m(x_1, m(\cdots, m(x_{p-1},x_p)\cdots)).\\ &= \omega(x) + \omega\left(t\phi_1(x)\right) + \frac{1}{p-1} m(x, m(x, \cdots m(t\phi_1(x), x)\cdots))\\ &= \omega(x) + \omega\left(t\phi_1(x)\right) + t\operatorname{ad}_x^{p-1}\circ\phi_1(x).\end{aligned}$$

Pour le membre de gauche, on a (mod t^2) :

$$\phi\left(\omega_t(x)\right) = \left(\sum_i t^i\phi_i\left(\omega_t(x)\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i \sum_j t^{i+j} \phi_i\left(\omega_j(x)\right) \\
&= \omega(x) + t\left(\omega_1(x) + \phi_1\left(\omega(x)\right)\right).
\end{aligned}
$$

On déduit que

$$\omega_1(x) + \phi_1\left(\omega(x)\right) = \mathrm{ad}_x^{p-1} \circ \phi_1(x), \tag{5.38}$$

ce qui peut être réécrit

$$\omega_1(x) = -\phi_1\left(\omega(x)\right) + \mathrm{ad}_x^{p-1} \circ \phi_1(x) = -\operatorname{ind}^1(\phi_1)(x). \tag{5.39}$$

□

Remarque. En oubliant le structure de Lie-Rinehart et en construisant une déformation $(L[[t]], m_t, \omega_t)$ de l'algèbre de Lie restreinte $(L[[t]], m, \omega)$, on retrouve les mêmes résultats pour les algèbres de Lie restreintes, démontrées dans [EF08]. De plus, on a introduit le concept de déformation restreinte triviale.

5.4.3 Obstructions

Soient $\left(A, L, [\cdot,\cdot], (-)^{[p],\rho}\right)$ une algèbre de Lie-Rinehart restreinte, (m, ω) la multidérivation restreinte associée et $n \geq 1$. Une déformation restreinte est dite d'ordre n si elle est donnée par

$$m_t^n = \sum_{i=0}^n t^i m_i; \quad \omega_t^n = \sum_{i=0}^n t^i \, \omega_i\,.$$

Définition 5.4.10. Soit (m_t^n, ω_t^n) une déformation d'ordre n of (m, ω). On définit pour $x, y, z \in L$, les applications

$$
\begin{aligned}
\mathrm{obs}_{n+1}^{(1)}(x,y,z) &= \sum_{i=1}^n \left(m_i(x, m_{n+1-i}(y,z)) + m_i(y, m_{n+1-i}(z,x)) + m_i(z, m_{n+1-i}(x,y))\right); \\
\mathrm{obs}_{n+1}^{(2)}(x,y) \quad &= \sum_{\substack{0 \leq i_k \leq n \\ i_1+\cdots+i_p=n+1}} m_{i_p}\left(m_{i_{p-1}}(\cdots(m_{i_1}(x,y),y),\cdots,y),y\right) - \sum_{i=1}^n m_i(x, \omega_{n+1-i}(y)).
\end{aligned}
$$

Proposition 5.4.11. *Soit (m_t^n, ω_t^n) une déformation d'ordre n de (m, ω). Soit $(m_{n+1},\ \omega_{n+1}) \in C_*^2(L, L)$. Alors $\left(m_t^n + t^{n+1} m_{n+1},\ \omega_t^n + t^{n+1}\, \omega_{n+1}\right)$ est une déformation d'ordre $(n+1)$ si (m, ω) si et seulement si*

$$\left(obs_{n+1}^{(1)}, obs_{n+1}^{(2)}\right) = d_*^2\left(m_{n+1},\ \omega_{n+1}\right).$$

Preuve. Soit $\left(m_t^n + t^{n+1} m_{n+1},\ \omega_t^n + t^{n+1}\, \omega_{n+1}\right)$ une déformation d'ordre $(n+1)$ de L. L'élément $m_t^n + t^{n+1} m_{n+1}$ vérifie l'identité de Jacobi, ce qui peut se réécrire

$$\sum_{q=0}^{n+1} t^q \sum_{i=0}^q \left(m_i(x, m_{q-i}(y,z)) + m_i(y, m_{q-i}(z,x)) + m_i(z, m_{q-i}(x,y))\right) = 0.$$

En identifiant les coefficients de t^{n+1}, on obtient

$$\sum_{i=0}^{n+1} \left(m_i(x, m_{n+1-i}(y,z)) + m_i(y, m_{n+1-i}(z,x)) + m_i(z, m_{n+1-i}(x,y)) \right) = 0.$$

En isolant les premiers et derniers termes de la somme, on obtient

$$\begin{aligned} & m(x, m_{n+1}(y,z)) + m(y, m_{n+1}(z,x)) + m(z, m_{n+1}(x,y) \\ & + m_{n+1}(x, m(y,z)) + m_{n+1}(y, m(z,x)) + m_{n+1}(z, m(x,y)) \\ & + \sum_{i=1}^{n} \left(m_i(x, m_{n+1-i}(y,z)) + m_i(y, m_{n+1-i}(z,x)) + m_i(z, m_{n+1-i}(x,y)) \right) = 0. \end{aligned}$$

Rappelons la définition de la différentielle de Chevalley-Eilenberg d'ordre 2 :

$$d^2_{CE}\varphi(x,y,z) = \varphi([y,z],x) - \varphi([x,z],y) + \varphi([x,y],z) - [x, \varphi(y,z)] + [y, \varphi(x,z)] - [z, \varphi(x,y)].$$

En utilisant les deux dernières équations avec $\varphi = m_{n+1}$, en se rappelant que $m = [\cdot,\cdot]$ et par anti-symétrie, on obtient finalement

$$\sum_{i=1}^{n} \left(m_i(x, m_{n+1-i}(y,z)) + m_i(y, m_{n+1-i}(z,x)) + m_i(z, m_{n+1-i}(x,y)) \right) = d^2_{CE} m_{n+1}(x,y,z),$$

ce qui signifie exactement que $d^2_{CE} m_{n+1}(x,y,z) = \mathrm{obs}^{(1)}_{n+1}(x,y,z)$.

Notons $\omega_t^n + t^{n+1}\omega_{n+1} := \omega_t^{n+1}$. Si ω_t^{n+1} est une déformation d'ordre $(n+1)$, alors elle satisfait l'équation

$$m_t^{n+1}\left(x, \omega_t^{n+1}(y)\right) = m_t^{n+1}(m_t^{n+1}(\cdots m_t^{n+1}(\overbrace{x,y),y),\cdots,y}^{p \text{ termes}}). \tag{5.40}$$

En développant et identifiant les coefficients de t^{n+1}, on obtient

$$\sum_{i=0}^{n+1} m_i(x, \omega_{n+1-i}(y)) = \sum_{\substack{0 \leq i_k \leq n+1 \\ i_1+\cdots+i_p = n+1}} m_{i_p}\left(m_{i(p-1)}(\cdots(m_{i_1}(x,y),y),\cdots,y),y \right),$$

ce qui peut être réécrit

$$\begin{aligned} & m(x, \omega_{n+1}(y)) + m_{n+1}(x, \omega(y)) - \sum_{i+j=p-1} m \left[m_{n+1}(m[x, \overbrace{y,\cdots,y}^{j}], y), \overbrace{y,\cdots,y}^{i} \right] \\ = & \sum_{\substack{0 \leq i_k \leq n \\ i_1+\cdots+i_p = n+1}} m_{i_p}\left(m_{i(p-1)}(\cdots(m_{i_1}(x,y),y),\cdots,y),y \right) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x, \omega_{n+1-i}(y)) \end{aligned}$$

Avec la définition de $\mathrm{ind}^2(m_{n+1}, \omega_{n+1})$, on a finalement

$$d^2_*(m_{n+1}, \omega_{n+1}) = \left(d^2_{CE} m_{n+1}, \mathrm{ind}^2(m_{n+1}, \omega_{n+1}) \right) = \left(\mathrm{obs}^{(1)}_{n+1}, \mathrm{obs}^{(2)}_{n+1} \right).$$

Réciproquement, si la précédente équation est vérifiée, le même calcul montre que $(m_t^n + t^{n+1} m_{n+1},\ \omega_t^n + t^{n+1}\omega_{n+1})$ est une déformation d'ordre $(n+1)$ de (m, ω). □

On stoppe nos calculs d'obstructions ici. Il manque le résultat "$\left(\mathrm{obs}^{(1)}_{n+1}, \mathrm{obs}^{(2)}_{n+1} \right)$ est un 3-cocycle de la cohomologie restreinte", mais comme on l'a vu précédemment, on n'a pas d'expression pour d^3_*, ce résultat est hors de notre portée pour le moment.

Remarque. En oubliant la structure de Lie-Rinehart et en construisant une déformation d'ordre n $(L[[t]], m_t^n, \omega_t^n)$ de l'algèbre de Lie restreinte $(L[[t]], m, \omega)$, on retrouve les mêmes résultats pour les algèbre de Lie restreintes, également nouveaux à notre connaissance.

5.4.4 Opérateurs de Nijenhuis restreints

Soit $\left(L, [\cdot,\cdot], (\cdot)^{[p]}\right)$ une algèbre de Lie restreinte.

Définition 5.4.12. Une application linéaire $N : L \to L$ est appelée *opérateur de Nijenhuis restreint* sur L si

$$N\Big([N(x), y] + [x, N(y)] - N([x, y])\Big) = [N(x), N(y)] \tag{5.41}$$

$$N\left(N(x^{[p]}) - \mathrm{ad}_x^{p-1} \circ N(x)\right) = N(x)^{[p]}, \qquad x, y \in L. \tag{5.42}$$

On définit deux applications sur L par

$$[x, y]_N = [N(x), y] + [x, N(y)] - N([x, y]) \tag{5.43}$$

$$x^{[p]_N} = N(x^{[p]}) - \mathrm{ad}_x^{p-1} \circ N(x). \tag{5.44}$$

Proposition 5.4.13. *La couple $\left([\cdot,\cdot]_N, (\cdot)^{[p]}\right)$ est un 2-cocycle restreint. De plus, la déformation formelle restreinte donnée par*

$$[x, y]_t = [x, y] + t[x, y]_N, \quad x^{[p]_t} = x^{[p]} + tx^{[p]_N} \tag{5.45}$$

est triviale.

Preuve. Par définition, on a

$$[x, y]_N = d^1_{CE} N(x, y)$$
$$x^{[p]_N} = \mathrm{ind}^1 N(x).$$

Ainsi, $\left([\cdot,\cdot]_N, (\cdot)^{[p]}\right)$ est un 2-cobord restreint. □

5.5 Algèbres de Heisenberg restreintes

Les origines de la mécanique quantique reposent dans l'idée novatrice de Heisenberg de considérer les composantes du vecteur position $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ et du vecteur moment $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ d'une particule à un instant t donné comme des opérateurs sur un certain espace de Hilbert. Ces composantes doivent alors satisfaire les relations

$$[q_j, q_k] = 0, \ [p_j, p_k] = 0, \ [p_j, q_k] = -i\hbar\delta_{j,k},$$

avec i la racine carrée de -1, $j, k \in \{1, 2, 3\}$ et $\hbar$ la constante de Planck réduite. Ces relations peuvent être étendues à tous vecteurs $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Weyl reconnut dans ces relations une représentation d'une algèbre de Lie sous-jacente. Habituellement, on considère donc ces relations comme définissant une algèbre de Lie de dimension $2n + 1$ en ajoutant un élément central z tel que

$$[q_j, q_k] = [p_j, p_k] = [p_j, z] = [q_j, z] = 0, \ [p_j, q_k] = \delta_{j,k} z.$$

Cette algèbre de Lie de dimension $(2n + 1)$ est appelée *algèbre de Heisenberg*. On peut la voir comme une extension centrale de l'algèbre commutative $\mathbb{R}^{2n}$ par une copie de $\mathbb{R}$ engendrée par z. On peut trouver beaucoup plus d'informations dans [WP17], d'où nous avons tiré cette introduction.

Dans cette section, on étudie des exemples basés sur l'algèbre de Lie de Heisenberg de dimension 3 sur des corps de caractéristique $p \geq 3$. On étudie la structure restreinte de l'algèbre de Heisenberg, puis on donne une description explicite du second groupe de cohomologie restreinte à coefficients adjoints. Enfin, on donne un exemple d'algèbre de Lie-Rinehart restreinte construite sur une algèbre de Heisenberg restreinte et on étudie ses déformations. Les algèbres de Heisenberg p-nilpotentes ont également été étudiées dans [SU16].

5.5.1 Structures restreintes sur l'algèbre de Heisenberg

Soit $\mathbb{F}$ un corps de caractéristique $p \geq 3$. On considère l'*algèbre de Heisenberg* $\mathcal{H} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}\{x, y, z\}$ définie par le crochet $[x, y] = z$. Cette algèbre de Lie est nilpotente d'ordre 2, donc tous les crochets itérés p fois sur $\mathcal{H}$ sont nuls. Soit $(\cdot)^{[p]}$ une p-opération sur $\mathcal{H}$. On a alors $(u+v)^{[p]} = u^{[p]}+v^{[p]}$, pour tous $u, v \in \mathcal{H}$. Ainsi, toute p-opération sur $\mathcal{H}$ est p-semilinéaire.

Remarque. Dans [EM22] et dans le chapitre 4, $\mathcal{H}$ est notée $L^2_{3|0}$.

Proposition 5.5.1. *Toute p-opération sur $\mathcal{H}$ est donnée par $x^{[p]} = \theta(x)z,\ y^{[p]} = \theta(y)z,\ z^{[p]} = \theta(z)z$, avec $\theta : \mathcal{H} \to \mathbb{F}$ une forme linéaire sur $\mathcal{H}$.*

Preuve. Grâce au théorème de Jacobson (5.1.16), il suffit de vérifier que

$$(\mathrm{ad}_x)^p - \theta(x)\,\mathrm{ad}_z = (\mathrm{ad}_y)^p - \theta(y)\,\mathrm{ad}_z = (\mathrm{ad}_z)^p - \theta(z)\,\mathrm{ad}_z = 0$$

pour obtenir la première affirmation. Mais ces identités sont toujours vraies, puisque z est dans le centre de $\mathcal{H}$. Réciproquement, soit $(\cdot)^{[p]}$ une p-opération sur $\mathcal{H}$. La deuxième condition de la définition 5.1.5 assure que l'image de $(\cdot)^{[p]}$ est dans le centre de $\mathcal{H}$, qui est de dimension 1 et engendré par z. Ainsi, il existe une forme linéaire $\theta : \mathcal{H} \to \mathbb{F}$ telle que $x^{[p]} = \theta(x)z,\ y^{[p]} = \theta(y)z,\ z^{[p]} = \theta(z)z$. $\square$

Notation. On note $(\mathcal{H}, \theta)$ une algèbre de Heisenberg restreinte dont la p-opération est caractérisée par la forme linéaire θ.

Remarque. Soit $u \in (\mathcal{H}, \theta),\ u = \alpha x+\beta y+\gamma z,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$. Alors $u^{[p]} = \left(\alpha^p\theta(x) + \beta^p\theta(y) + \gamma^p\theta(z)\right) z$.

Lemme 5.5.2. *Soient $(\mathcal{H}, \theta)$ et $(\mathcal{H}, \theta')$ deux algèbres de Heisenberg restreintes. Alors, tout isomorphisme de Lie $\phi : (\mathcal{H}, \theta) \to (\mathcal{H}, \theta')$ est de la forme*

$$\begin{cases} \phi(x) &= ax + by + cz \\ \phi(y) &= dx + ey + fz \\ \phi(z) &= (ae - bd)z, \quad ae - bd \neq 0, \end{cases} \tag{5.46}$$

avec $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{F}$. De plus, ϕ est un isomorphisme restreint si et seulement si

$$\begin{cases} \theta(x)u &= a^p\theta'(x) + b^p\theta'(y) + c^p\theta'(z) \\ \theta(y)u &= d^p\theta'(x) + e^p\theta'(y) + f^p\theta'(z) \\ \theta(z)u &= u^p\theta'(z), \end{cases} \tag{5.47}$$

avec $u := ae - bd \neq 0$.

Preuve. Un isomorphisme de Lie $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ doit satisfaire $\phi([v, w]) = [\phi(v), \phi(w)]$, avec $v, w \in \mathcal{H}$, ainsi que $\det(\phi) = 0$. En appliquant ces conditions à une application linéaire $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, on obtient les conditions (5.46). Puis, ϕ est un morphisme restreint sur $\mathcal{H}$si et seulement si

$\phi\left(v^{[p]}\right) = \phi(v)^{[p]'}$, avec $v \in \mathcal{H}$ et $(\cdot)^{[p]'}$ la p-opération sur $\mathcal{H}$ donnée par la forme linéaire θ'. On obtient les conditions (5.47) en évaluant cette équation sur la base de $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}\phi\left(x^{[p]}\right) = \phi(x)^{[p]'} &\implies \theta(x)\phi(z) = (ax+by+cz)^{[p]'}\\ &\implies \theta(x)uz = \theta'(x)z + b^p\theta'(y)z + c^p\theta'(z)z\\ &\implies \theta(x)u = \theta'(x) + b^p\theta'(y)z + c^p\theta'(z),\end{aligned}$$

les deux autres étant obtenues d'une façon analogue. □

Théorème 5.5.3. *Il y a trois algèbres de Heisenberg restreintes de dimension 3 non-isomorphes, données respectivement par les formes linéaires $\theta = 0$, $\theta = x^*$ et $\theta = z^*$.*

Preuve.
- D'abord, montrons que $(\mathcal{H}, x^*)$ est isomorphe (au sens restreint) à $(\mathcal{H}, y^*)$. En posant $\theta = x^*$ et $\theta' = y^*$, les conditions (5.47) se réduisent à $\{u = b^p,\ e^p = 0\}$. Il suffit alors de choisir $e = 0, b \neq 0$ et $d = -b^{p-1}$ pour construire un isomorphisme restreint adapté entre $(\mathcal{H}, x^*)$ et $(\mathcal{H}, y^*)$.
- Soient $\theta = 0$ et $\theta' = x^*$. Alors, les conditions (5.47) se réduisent à $\{a^p = 0,\ d^p = 0\}$, ce qui est impossible puisque $u = ae - bd \neq 0$. Ainsi, $(\mathcal{H}, 0)$ et $(\mathcal{H}, x^*)$ ne sont pas isomorphes.
- Soient $\theta = 0$ et $\theta' = z^*$. Alors, les conditions (5.47) se réduisent à $\{c^p = 0,\ f^p = 0,\ u^p = 0\}$, ce qui est impossible puisque $u \neq 0$. Ainsi, $(\mathcal{H}, 0)$ et $(\mathcal{H}, z^*)$ ne sont pas isomorphes.
- Soient $\theta = x^*$ et $\theta' = z^*$. Alors, les conditions (5.47) se réduisent à $\{c^p = u,\ f^p = 0,\ u^p = 0\}$, ce qui est impossible puisque $u \neq 0$. Ainsi, $(\mathcal{H}, x^*)$ et $(\mathcal{H}, z^*)$ ne sont pas isomorphes.

□

Remarque. Les algèbres de Lie restreintes $(\mathcal{H}, 0)$ et $(\mathcal{H}, x^*)$ apparaissaient déjà dans [SU16] et sont p-nilpotentes.

5.5.2 Cohomologie restreinte des algèbres de Heisenberg restreintes

Dans cette section, on calcule le second groupe de cohomologie restreinte à coefficients adjoints des algèbres de Heisenberg restreintes. Soit θ une forme linéaire sur l'algèbre de Heisenberg (ordinaire). Notons $(\mathcal{H}, \theta)$ l'algèbre de Heisenberg restreinte obtenue avec θ (voir la proposition 5.5.1). On note également $H^2_*(\mathcal{H}, \theta) = H^2_*((\mathcal{H}, \theta), (\mathcal{H}, \theta))$ le second groupe de cohomologie restreinte de $(\mathcal{H}, \theta)$ à coefficients adjoints.

Le cas $p > 3$.

Soit $\mathbb{F}$ un corps de caractéristique $p > 3$ et soit $\varphi \in C^2_{CE}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Puisque l'algèbre de Heisenberg (ordinaire) $\mathcal{H}$ est nilpotent d'ordre 2 et $p > 3$, toute application p-semilinéaire $\omega : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ vérifie automatiquement la propriété $(*)$ relativement à φ. Ainsi, pour toute forme linéaire θ sur $\mathcal{H}$, on a $C^2_*(\mathcal{H}, \theta) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\Lambda^2 \mathcal{H}, \mathcal{H}) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\overline{\mathcal{H}}, \mathcal{H})$ en tant qu'espaces vectoriels (voir définition 5.2.5 pour la notation $\bar{\cdot}$).

Lemme 5.5.4. *Soit $\mathcal{H}$ l'algèbre de Heisenberg ordinaire. Soit $\varphi \in C^2_{CE}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ donnée par*

$$\begin{cases}\varphi(x,y) &= ax+by+cz\\ \varphi(x,z) &= dx+ey+fz\\ \varphi(y,z) &= gx+hy+iz,\end{cases} \tag{5.48}$$

les paramètres $a, b, c, d, e, f, g, h,$ étant des éléments de $\mathbb{F}$. Alors, φ est un 2-cocycle de la cohomologie de Chevalley-Eilenberg si et seulement si $h = -d$.

Preuve. La seule condition de 2-cocycle non-triviale sur la base $\{x, y, z\}$ de $\mathcal{H}$ est

$$\varphi([x,y],z) - \varphi([x,z],y) + \varphi([y,z],x) = [x, \varphi(y,z)] - [y, \varphi(x,z)] + [z, \varphi(x,y)], \tag{5.49}$$

ce qui se ramène à $(h+d)z = 0$. □

Soit $(\varphi, \omega) \in C^2_*(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Puisque les crochets itérés k fois sont nuls pour $k > 2$ et puisque $p > 3$, on a

$$\mathrm{ind}^2(\varphi, \omega)(v, w) = \varphi\left(v, w^{[p]}\right) + [v, \omega(w)], \ \forall v, w \in \mathcal{H}\,. \tag{5.50}$$

Lemme 5.5.5. *Les 2-cocycles restreints pour $(\mathcal{H}, \theta)$ sont donnés par les couples (φ, ω) tels que*

- *Cas $\theta = 0$:*

$$\begin{cases} \varphi(x,y) &= ax + by + cz \\ \varphi(x,z) &= dx + ey + fz \\ \varphi(y,z) &= gx - dy + iz \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega(x) &= \gamma z \\ \omega(y) &= \epsilon z \\ \omega(z) &= \kappa z \end{cases} \tag{5.51}$$

- *Cas $\theta = x^*$:*

$$\begin{cases} \varphi(x,y) &= ax + by + cz \\ \varphi(x,z) &= fz \\ \varphi(y,z) &= iz \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega(x) &= ix - fy + \gamma z \\ \omega(y) &= \epsilon z \\ \omega(z) &= \kappa z; \end{cases} \tag{5.52}$$

- *Cas $\theta = z^*$:*

$$\begin{cases} \varphi(x,y) &= ax + by + cz \\ \varphi(x,z) &= fz \\ \varphi(y,z) &= iz; \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega(x) &= \gamma z \\ \omega(y) &= \epsilon z \\ \omega(z) &= ix - fy + \kappa z, \end{cases} \tag{5.53}$$

avec tous les paramètres $a, b, c, d, e, f, h, i, \gamma, \epsilon, \kappa$ des éléments de $\mathbb{F}$.

Preuve. Soit $\varphi \in Z^2_{CE}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ donné par le lemme 5.5.4, soit θ une forme linéaire sur $\mathcal{H}$ et soit $\omega : \mathcal{H} \to \mathbb{F}$ une application ayant la propriété $(*)$ relativement à φ, donnée sur la base de $\mathcal{H}$ par

$$\begin{cases} \omega(x) &= \alpha x + \beta y + \gamma z \\ \omega(y) &= \lambda x + \mu y + \epsilon z \\ \omega(z) &= \delta x + \eta y + \kappa z, \end{cases} \tag{5.54}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \epsilon, \delta, \eta, \kappa$ des éléments de $\mathbb{F}$. Supposons de plus que $(\varphi, \omega) \in Z^2_*(\mathcal{H}, \theta)$.

- Cas $\theta = 0$. On évalue l'équation (5.50) sur les éléments de la base $\{x, y, z\}$ de $(\mathcal{H}, 0)$.

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi\left(x, x^{[p]}\right) + [x, \omega(x)] = \varphi(x, 0) + [x, \beta y] + [x, \gamma z] = \beta z \implies \beta = 0 \\
0 &= \varphi\left(y, y^{[p]}\right) + [y, \omega(y)] = \varphi(y, 0) + [y, \lambda x] + [y, \epsilon z] = \lambda z \implies \lambda = 0; \\
0 &= \varphi\left(x, y^{[p]}\right) + [x, \omega(y)] = \varphi(x, 0) + [x, \mu y] + [x, \epsilon z] = \mu z \implies \mu = 0; \\
0 &= \varphi\left(x, z^{[p]}\right) + [x, \omega(z)] = \varphi(x, 0) + [x, \eta z] + [x, \kappa z] = \eta z \implies \eta = 0; \\
0 &= \varphi\left(y, z^{[p]}\right) + [y, \omega(z)] = \varphi(y, 0) + [y, \delta x] + [y, \kappa z] = -\delta z \implies \delta = 0; \\
0 &= \varphi\left(y, x^{[p]}\right) + [y, \omega(x)] = \varphi(y, 0) + [y, \alpha x] + [y, \gamma z] = -\alpha z \implies \alpha = 0.
\end{aligned}$$

Les autres équations possibles obtenues avec (z, z), (z, y) et (z, x) sont triviales.

- Cas $\theta = x^*$. On évalue l'équation (5.50) sur les éléments de la base $\{x, y, z\}$ de $(\mathcal{H}, x^*)$.

$$0 = \varphi\left(x, x^{[p]}\right) + [x, \omega(x)] = \varphi(x, z) + [x, \beta y] = dx + ey + fz + \beta z \implies \beta = -f,\ d = e = 0;$$
$$0 = \varphi\left(y, y^{[p]}\right) + [y, \omega(y)] = \varphi(y, 0) + \lambda[y, x] = -\lambda z \implies \lambda = 0;$$
$$0 = \varphi\left(x, y^{[p]}\right) + [x, \omega(y)] = \varphi(x, 0) + \mu[x, y] = \eta z \implies \mu = 0;$$
$$0 = \varphi\left(x, z^{[p]}\right) + [x, \omega(z)] = \varphi(x, 0) + \eta[x, y] = \eta z \implies \eta = 0;$$
$$0 = \varphi\left(y, z^{[p]}\right) + [y, \omega(z)] = \varphi(y, 0) + \delta[y, x] = -\delta z \implies \delta = 0;$$
$$0 = \varphi\left(y, x^{[p]}\right) + [y, \omega(x)] = \varphi(y, z) + \alpha[y, x] = gx + iz - \alpha z \implies \alpha = i,\ g = 0.$$

Les autres équations possibles obtenues avec (z, z), (z, y) et (z, x) sont triviales.
- Le cas $\theta = z^*$ est complètement analogue au cas $\theta = x^*$.

□

Lemme 5.5.6. *Les 2-cobords restreints pour $(\mathcal{H}, \theta)$ sont donnés par les couples (φ, ω) tels que*

$$\begin{cases} \varphi(x, y) & = Ax + By + \tilde{C}z \\ \varphi(x, z) & = -Hz \\ \varphi(y, z) & = Gz, \end{cases}$$

avec $A, B, \tilde{C}, G, H$ éléments de $\mathbb{F}$ et
- *Cas $\theta = 0$: $\omega = 0$;*
- *Cas $\theta = x^*$: $\omega(x) = Gx + Hy + Iz,\ \omega(y) = \omega(z) = 0$;*
- *Cas $\theta = z^*$: $\omega(x) = \omega(y) = 0,\ \omega(z) = Gx + Hy + Iz$,*

Preuve. Soit $\varphi \in C^2_{CE}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, donnée sur la base de $\mathcal{H}$ par l'équation (5.48). Supposons que $\varphi = d^1_{CE}\psi$, avec $\psi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ donnée par

$$\begin{cases} \psi(x, y) & = Ax + By + Cz \\ \psi(x, z) & = Dx + Ey + Fz \\ \psi(y, z) & = Gx + Hy + Iz, \end{cases} \tag{5.55}$$

avec $A, B, C, D, E, F, G, H, I \in \mathbb{F}$. Avec la condition de cobord $\varphi = d^1_{CE}\psi$, il est facile de montrer que $d = e = g = h = 0$, $a = i = G$, $b = -f = H$, $c = \tilde{C}$, avec $\tilde{C} = I - E - A$. Par la partie "restreinte", supposons que $(\varphi, \omega) \in B^2_*(\mathcal{H}, \theta)$. La condition de cobord s'énonce alors

$$\omega(u) = \psi\left(u^{[p]}\right) - \mathrm{ad}_u^{p-1} \circ \psi(u),\ u \in \mathcal{H}. \tag{5.56}$$

En évaluant l'équation (5.56) sur la base de $\mathcal{H}$, on obtient

$$\begin{cases} \omega(x) & = \theta(x)(Gx + Hy + Iz) \\ \omega(y) & = \theta(y)(Gx + Hy + Iz) \\ \omega(z) & = \theta(z)(Gx + Hy + Iz). \end{cases} \tag{5.57}$$

En choisissant θ dans $\{0, x^*, z^*\}$, on obtient le résultat.

□

Théorème 5.5.7. *On a $\dim_{\mathbb{F}}\left(H^2_*(\mathcal{H}, 0)\right) = 8$ et $\dim_{\mathbb{F}}\left(H^2_*(\mathcal{H}, x^*)\right) = \dim_{\mathbb{F}}\left(H^2_*(\mathcal{H}, z^*)\right) = 4$.*

- *Une base de* $H^2_*(\mathcal{H}, 0)$ *est donnée par*

$$\Big\{(\varphi_1, 0), (\varphi_2, 0), (\varphi_3, 0), (\varphi_4, 0), (\varphi_5, 0), (0, \omega_1), (0, \omega_2), (0, \omega_3)\Big\},$$

avec

$$\varphi_1(x, z) = z;\ \varphi_2(y, z) = z;\ \varphi_3(x, z) = -\varphi_3(y, z) = x;\ \varphi_4(x, z) = y;\ \varphi_5(y, z) = y;$$
$$\omega_1(x) = z;\ \omega_2(y) = z;\ \omega_3(z) = z.$$

(on n'écrit que les images non-nulles).

- *Une base de* $H^2_*(\mathcal{H}, x^*)$ *est donnée par* $\Big\{(\varphi_1, 0), (\varphi_2, 0), (0, \omega_1), (0, \omega_2)\Big\}$*, avec*

$$\varphi_1(x, y) = x;\ \varphi_2(x, y) = y;\ \omega_1(y) = z;\ \omega_2(z) = z.$$

- *Une base pour* $H^2_*(\mathcal{H}, z^*)$ *est donnée par* $\Big\{(\varphi_1, 0), (\varphi_2, 0), (0, \omega_1), (0, \omega_2)\Big\}$*, avec*

$$\varphi_1(x, y) = x;\ \varphi_2(x, y) = y;\ \omega_1(y) = z;\ \omega_2(x) = z.$$

Preuve. En utilisant le lemme 5.5.6, on déduit que $\{(\varphi_6, 0), (\varphi_7, 0), (\varphi_8, 0)\}$ est une base de $B^2_*(\mathcal{H}, 0)$, avec

$$\varphi_6(x, y) = x,\ \varphi_6(y, z) = z;\quad \varphi_7(x, y) = y,\ \varphi_7(x, z) = -z;\quad \varphi(x, y) = z.$$

En utilisant le lemme 5.5.5, il n'est pas difficile de compléter la base ci-dessus en une base de $Z^2_*(\mathcal{H}, 0)$, et ainsi trouver une base pour $H^2_*(\mathcal{H}, 0)$. Les deux autres cas avec $\theta = x^*$ et $\theta = z^*$ sont similaires.

□

Le cas $p = 3$.

Soit $\mathbb{F}$ un corps de caractéristique 3 et soit $\varphi \in C^2_{CE}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Alors, une application $\omega : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ possède la propriété $(*)$ relativement à φ si et seulement si

$$\omega(u+v) = \omega(u)+\omega(v)+2\left(\varphi([u, v], u) + [\varphi(u, v), u]\right)+\varphi([u, v], v)+[\varphi(u, v), v],\ u, v \in \mathcal{H}\,. \quad (5.58)$$

Soit θ une forme linéaire sur $\mathcal{H}$ et soit $(\varphi, \omega) \in C^2_*(\mathcal{H}, \theta)$. Rappelons que $\mathcal{H}$ est équipé d'une 3-opération $(\cdot)^{[3]}$ donnée par θ (voir la proposition 5.5.1). Puisque $p = 3$, on a

$$\mathrm{ind}^2(\varphi, \omega)(u, v) = \varphi\left(u, v^{[3]}\right) - [\varphi([u, v], v), v] + [u, \omega(v)]. \quad (5.59)$$

Lemme 5.5.8. *Les 2-cocycles restreints pour $(\mathcal{H}, \theta)$ sont donnés par des couples (φ, ω), où*

- *Case $\theta = 0$:*

$$\begin{cases} \varphi(x, y) &= ax + by + cz \\ \varphi(x, z) &= dx + ey + fz \\ \varphi(y, z) &= gx - dy + iz \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega(x) &= -ex + \gamma z \\ \omega(y) &= dy + \epsilon z \\ \omega(z) &= \kappa z \end{cases} \quad (5.60)$$

- *Cas $\theta = x^*$: identique au lemme 5.5.5 ;*
- *Cas $\theta = z^*$: identique au lemme 5.5.5 ;*

où tous les paramètres $a, b, c, d, e, f, h, i, \gamma, \epsilon, \kappa$ sont des éléments de $\mathbb{F}$.

Preuve. la preuve est identique à celle du lemme 5.5.5, mais en exploitant l'équation 5.59. □

Un calcul analogue montre que les 2-cobords restreints sont les mêmes que dans le lemme 5.5.6. Toutefois, il faut prendre garde au faut que la propriété $(*)$ n'est plus triviale si $p=3$, mais est donnée par l'équation (5.58).

Théorème 5.5.9. *On a* $\dim_{\mathbb{F}}\left(H^2_*(\mathcal{H},0)\right)=8$ *et* $\dim_{\mathbb{F}}\left(H^2_*(\mathcal{H},x^*)\right)=\dim_{\mathbb{F}}\left(H^2_*(\mathcal{H},z^*)\right)=4$.

- *Une base de* $H^2_*(\mathcal{H},0)$ *est donnée par*
$$\Big\{(\varphi_1,\omega_1),(\varphi_2,\omega_2),(\varphi_3,0),(\varphi_4,0),(\varphi_5,0),(0,\omega_3),(0,\omega_4),(0,\omega_5)\Big\},$$
avec
$$\varphi_1(x,z)=-\varphi_1(y,z)=x,\ \omega_1(y)=x;\ \varphi_2(x,z)=y,\ \omega_2(x)=x;\ \varphi_3(y,z)=z;$$
$$\varphi_4(x,z)=z;\ \varphi_5(y,z)=y;\ \omega_3(x)=\omega_4(y)=\omega_5(z)=z.$$
(On n'écrit que les images non nulles).
- *Une base de* $H^2_*(\mathcal{H},x^*)$ *est donnée par* $\Big\{(\varphi_1,0),(\varphi_2,0),(0,\omega_1),(0,\omega_2)\Big\}$*, avec*
$$\varphi_1(x,y)=x;\ \varphi_2(x,y)=y;\ \omega_1(y)=z;\ \omega_2(z)=z.$$
- *Une base de* $H^2_*(\mathcal{H},z^*)$ *est donnée par* $\Big\{(\varphi_1,0),(\varphi_2,0),(0,\omega_1),(0,\omega_2)\Big\}$*, avec*
$$\varphi_1(x,y)=x;\ \varphi_2(x,y)=y;\ \omega_1(y)=z;\ \omega_2(x)=z.$$

5.5.3 Exemple d'une structure de Lie-Rinehart restreinte sur l'algèbre de Heisenberg

Soit $p>3$, $L=(\mathcal{H},z^*)$, soit A l'algèbre associative engendrée par les éléments e_1 et e_2, e_1 étant l'unité et équipée de la multiplication $e_2e_2=0$. Supposons que A agit sur L de façon triviale ($e_1\cdot u=u,\ e_2\cdot u=0\ \forall u\in\mathcal{H}$). On peut alors définir une ancre sur le couple (A,L) en posant $\rho_x(e_2)=\rho_y(e_2)=0,\ \rho_z(e_2)=\gamma e_2$, $\gamma\in\mathbb{F}$ étant soit nul, soit vérifiant $\gamma^{p-1}=1$. On obtient alors deux structures de Lie-Rinehart restreintes, que l'on note $\mathcal{L}_0$ si $\gamma=0$ et $\mathcal{L}_\gamma$ si $\gamma^{p-1}=1$.

Choisissons la multidérivation restreinte (m_1,ω_1) donnée par $m_1(x,y)=x,\ m_1(x,z)=m_1(y,z)=0,\ \omega_1(x)=\omega_1(z)=0,\ \omega_1(y)=z$. Il n'est pas difficile de voir que $\sigma_1\equiv0$ est l'unique symbole compatible avec (m_1,ω_1). On obtient alors la déformation infinitésimale
$$m_t(x,y)=z+tx,\ m_t(x,z)=m_t(y,z)=0,\ \ \omega_t(x)=0,\ \omega_t(y)=tz,\ \omega_t(z)=z. \tag{5.61}$$

Proposition 5.5.10. *La déformation* (m_t,ω_t) *est une déformation au sens de la définition 5.4.1 si et seulement si* $\gamma=0$*. Sinon, c'est une déformation faible.*

Preuve. La classe de (m_1,ω_1) est non triviale dans $H^*_2(\mathcal{H},\theta)$, ainsi les équations (5.20) et (5.21) sont vérifiées, ce qui signifie qu'on a une déformation faible. Les équations (5.22) deviennent
$$\rho\left(u^{[p]}\right)(a)=\rho^p(u)(a),\quad u\in\mathcal{H},\ a\in A,$$
$$\rho(\omega_1(u))(a)=\sum_{k=0}^{p}\rho(u)^k\circ\sigma_1(u)\circ\rho(u)^{p-k}(a)=0.$$
La première équation est toujours vérifiée et le deuxième l'est si et seulement si $\gamma=0$. Les équations (5.23) sont triviales.

□

Considérons maintenant l'algèbre de Lie-Rinehart restreinte $\mathcal{L}_0$ avec sa déformation infinitésimale donnée par (m_1, ω_1) et calculons la cochaîne d'obstruction. Pour $u, v, w \in \mathcal{H}$, on a

$$\mathrm{obs}^{(1)}(u, v, w) = m_1(u, m_1(v, w)) + m_1(v, m_1(w, u)) + m_1(w, m_1(u, v)), \tag{5.62}$$

$$\mathrm{obs}^{(2)}(u, v) = -m_1\left(u, \omega_1(v)\right). \tag{5.63}$$

Il est immédiat de voir que ces applications s'annulent sur la base de $\mathcal{H}$. Ainsi, on doit trouver (m_2, ω_2) tel que $d_*^2(m_2, \omega_2) = (0, 0)$ afin d'étendre la déformation, ce qui est toujours possible en cherchant dans $Z_*^2(\mathcal{H}, z^*)$.

Chapitre 6

(Super-)Algèbres de Lie-Rinehart restreintes en caractéristique $p = 2$

Ce chapitre est consacré au cas particulier où le corps de base est de caractéristique $p = 2$. Dans cette situation, de nombreux résultats tombent en défaut et de nouvelles techniques doivent être développées. Par exemple, sur un corps $\mathbb{F}$ de caractéristique différente de 2, l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ est l'exemple standard d'algèbre de Lie simple. En caractéristique 2, ce n'est plus le cas : elle admet un centre non nul et est même nilpotente.

Bouarroudj et ses collaborateur·trice·s ont largement contribué à l'étude du cas particulier $p = 2$. Citons notamment leurs travaux sur les doubles extensions ([BB18]), sur les déformations ([BLLS15]) et sur la classification des algèbres de Lie simples ([BLLS21]). On pourra également consulter les références des articles précédemment cités ainsi que leurs introductions très détaillées.

Concernant notre problème de déformation d'algèbres de Lie-Rinehart restreintes, le cas particulier de la caractéristique 2 s'avère être un environnement propice au développement de nouveaux outils. La définition d'une algèbre de Lie restreinte se retrouve considérablement simplifiée (voir définition 6.1.1, on voit notamment que la non-linéarité de la 2-opération est contrôlée par un simple crochet) et une meilleure compréhension des interactions entre la 2-opération et leurs autres applications de structure (loi additive, crochet de Lie) est possible (voir équation 6.3). De même, certaines conditions intervenant dans la définition d'une algèbre de Lie-Rinehart restreinte deviennent linéaires, ce qui simplifie leur étude (voir définition 6.2.1).

Récemment, Bouarroudj et Makhlouf ont étudié les structures de super-algèbres de Hom-Lie en caractéristique 2 ([BM22]). Dans cet article, une cohomologie nouvelle est introduite. Il semble que dans le cas $p = 2$, il existe une forte ressemblance entre les notions d'algèbre de Lie restreinte et de super-algèbre de Lie. Cette remarque a motivé la construction d'un nouveau complexe de cochaînes pour les algèbres de Lie restreintes, qui n'a pas d'analogue pour $p > 2$ (voir section 6.1.3). Ce complexe est complet dans le sens où il permet le calcul des groupes de cohomologie restreints à n'importe quel ordre et constitue à ce titre une amélioration des résultats de Evans et Fuchs ([EF08]). Toutefois, cette méthode reste propre au cas $p = 2$ et ne semble pas être généralisable à un p quelconque.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans une première section, on adapte les définitions générales concernant les algèbres de Lie restreintes au cas $p = 2$ en soulignant les différences avec le cas $p > 2$. On étudie les interactions de la 2-opération avec les séries formelles à un paramètre (équation 6.3) dans le but de mieux comprendre les déformations restreintes. Puis, on introduit notre nouveau complexe de cochaînes (théorème 6.1.8) et on montre quelques applications immédiates. La deuxième section est consacrée aux algèbres de Lie-Rinehart restreintes en caractéristique $p = 2$ et à leurs déformations formelles restreintes. On montre notamment que leurs déformations sont contrôlées par la cohomologie que l'on vient d'introduire. On étudie les déformations équivalentes et les obstructions. Ensuite, on présente un exemple détaillé sur l'algèbre de Heisenberg restreinte. Comme dans le chapitre précédent, on classifie les structures restreintes sur l'algèbre de Heisenberg et on décrit explicitement les seconds groupes de cohomolgie à coefficients adjoints (théorème 6.3.4). On calcule ensuite un exemple de structure de Lie-Rinehart restreinte sur une algèbre de Heisenberg restreinte et on étudie ses déformations.

Ce chapitre se base en partie sur le contenu de l'article [EM23].

6.1 Algèbres de Lie restreintes en caractéristique $p = 2$

À partir d'ici, $\mathbb{F}$ désigne un corps de caractéristique 2. Le but est d'introduire une cohomolgie en caractéristique 2 différente de celle de Fuchs et Evans ([EF08]). Toutefois, les deux cohomologies semblent coïncider en bas degré. .

6.1.1 Définition

En caractéristique 2, la définition 5.1.5 d'une algèbre de Lie restreinte se réduit à :

Définition 6.1.1. Une *algèbre de Lie restreinte* en caractéristique 2 est une algèbre de Lie L équipée d'une application $(\cdot)^{[2]} : L \longrightarrow L$ telle que

1. $(\lambda x)^{[2]} = \lambda^2 x^{[2]}$, $x \in L$, $\lambda \in \mathbb{F}$;
2. $\left[x, y^{[2]}\right] = [[x, y], y]$, $x, y \in L$;
3. $(x + y)^{[2]} = x^{[2]} + y^{[2]} + [x, y]$, $x, y \in L$.

On appelle une telle application une *2-opération*[1].

Proposition 6.1.2. *Soit L une algèbre de Lie restreinte en caractéristique 2.*

- *Soient $x_1, \cdots, x_n \in L$. On a alors la formule*
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{[2]} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{[2]} + \sum_{1\leq i<j\leq n} [x_i, x_j].$$
- *Supposons que la représentation adjointe de L est fidèle. Alors, les conditions 1. et 3. de la définition 6.1.1 sont des conséquences de la condition 2.*

Preuve. Le premier point vient d'un calcul immédiat. Pour le deuxième, le théorème de Jacobson assure que c'est vrai, par le même argument qu'au corollaire (5.1.17). Pour $p = 2$, on peut faire une preuve calculatoire alternative. Soient $x, y, z \in L$ et supposons que la représentation adjointe $\mathrm{ad} : x \mapsto \mathrm{ad}_x = [x, \cdot]$ est fidèle. Si $\lambda \in \mathbb{F}$, on a

$$\mathrm{ad}_{(\lambda x)^{[2]}}(y) = [(\lambda x)^{[2]}, y] = [\lambda x, [\lambda x, y]] = \lambda^2[x, [x, y]] = \lambda^2[x^{[2]}, y] = \lambda^2 \,\mathrm{ad}_{x^{[2]}}(y).$$

Ainsi, on a $(\lambda x)^{[2]} = \lambda^2 x^{[2]}$. Puis,

$$\mathrm{ad}_{(x+y)^{[2]}}(z) = [x + y, [x + y, z]]$$

1. Comme précédemment, cette terminologie n'a rien d'universel.

$$
\begin{aligned}
&= [x,[x,z]]+[y,[y,z]]+[x,[y,z]]+[y,[x,z]]\\
&= [x^{[2]},z]+[y^{[2]},z]+[[x,y],z]\\
&= \mathrm{ad}_{x^{[2]}}(z)+\mathrm{ad}_{y^{[2]}}(z)+\mathrm{ad}_{[x,y]}(z).
\end{aligned}
$$

Il s'en suit que $(x+y)^{[2]} = x^{[2]}+y^{[2]}+[x,y]$. □

6.1.2 2-opérations et séries formelles

Soit $\left(L,[\cdot,\cdot],(\cdot)^{[2]}\right)$ une algèbre de Lie restreinte, il est alors immédiat d'étendre le crochet de Lie sur $L[[t]]$, avec la formule

$$
\left[\sum_{i\geq 0} t^i x_i, \sum_{j\geq 0} t^j x_j\right] = \sum_{i,j} t^{i+j}[x_i,y_j], \quad x_i,y_j\in L. \tag{6.1}
$$

Il est clair que $L[[t]]$ est équipé d'une structure de Lie avec ce crochet. Le but est maintenant de trouver une formule similaire pour la 2-opération : peut-on étendre l'application $(\cdot)^{[2]}$ sur $L[[t]]$ de telle façon à obtenir une structure restreinte compatible avec le crochet étendu ? Soient $x_i\in L$ et $\lambda\in\mathbb{F}$. On a alors

$$
\left(\sum_{i=0}^n \lambda^i x_i\right)^{[2]} = \sum_{i=0}^n \lambda^{2i}x_i^{[2]} + \sum_{0\leq i<j\leq n}\lambda^{i+j}[x_i,x_j]. \tag{6.2}
$$

L'équation (6.2) peut être démontrée facilement par récurrence : si $x_0,\cdots,x_{n+1}\in L$ et $\lambda\in\mathbb{F}$,

- $(x_0+\lambda x_1)^{[2]} = x_0^{[2]}+(\lambda x_1)^{[2]}+[x_0,\lambda x_1] = x_0^{[2]}+\lambda^2 x_1^{[2]}+\lambda[x_0,x_1]$, donc l'assertion est vraie pour $n=1$.
- Si la formule est vraie pour un $n\in\mathbb{N}$, on calcule par récurrence :

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i=0}^{n+1}\lambda^i x_i\right)^{[2]} &= \left(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i x_i + \lambda^{n+1}x_{n+1}\right)^{[2]}\\
&= \left(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i x_i\right)^{[2]} + \lambda^{2(n+1)}x_{n+1}^{[2]} + \left[\sum_{i=0}^{n}\lambda^i x_i, \lambda^{n+1}x_{n+1}\right]\\
&= \sum_{i=0}^{n}\lambda^{2i}x_i^{[2]} + \lambda^{2(n+1)}x_{n+1}^{[2]} + \sum_{0\leq i<j\leq n}\lambda^{i+j}[x_i,x_j] + \sum_{i=0}^{n}\lambda^{i+n+1}[x_i,x_{n+1}]\\
&= \sum_{i=0}^{n+1}\lambda^{2i}x_i^{[2]} + \sum_{0\leq i<j\leq n+1}\lambda^{i+j}[x_i,x_j].
\end{aligned}
$$

L'équation (6.2) étant vraie, l'idée est de l'utiliser afin de définir la 2-opération étendue sur $L[[t]]$ comme souhaité.

Proposition 6.1.3. *Si L est une $\mathbb{F}$-algèbre de Lie, alors $L[[t]]$ est une $\mathbb{F}$-algèbre de Lie restreinte avec le crochet étendu (6.1) et la 2-opération définie par*

$$
\left(\sum_{i\geq 0} t^i x_i\right)^{[2]_t} := \sum_{i\geq 0} t^{2i}x_i^{[2]} + \sum_{i,j} t^{i+j}[x_i,x_j]. \tag{6.3}
$$

Preuve. Vérifions les trois conditions des la définition 6.1.1. Soient $\lambda \in \mathbb{F}$ et $x_i \in L$.

1.

$$\begin{aligned}
\left(\lambda \sum_i t^i x_i\right)^{[2]_t} &= \left(\sum_i t^i (\lambda x_i)\right)^{[2]_t} \\
&= \sum_i t^{2i} (\lambda x_i)^{[2]} + \sum_{i<j} t^{i+j} [\lambda x_i, \lambda x_j] \\
&= \lambda^2 \sum_i t^{2i} x_i^{[2]} + \lambda^2 \sum_{i<j} t^{i+j} [x_i, x_j] \\
&= \lambda^2 \left(\sum_i t^i x_i\right)^{[2]_t}.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\left[\sum_i t^i x_i, \left(\sum_j t^j y_j\right)^{[2]_t}\right] &= \left[\sum_i t^i x_i, \sum_j t^{2j} y_j^{[2]}\right] + \left[\sum_i t^i x_i, \sum_{j<k} t^{j+k} [y_j, y_k]\right] \\
&= \sum_{i,j} t^{i+2j} \left[x_i, y_j^{[2]}\right] + \sum_{\substack{i,j,k \\ j<k}} t^{i+j+k} [x_i, [y_j, y_k]] \\
&= \sum_{i,j} t^{i+2j} \left[x_i, y_j^{[2]}\right] + \sum_{\substack{i,j,k \\ j<k}} t^{i+j+k} [y_j, [y_k, x_i]] + \sum_{\substack{i,j,k \\ j<k}} t^{i+j+k} [y_k, [x_i, y_j]] \\
&= \sum_{i,j} t^{i+2j} \left[x_i, y_j^{[2]}\right] + \sum_{\substack{i,j,k \\ j<k}} t^{i+j+k} [[x_i, y_k], y_j] + \sum_{\substack{i,j,k \\ j<k}} t^{i+j+k} [[x_i, y_j], y_k] \\
&= \sum_{i,j} t^{i+2j} \left[x_i, y_j^{[2]}\right] + \sum_{\substack{i,j,k \\ j>k}} t^{i+j+k} [[x_i, y_j], y_k] + \sum_{\substack{i,j,k \\ j<k}} t^{i+j+k} [[x_i, y_j], y_k] \\
&= \sum_{i,j} t^{i+j+j} [[x_i, y_j], y_j] + \sum_{\substack{i,j,k \\ j\neq k}} t^{i+j+k} [[x_i, y_j], y_k] \\
&= \sum_{i,j,k} t^{i+j+k} [[x_i, y_j], y_k] \\
&= \left[\left[\sum_i t^i x_i, \sum_j t^j y_j\right], \sum_j t^j y_j\right].
\end{aligned}$$

3. Le calcul suivant sera utile.

$$\begin{aligned}
\sum_{i\neq j} t^{i+j} [x_i, y_j] &= \sum_{i<j} t^{i+j} [x_i, y_j] + \sum_{j<i} t^{i+j} [x_i, y_j] \\
&= \sum_{i<j} t^{i+j} [x_i, y_j] + \sum_{i<j} t^{i+j} [x_j, y_i] \\
&= \sum_{i<j} t^{i+j} [x_i, y_j] + \sum_{i<j} t^{i+j} [y_i, x_j]. \qquad (6.4)
\end{aligned}$$

On peut maintenant démontrer la troisième condition à l'aide du calcul précédent

$$\begin{aligned}
\left(\sum_i t^i x_i + \sum_j t^j y_j\right)^{[2]_t} &= \left(\sum_i t^i (x_i + y_i)\right)^{[2]_t}\\
&= \sum_i t^{2i}(x_i+y_i)^{[2]} + \sum_{i<j} t^{i+j}[x_i+y_i, x_j+y_j]\\
&= \sum_i t^{2i} x_i^{[2]} + \sum_i t^{2i} y_i^{[2]} + \sum_i t^{2i}[x_i, y_i]\\
&\quad + \sum_{i<j} t^{i+j}[x_i,x_j] + \sum_{i<j} t^{i+j}[x_i,y_j]\\
&\quad + \sum_{i<j} t^{i+j}[x_j,y_i] + \sum_{i<j} t^{i+j}[x_j,y_j]\\
&= \sum_i t^{2i} x_i^{[2]} + \sum_i t^{2i} y_i^{[2]} + \sum_i t^{2i}[x_i, y_i]\\
&\quad + \sum_{i<j} t^{i+j}[x_i,x_j] + \sum_{i<j} t^{i+j}[x_j,y_j]\\
&\quad + \sum_{i\neq j} t^{i+j}[x_i,y_j] \qquad \text{(avec l'équation (6.4))}\\
&= \left(\sum_i t^i x_i\right)^{[2]_t} + \left(\sum_i t^i y_i\right)^{[2]_t} + \sum_{i,j} t^{i+j}[x_i,y_j]\\
&= \left(\sum_i t^i x_i\right)^{[2]_t} + \left(\sum_i t^i y_i\right)^{[2]_t} + \left[\sum_i t^i x_i, \sum_j t^j y_j\right].
\end{aligned}$$

□

Remarque. En développant la formule (6.3) et en réarrangeant par monômes de même degré, on obtient

$$\left(\sum_{n\geq 0} t^n x_n\right)^{[2]_t} = \sum_{n\geq 0} t^n \left((n+1)x^{[2]}_{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} + \sum_{\substack{i<j\\ i+j=n}} [x_i,x_j]\right), \tag{6.5}$$

où $\lfloor\cdot\rfloor$ désigne la fonction partie entière.

6.1.3 Cohomologie restreinte en caractéristique $p = 2$

Dans cette section, on construit une cohomologie restreinte des algèbres de Lie restreintes en caractéristique 2. Cette construction est spécifique à la caractéristique 2 et n'a pas d'analogue (à notre connaissance) en caractéristique différente de 2.

Soit M un L-module restreint. On commence par poser $C^0_{*_2}(L,M) := C^0_{\mathrm{CE}}(L,M)$ et $C^1_{*_2}(L,M) := C^1_{\mathrm{CE}}(L,M)$.

Définition 6.1.4. Soient $n \geq 2$, $\varphi \in C^n_{\mathrm{CE}}(L,M)$ et $\omega : L^{n-1} \longrightarrow M$. Le couple (φ,ω) est une n-cochaîne de la cohomologie restreinte si

$$\omega(\lambda x, z_2, \cdots, z_{n-1}) = \lambda^2 \omega(x, z_2, \cdots, z_{n-1}) \tag{6.6}$$

$$\omega(x, z_2, \cdots, \lambda z_i + z_i', \cdots, z_{n-1}) = \lambda\omega(x, z_2, \cdots, z_i, \cdots, z_{n-1}) + \omega(x, z_2, \cdots, z_i', \cdots, z_{n-1}) \tag{6.7}$$

$$\omega(x + y, z_2, \cdots, z_{n-1}) = \omega(x, z_2, \cdots, z_{n-1}) + \omega(y, z_2, \cdots, z_{n-1}) + \varphi(x, y, z_2, \cdots, z_{n-1}). \tag{6.8}$$

On note l'espace des n-cochaînes de L à coefficients dans M par $C^n_{*_2}(L, M)$.

Construisons les différentielles $d^n_{*_2} : C^n_{*_2}(L, M) \longrightarrow C^{n+1}_{*_2}(L, M)$. Pour $n \geq 2$, on écrit $d^n_{*_2}(\varphi, \omega) = (d^n_{\mathrm{CE}}(\varphi), \delta^n(\omega))$, avec

$$\begin{aligned}
\delta^n\omega(x, z_2, \cdots, z_n) = {} & x \cdot \varphi(x, z_2, \cdots, z_n) \\
& + \sum_{i=2}^{n} z_i \cdot \omega(x, z_2, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, z_n) \\
& + \varphi(x^{[2]}, z_2, \cdots, z_n) \\
& + \sum_{i=2}^{n} \varphi\left([x, z_i], x, z_2, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, z_n\right) \\
& + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \omega\left(x, [z_i, z_j], z_2, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, \hat{z}_j, \cdots, z_n\right).
\end{aligned}$$

Lemme 6.1.5. *Soient $n \geq 2$ et $(\varphi, \omega) \in C^n_{*_2}(L, M)$. Alors, $(d^n_{CE}(\varphi), \delta^n(\omega)) \in C^{n+1}_{*_2}(L, M)$.*

Preuve. Le seul point délicat est de montrer que

$$\delta^n\omega(x+y, z_2, \cdots, z_{n-1}) = \delta^n\omega(x, z_2, \cdots, z_{n-1}) + \delta^n\omega(y, z_2, \cdots, z_{n-1}) + d^n_{\mathrm{CE}}\varphi(x, y, z_2, \cdots, z_{n-1}), \tag{6.9}$$

pour $x, y, z_2, \cdots, z_{n+1} \in L$. Calculons :

$$\begin{aligned}
\delta^n\omega(x + y, z_2, \cdots, z_n) = {} & x \cdot \varphi(x + y, z_2, \cdots, z_n) + \sum_{i=2}^{n} z_i \cdot \omega(x + y, z_2, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, z_n) \\
& + \varphi((x + y)^{[2]}, z_2, \cdots, z_n) + \sum_{i=2}^{n} \varphi\left([x + y, z_i], x + y, z_2, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, z_n\right) \\
& + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \omega\left(x + y, [z_i, z_j], z_2, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, \hat{z}_j, \cdots, z_n\right). \\
= {} & x \cdot \varphi(x, z_2, \cdots, z_n) + x \cdot \varphi(y, z_2, \cdots, z_n) + y \cdot \varphi(x, z_2, \cdots, z_n) + y \cdot \varphi(y, z_2, \cdots, z_n) \\
& + \sum_{i=2}^{n} z_i \cdot \omega(x, z_2, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, z_n) + \sum_{i=2}^{n} z_i \cdot \omega(y, z_2, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, z_n) \\
& + \sum_{i=1}^{n} \varphi(x, y, z_2, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, z_n) \\
& + \varphi(x^{[2]}, z_2, \cdots, z_n) + \varphi(y^{[2]}, z_2, \cdots, z_n) + \varphi([x, y], z_2, \cdots, z_n) \\
& + \sum_{i=2}^{n} \varphi\left([x, z_i], x, z_2, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, z_n\right) + \sum_{i=2}^{n} \varphi\left([x, z_i], y, z_2, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, z_n\right) \\
& + \sum_{i=2}^{n} \varphi\left([y, z_i], y, z_2, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, z_n\right) + \sum_{i=2}^{n} \varphi\left([y, z_i], x, z_2, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, z_n\right) \\
& + \sum_{2 \leq i < j \leq n} \omega\left(x, [z_i, z_j], z_2, \cdots, \hat{z}_i, \cdots, \hat{z}_j, \cdots, z_n\right)
\end{aligned}$$

$$+\sum_{2\leq i<j\leq n}\omega\left(y,[z_i,z_j],z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,\hat{z_j},\cdots,z_n\right)$$
$$+\sum_{2\leq i<j\leq n}\varphi(x,z_i,z_j,z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,\hat{z_j},\cdots,z_n).$$

On peut maintenant identifier les termes voulus dans le développement ci-dessus :

$$\begin{aligned}\delta^n\omega(x,z_2,\cdots,z_n)&=x\cdot\varphi(x,z_2,\cdots,z_n)+\sum_{i=2}^{n}z_i\cdot\omega(x,z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,z_n)+\varphi(x^{[2]},z_2,\cdots,z_n)\\&+\sum_{i=2}^{n}\varphi\left([x,z_i],x,z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,z_n\right)+\sum_{2\leq i<j\leq n}\omega\left(x,[z_i,z_j],z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,\hat{z_j},\cdots,z_n\right);\\ \delta^n\omega(y,z_2,\cdots,z_n)&=y\cdot\varphi(y,z_2,\cdots,z_n)+\sum_{i=2}^{n}z_i\cdot\omega(y,z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,z_n)+\varphi(y^{[2]},z_2,\cdots,z_n)\\&+\sum_{i=2}^{n}\varphi\left([y,z_i],y,z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,z_n\right)+\sum_{2\leq i<j\leq n}\omega\left(y,[z_i,z_j],z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,\hat{z_j},\cdots,z_n\right);\\ d^n_{\mathrm{CE}}\varphi(x,y,z_2,\cdots,z_n)&=x\cdot\varphi(y,z_2,\cdots,z_n)+y\cdot\varphi(x,z_2,\cdots,z_n)+\sum_{i=1}^{n}\varphi(x,y,z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,z_n)\\&+\sum_{i=1}^{n}\varphi([x,y],z_2,\cdots,z_n)+\sum_{i=2}^{n}\varphi\left([x,z_i],y,z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,z_n\right)\\&+\sum_{i=2}^{n}\varphi\left([y,z_i],x,z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,z_n\right)+\sum_{2\leq i<j\leq n}\varphi(x,z_i,z_j,z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,\hat{z_j},\cdots,z_n).\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation (6.9) est satisfaite. □

Lemme 6.1.6. *Avec les données précédentes, on a $\delta^{n+1}\circ\delta^n=0$.*

Preuve.

$$\begin{aligned}\delta^{n+1}\circ\delta^n\,\omega(x,z_2,\cdots,z_{n+1})&=x\cdot d^n_{\mathrm{CE}}\varphi(x,z_2,\cdots,z_{n+1})\\&+\sum_{i=2}^{n+1}z_i\cdot\delta^n\,\omega(x,z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,z_{n+1})\\&+d^n_{\mathrm{CE}}\varphi(x^{[2]},z_2,\cdots,z_{n+1}\\&+\sum_{i=2}^{n+1}d^n_{\mathrm{CE}}\varphi([x,z_i],x,z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,z_{n+1})\\&+\sum_{2\leq i<j\leq n}\delta^n\,\omega(x,[z_i,z_j],z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,\hat{z_j},\cdots,z_{n+1})\\&=\sum_{i=2}^{n+1}z_i\cdot(x\cdot\varphi(x,z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,z_{n+1}))\\&+\sum_{i=2}^{n+1}z_i\cdot\sum_{\substack{j=2\\j\neq i}}z_j\cdot\omega(x,z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots\hat{z_j},\cdots,z_{n+1})\\&+\sum_{i=2}^{n+1}z_i\cdot\varphi(x^{[2]},z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,z_{n+1})\\&+\sum_{i=2}^{n+1}z_i\cdot\sum_{\substack{j=2\\j\neq i}}^{n+1}\varphi([x,z_j],x,z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,\hat{z_j},\cdots,z_{n+1})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{i=2}^{n+1} z_i \cdot \sum_{\substack{2\leq j<k\leq n+1\\ j,k\neq i}} \omega(x,[z_j,z_k],z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,\hat{z_j},\cdots,\hat{z_k}\cdots,z_{n+1})\\
&+ \sum_{i=2}^{n+1} z_i \cdot \varphi(x^{[2]},z_2,\cdots,z_{n+1}) + x^{[2]}\cdot\varphi(z_2,\cdots,z_{n+1})\\
&+ \sum_{2\leq i<j\leq n+1} \varphi([z_i,z_j],x^{[2]},\cdots,\hat{z_i},\cdots,\hat{z_j},\cdots,z_{n+1})\\
&+ \sum_{j=2}^{n+1} \varphi([x^{[2]},z_j],z_2,\cdots,\hat{z_j},...,z_{n+1})\\
&+ x\cdot\sum_{i=2}^{n+1} z_i\cdot\varphi(x,z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,z_{n+1}) + x\cdot(x\cdot\varphi(z_2,\cdots,z_{n+1}))\\
&+ x\cdot\sum_{2\leq i<j\leq n+1} \varphi([z_i,z_j],x,\cdots,\hat{z_i},\cdots,\hat{z_j},\cdots,z_{n+1})\\
&+ x\cdot\sum_{j=2}^{n+1}\varphi([x,z_j],z_2,\cdots,\hat{z_j},\cdots,z_{n+1})\\
&+ \sum_{i=2}^{n+1}\sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n+1} z_j\cdot\varphi([x,z_i],x,z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,\hat{z_j},\cdots,z_{n+1})\\
&+ \sum_{i=2}^{n+1} x\cdot\varphi([x,z_i],z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,z_{n+1})\\
&+ \sum_{i=2}^{n+1}[x,z_i]\cdot\varphi(x,z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,z_{n+1})\\
&+ \sum_{i=2}^{n+1}\sum_{\substack{2\leq j<k\leq n+1\\ j,k\neq i}} \varphi([z_j,z_k],[x,z_i],x,z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,\hat{z_j},\cdots,\hat{z_k}\cdots,z_{n+1}))\\
&+ \sum_{i=2}^{n+1}\sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n+1} \varphi([x,z_j],[x,z_i],\cdots,\hat{z_i},\cdots,\hat{z_j},\cdots,z_{n+1})\\
&+ \sum_{i=2}^{n+1}\sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}} \varphi([[x,z_i],z_j],x,z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,\hat{z_j},\cdots,z_{n+1})\\
&+ \sum_{i=2}^{n+1}\varphi([[x,z_i],x],z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,z_{n+1})\\
&+ \sum_{2\leq i<j\leq n+1} x\cdot\varphi(x,[z_i,z_j],\cdots,\hat{z_i},\cdots,\hat{z_j},\cdots,z_{n+1})\\
&+ \sum_{2\leq i<j\leq n+1}\sum_{\substack{k=2\\ j,k\neq i}}^{n+1} z_k\cdot\omega(x,[z_i,z_j]),z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,\hat{z_j},\cdots,\hat{z_k}\cdots,z_{n+1})\\
&+ \sum_{2\leq i<j\leq n+1} [z_i,z_j]\cdot\omega(x,z_2\cdots,\hat{z_i},\cdots,\hat{z_j},\cdots,z_{n+1})\\
&+ \sum_{2\leq i<j\leq n+1} \varphi(x^{[2]},[z_i,z_j],z_2,\cdots\hat{z_i},\cdots,\hat{z_j},\cdots,z_{n+1})\\
&+ \sum_{2\leq i<j\leq n+1} \varphi([x,[z_i,z_j],x,z_2,\cdots\hat{z_i},\cdots,\hat{z_j},\cdots,z_{n+1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{2\le i<j\le n+1}\sum_{\substack{k=2\\ j,k\neq i}}^{n+1}\varphi([x,z_k],x,[z_i,z_j],z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,\hat{z_j},\cdots,\hat{z_k}\cdots,z_{n+1})\\
&+\sum_{2\le i<j\le n+1}\sum_{\substack{2\le k<l\le n+1\\ k,l\neq i,j}}\omega(x,[z_k,z_l],z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,\hat{z_j},\cdots,\hat{z_k}\cdots,\hat{z_l},\cdots,z_{n+1})\\
&+\sum_{2\le i<j\le n+1}^{n+1}\sum_{\substack{k=2\\ k\neq i,j}}^{n+1}\omega(x,[[z_i,z_j],z_k],z_2,\cdots,\hat{z_i},\cdots,\hat{z_j},\cdots,\hat{z_k}\cdots,z_{n+1})\\
&=0.
\end{aligned}
$$

□

On a donc construit un complexe de cochaînes $\left(C^n_{*_2}(L,M),d^n_{*_2}\right)_{n\ge 2}$. Pour $n\in\{0,1\}$, on a $d^0_{*_2}=d^0_{\mathrm{CE}}$ et

$$
\begin{aligned}
d^1_{*_2}:C^1_{*_2}(L,M)&\longrightarrow C^2_{*_2}(L,M)\\
\varphi&\longmapsto (d^1_{\mathrm{CE}}\varphi,\omega),\ \omega(x)=\varphi\left(x^{[2]}\right)+x\cdot\varphi(x),\ x\in L.
\end{aligned}
$$

Lemme 6.1.7. *L'application $d^1_{*_2}$ est bien définie, $d^1_{*_2}\circ d^0_{*_2}=0$ and $d^2_{*_2}\circ d^1_{*_2}=(0,0)$.*

Notre complexe de cochaînes est maintenant complet.

Théorème 6.1.8. *Soit L une algèbre de Lie restreinte et M un L-module restreint. Le complexe $\left(C^n_{*_2}(L,M),d^n_{*_2}\right)_{n\ge 0}$ est un complexe de cochaînes. Le $n^{\text{ème}}$* groupe de cohomologie restreinte group de l'algèbre de Lie restreinte L en caractéristique 2 *est défini par*

$$H^n_{*_2}(L,M):=Z^n_{*_2}(L,M)/B^n_{*_2}(L,M),$$

avec $Z^n_{*_2}(L,M)=Ker(d^n_{*_2})$ les n-cocycles restreints et $B^n_{*_2}(L,M)=Im(d^{n-1}_{*_2})$ n-cobords restreints.

Remarque. $H^0_{*_2}(L,M)=H^0_{\mathrm{CE}}(L,M)$.

Remarque. Une cohomologie très similaire a été construite dans [BM22], dans le contexte relativement différent des super-algèbres de Hom-Lie (en caractéristique 2).

6.1.4 Calculs aux petits ordres

Premier groupe de cohomologie et dérivations restreintes. Rappelons qu'une dérivation restreinte D d'une algèbre de Lie restreinte L en caractéristique 2 est une dérivation qui satisfait de plus $D\left(x^{[2]}\right)=[x,D(x)]$ pour tous $x\in L$. Soit pour $x,y\in L$:

$$
\begin{cases}
D([x,y])=[x,D(y)]+[D(x),y];\\
D\left(x^{[2]}\right)=[x,D(x)].
\end{cases}
$$

Il est clair que tout 1-cocyle restreint φ à valeurs dans L est une dérivation restreinte et que la réciproque est également vraie. Un calcul rapide montre que

$$B^1_{*_2}(L,L)=B^1_{\mathrm{CE}}(L,L)=\mathrm{Im}(d^0_{\mathrm{CE}})=\{\mathrm{ad}_x,\ x\in L\}\,.$$

On a déjà vu que toute dérivation de la forme ad_x est restreinte. Ces dérivations sont appelées *dérivations intérieures.* On peut calculer

$$H^1_{*_2}(L, L) = Z^1_{*_2}(L, L)/B^1_{*_2}(L, L) = \{\text{dérivations restreintes}\} / \{\text{dérivations intérieures}\}\,.$$

On retrouve un résultat bien connu ([ET00]).

Second groupe de cohomologie et extensions centrales. Soit $\left(L, [\cdot,\cdot]_L, (\cdot)^{[2]_L}\right)$ une algèbre de Lie restreinte. On note $\mathfrak{g} := L \oplus \mathbb{F}\, c$. Rappelons que $\mathbb{F}$ est un L-module trivial. A 2-cocycle scalaire restreint est un couple $(\varphi, \omega) \in C^2_{*_2}(L, \mathbb{F})$ vérifiant

$$\varphi(x, [y, z]_L) + \varphi(y, [z, x]_L) + \varphi(z, [x, y]_L) = 0 \tag{6.10}$$

et

$$\varphi(x, y^{[2]_L}) = \varphi([x, y]_L, y). \tag{6.11}$$

Soient $x, y \in L$ et $u, v \in \mathbb{F}$. On définit un crochet sur $\mathfrak{g}$ par

$$[x + uc, y + vc]_{\mathfrak{g}} = [x, y]_L + \varphi(x, y)c \tag{6.12}$$

et une application $(\cdot)^{[2]_{\mathfrak{g}}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ par

$$(x + uc)^{[2]_{\mathfrak{g}}} = x^{[2]_L} + \omega(x)c. \tag{6.13}$$

Proposition 6.1.9. $\left(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}, (\cdot)^{[2]_{\mathfrak{g}}}\right)$ *est une algèbre de Lie restreinte si et seulement si* (φ, ω) *est un* 2*-cocycle restreint.*

Preuve. Il est bien connu dans le cas ordinaire que $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ est une algèbre de Lie si et seulement si φ est un 2-cocycle de Chevalley-Eilenberg. Il reste alors à montrer que $(\cdot)^{[2]_{\mathfrak{g}}}$ est une 2-opération sur $\mathfrak{g}$ si et seulement si l'équation (6.11) est vérifiée. Soient $x, y \in L$ et $u, v \in \mathbb{F}$.

$$\begin{aligned}
((x + u) + (y + v))^{[2]_{\mathfrak{g}}} &= (x + y)^{[2]_L} + \omega(x + y)c \\
&= x^{[2]_L} + [x, y]_L + \omega(x)c + \omega(y)c + \varphi(x, y)c \\
&= (x + uc)^{[2]_{\mathfrak{g}}} + (y + vc)^{[2]_{\mathfrak{g}}} + [(x + uc), (y + vc)]_{\mathfrak{g}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(x + uc), (y + vc)^{[2]_{\mathfrak{g}}}]_{\mathfrak{g}} &= [(x + uc), y^{[2]_L} + \omega(y)c]_{\mathfrak{g}} \\
&= \left[[x, y^{[2]_L}\right]_L + \varphi\left(x, y^{[2]_L}\right)c \\
&= [[x, y]_L, y]_L + \varphi([x, y]_L, y)c \\
&= [[x, y]_L + \varphi(x, y)c, y + vc]_{\mathfrak{g}} \\
&= [[x + uc, y + vc]_{\mathfrak{g}}, y + vc]_{\mathfrak{g}}.
\end{aligned}$$

Finalement, on a également $(\lambda(x + uc))^{[2]_{\mathfrak{g}}} = \lambda^2(x + uc)^{[2]_{\mathfrak{g}}}$, on conclut donc que $(\cdot)^{[2]_{\mathfrak{g}}}$ est une 2-opération sur $\mathfrak{g}$ si et seulement si l'équation (6.11) est satisfaite.

$\square$

6.2 Déformations d'algèbres de Lie-Rinehart restreintes en caractéristique $p = 2$

6.2.1 Algèbres de Lie-Rinehart restreintes en caractéristique $p = 2$

Définition 6.2.1. Soit A une algèbre associative commutative sur un corps $\mathbb{F}$ de caractéristique 2 et $\left(L, (-)^{[2]}\right)$ une algèbre de Lie restreinte. Alors (A, L, ρ) est une *algèbre de Lie-Rinehart restreinte* si

- (A, L, ρ) est une algèbre de Lie-Rinehart ;
- $\rho\left(x^{[2]}\right) = \rho(x)^2$ (ρ est un morphisme de Lie restreint) ;
- $(ax)^{[2]} = a^p x^{[2]} + \rho(ax)(a)x, \ a \in A, \ x \in L.$ (condition de Hochschild)

Définition 6.2.2. Une *multidérivation restreinte* (d'ordre 1) est un couple (m, ω), où $m : L \times L \to L$ est antisymétrique, ω est 2-homogène et vérifie

$$\omega(x + y) = \omega(x) + \omega(y) + m(x, y), \tag{6.14}$$

telles qu'il existe une application $\sigma : L \to \mathrm{Der}(A)$ appelée *symbole restreint* devant satisfaire les quatre conditions suivantes, pour $x, y \in L$ et $a \in A$:

$$\sigma(ax) = a\sigma(x); \tag{6.15}$$

$$m(x, ay) = am(x, y) + \sigma(x)(a)y; \tag{6.16}$$

$$\sigma \circ \omega(x) = \sigma(x)^2; \tag{6.17}$$

$$\omega(ax) = a^2\,\omega(x) + \sigma(ax)(a)x. \tag{6.18}$$

Proposition 6.2.3. *Il y a une correspondance bijective entre les structures de Lie-Rinehart restreintes sur le couple* (A, L) *et les multidérivations restreintes* (m, ω) *d'ordre* 1 *telles que*

$$m(x, m(y, z)) + m(y, m(z, x)) + m(z, m(x, y)) = 0 \tag{6.19}$$

et

$$m(x, \omega(y)) = m(m(x, y), y). \tag{6.20}$$

6.2.2 Déformations formelles restreintes

Définition 6.2.4. Une déformations formelle restreinte de (m, ω) est donnée par deux applications

$$\begin{aligned} m_t : L \times L &\longrightarrow L[[t]] \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{i \geq 0} t^i m_i(x, y); \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \omega_t : L &\longrightarrow L[[t]] \\ x &\longmapsto \sum_{j \geq 0} t^j \omega_j(x), \end{aligned}$$

avec $m_0 = m$, $\omega_0 = \omega$ et (m_i, ω_i) des multidérivations restreintes.
De plus, m_t et ω_t doivent vérifier, pour $x, y, z \in L$,

$$m_t(x, m_t(y, z)) + m_t(y, m_t(z, x)) + m_t(z, m_t(x, y)) = 0; \tag{6.21}$$

$$m_t(x, \omega_t(y)) = m_t(m_t(x, y), y); \tag{6.22}$$

$$\omega_t(x + y) = \omega_t(x) + \omega_t(y) + m_t(x, y); \tag{6.23}$$

$$\sum_{i=0}^{k} \sigma_i\left(\omega_{k-i}(x)\right) = \sum_{i=0}^{k} \sigma_i(x) \circ \left(\sigma_{k-i}(x)\right), \quad \forall k \geq 0. \tag{6.24}$$

Remarque.

1. m_t s'étend à $L[[t]]$ par $\mathbb{F}[[t]]$-linéarité.
2. ω_t s'étend à $L[[t]]$ en utilisant les équations (6.3) et (6.23).

Remarque. La condition (6.21) assure que l'objet déformé $(A, L[[t]], m_t, \sigma_t)$ est une algèbre de Lie-Rinehart. Les conditions (6.21), (6.22) et (6.23) assurent que $(L[[t]], m_t, \omega_t)$ est une algèbre de Lie restreinte. De plus, si la condition (6.24) est vérifiée, alors $(A, L[[t]], m_t, \omega_t, \sigma_t)$ est une algèbre de Lie-Rinehart restreinte.

Définition 6.2.5. Si la condition (6.24) de la définition 6.2.4 n'est pas satisfaite, la déformation est dite *faible*.

Remarque. On voit ici qu'il n'y a pas d'analogie de la condition (5.23) que l'on avait imposée dans la définition 5.4.1. Si $p = 2$, la condition de Hochschild de la définition 6.2.1 devient linéaire en ω et σ, ainsi ω_t et σ_t la vérifient sans imposer de conditions supplémentaires.

Remarque. Comme dans le chapitre précédent, tous les résultats suivants qui concernent les déformations formelles, équivalences et obstructions en caractéristique 2 sont également valables pour des algèbres de Lie restreintes, en oubliant le structure de Lie-Rinehart. De plus, avoir une déformation faible est suffisant pour que ces résultats appliqués aux algèbres de Lie restreintes soient valables.

Lemme 6.2.6. *Soit (m_t, ω_t) une déformation restreinte de (m, ω). Alors $(m_k, \omega_k) \in C^2_{*_2}(L, L)$ $\forall k \geq 0$.*

Preuve. Soient $x, y \in L$. En développant l'équation (6.23), on obtient

$$\sum_{i\geq 0} t^i \omega_i(x + y) = \sum_{i\geq 0} t^i \omega_i(x) + \sum_{i\geq 0} t^i \omega_i(y) + \sum_{i\geq 0} t^i m_i(x).$$

Puis, pour chaque $k \geq 0$, on a

$$\omega_k(x + y) = \omega_k(x) + \omega_k(y) + m_k(x, y),$$

ce qui est l'identité désirée. De plus, pour $\lambda \in \mathbb{F}$, on a

$$\omega_t(\lambda x) = \sum_{i\geq 0} t^i \omega_i(\lambda x) = \lambda^2 \sum_{i\geq 0} t^i \omega_i(x), \text{ donc } \omega_i(\lambda x) = \lambda^2 \omega_i(x), \ \forall i \geq 0.$$

□

Nous avons le résultat classique suivant :

Proposition 6.2.7. *Soit (m_t, ω_t) une déformation restreinte de (m, ω). Alors (m_1, ω_1) est un 2-cocycle de la cohomologie restreinte, ce qui signifie*

$$d^2_{CE} m_1 = 0 \ \textit{et} \ \delta^2 \omega_1 = 0.$$

Preuve. La théorie ordinaire assure que $d^2_{\mathrm{CE}} m_1 = 0$. Il reste à vérifier que $\delta^2 \omega_1 = 0$. Si on développe l'équation (6.22), on obtient

$$\sum_{i,j\geq 0} t^{i+j} m_i(x, \omega_j(y)) = \sum_{i,j\geq O} t^{i+j} m_i(m_j(x, y), y). \tag{6.25}$$

En identifiant les coefficients t, on obtient

$$m_1(x, \omega(y)) + m(x, \omega_1(y)) = m(m_1(x, y), y) + m_1(m(x, y), y),$$

ce qui est équivalent à $\delta^2 \omega_1 = 0$. □

6.2.3 Équivalence de déformations formelles

Soit $\phi : L[[t]] \longrightarrow L[[t]]$ un automorphisme formel défini sur L par

$$\phi(x) = \sum_{i\geq 0} t^i \phi_i(x),\ \phi_i : L \longrightarrow L,\ \phi_0 = id,$$

puis étendu par $\mathbb{F}[[t]]$-linéarité.

Définition 6.2.8. Deux déformations formelles (m_t, ω_t) et (m'_t, ω'_t) de L sont dites *équivalentes* s'il existe un automorphisme formel ϕ_t tel que

$$m_t\left(\phi_t(x), \phi_t(y)\right) = \phi_t\left(m'_t(x,y)\right) \text{ et} \tag{6.26}$$

$$\phi_t\left(\omega_t(x)\right) = \omega'_t\left(\phi_t(x)\right). \tag{6.27}$$

Lemme 6.2.9. *Avec les données ci-dessus, on a*

$$m_i(x,y) + m'_1(x,y) = \phi_1(m(x,y)) + m(x,\phi_1(y)) + m(\phi_1(x),y); \tag{6.28}$$
$$\omega_1(x) + \omega'_1(x) = m(\phi_1(x),x) + \phi_1\left(\omega(x)\right). \tag{6.29}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}(6.26) \Longleftrightarrow m_t\left(\sum_{i\geq 0} t^i\phi_i, \sum_{j\geq 0} t^j\phi_j\right) &= \left(\sum_{k\geq 0} t^k m'_t(x,y)\right)\\ \Longleftrightarrow \sum_{i,j,k\geq 0} t^{i+j+k} m_k\left(\phi_i(x), \phi_j(y)\right) &= \sum_{i,j\geq 0} t^{i+j}\phi_j(m'_i(x,y)).\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de t, on obtient

$$m(\phi_1(x),y) + m(x,\phi_(y)) + m_1(x,y) = \phi_1(m(x,y)) + m'_1(x,y),$$

ce qui est équivalent à la première équation voulue. les calculs suivants sont faits modulo t^2.

$$\begin{aligned}(6.27) \Rightarrow \phi_t\left(\sum_{i\geq 0} t^i\,\omega_i(x)\right) &= \omega'_t\left(x + t\phi_1(x)\right)\\ \Rightarrow \sum_{i\geq 0} t^i\phi_t(\omega_i(x)) &= \omega'_t(x) + \omega'_t(t\phi_1(x)) + m'_t(x, t\phi_1(x))\\ \Rightarrow \sum_{i,j\geq} t^{i+j}\phi_j(w_i(x)) &= \omega(x) + t\left(\omega'_1(x) + m(x,\phi_1(x))\right).\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de t, on obtient

$$\omega_1(x) + \phi_1(\omega(x)) = \omega'_1(x) + m(x,\phi_1(x)),$$

ce qui est équivalent à la deuxième équation voulue.

□

Proposition 6.2.10. *Si (m_t, ω_t) et (m'_t, ω'_t) sont deux déformations équivalentes de L, alors leurs éléments infinitésimaux (m_1, ω_1) et (m'_1, ω'_1) sont dans la même classe de cohomologie.*

Preuve. Il suffit de remarquer que

$$\phi_1(m(x,y)) + m(x,\phi_1(y)) + m(m\phi_1(x),y) = d^1_{\mathrm{CE}}\phi_1(x,y)$$

et

$$m(\phi_1(x),x) + \phi_1(\omega(x)) = \delta^1\phi_1$$

dans le lemme précédent. □

Définition 6.2.11. Une déformation formelle (m_t,ω_t) de L est dite *triviale* s'il existe un automorphisme formel ϕ_t tel que

$$\phi_t\left(m_t(x,y)\right) = m(\phi_t(x),\phi_t(y)); \tag{6.30}$$

$$\phi_t\left(\omega_t(x)\right) = \omega\left(\phi_t(x)\right). \tag{6.31}$$

Proposition 6.2.12. *Supposons que $(m_1,\omega_1) \in B^2_{*_2}(L,L)$. Alors la déformation infinitésimale donnée par $m_t = m + tm_1$ et $\omega_t = \omega + t\omega_1$ est triviale.*

Preuve. Supposons que $m_1 \in B^2_{*_2}(L,L)$: $\exists\ \varphi : L \to L$ tel que $m_1 = d^2_{\mathrm{CE}}\varphi$ et $\omega_1 = \delta^1\varphi$. Considérons l'automorphisme formel

$$\phi_t = \mathrm{id} + t\varphi.$$

Puisque m_1 est un 2-cobord de Chevalley-Eilenberg, on a

$$m_1(x,y) = \varphi(m(x,y)) + m(x,\varphi(y)) + m(\varphi(x),y). \tag{6.32}$$

Ainsi, on peut écrire

$$m(x,y) + t\left(\varphi(m(x,y)) + m_1(x,y)\right) = m(x,y) + t\left(m(x,\varphi(y)) + m(\varphi(x),y)\right),$$

ce qui est équivalent à

$$\phi_t\left(m(x,y) + tm_1(x,y)\right) = m(\phi_t(x),\phi_t(y)).$$

On obtient (mod t^2)

$$\phi_t(m_t(x,y)) = m(\phi_t(x),\phi_t(y)). \tag{6.33}$$

Puis, en utilisant l'identité $\omega_1 = \delta^1\varphi$, on a

$$\omega_1(x) + \varphi\left(\omega(x)\right) = m(x,\varphi(x)). \tag{6.34}$$

On peut donc écrire

$$\omega(x) + t\left(\omega_1(x) + \phi\left(\omega(x)\right)\right) = \omega(x) + tm(x,\varphi(x)),$$

ce qui est équivalent (mod t^2) à

$$\phi_t\left(\omega(x) + t\,\omega_1(x)\right) = \omega(x + t\varphi(x)).$$

Finalement, on obtient (mod t^2)

$$\phi_t\left(\omega_t(x)\right) = \omega(\phi_t(x)). \tag{6.35}$$

Les équations (6.33) et (6.35) impliquent que la déformation est triviale.

□

Théorème 6.2.13. *Le second groupe cohomologie restreinte $H^2_{*_2}(L,L)$ classifie à équivalence près les déformations restreintes infinitésimales.*

6.2.4 Obstructions

Soit (m,ω) une multidérivation restreinte. Une déformation restreinte (m_t^n,ω_t^n) est dite d'ordre $n\in\mathbb{N}$ si elle est donnée par

$$m_t^n=\sum_{k=0}^{n}t^km_k \quad \text{et} \quad \omega_t^n=\sum_{k=0}^{n}t^k\omega_k.$$

Définition 6.2.14. Pour $x,y,z\in L$, on définit les applications suivantes :

$$\begin{aligned}\mathrm{obs}_{n+1}^{(1)}(x,y,z)&=\sum_{i=1}^{n}\left(m_i(x,m_{n+1-i}(y,z))+m_i(y,m_{n+1-i}(z,x))+m_i(z,m_{n+1-i}(x,y))\right);\\ \mathrm{obs}_{n+1}^{(2)}(x,y)&=\sum_{i=1}^{n}\left(m_i(y,\omega_{n+1-i}(x))+m_i(m_{n+1-i}(y,x),x)\right).\end{aligned}$$

Lemme 6.2.15. $\left(obs_{n+1}^{(1)},obs_{n+1}^{(2)}\right)\in C_{*_2}^3(L,L)$.

Preuve.

$$\begin{aligned}\mathrm{obs}_{n+1}^{(2)}(x_1+x_2,y)&=\sum_{i=1}^{n}\left(m_i(y,\omega_{n+1-i}(x_1+x_2))+m_i\left(m_{n+1-i}(y,x_1+x_2),x_1+x_2\right)\right)\\ &=\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\left(y,\omega_{n+1-i}(x_1)\right)+m_i\left(y,\omega_{n+1-i}(x_2)\right)+m_i\left(y,m_{n+1-i}(x_1,x_2)\right)\right)\\ &\quad+\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\left(m_{n+1-i}(y,x_1),x_1\right)+m_i\left(m_{n+1-i}(y,x_1),x_2\right)\right)\\ &\quad+\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\left(m_{n+1-i}(y,x_2),x_1\right)+m_i\left(m_{n+1-i}(y,x_2),x_2\right)\right)\\ &=\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\left(y,\omega_{n+1-i}(x_1)\right)+m_i\left(m_{n+1-i}(y,x_1),x_1\right)\right)\\ &\quad+\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\left(y,\omega_{n+1-i}(x_2)\right)+m_i\left(m_{n+1-i}(y,x_2),x_2\right)\right)\\ &\quad+\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\left(m_i(y,m_{n+1-i}(x_1,x_2)\right)+m_1\left(m_{n+1-i}(y,x_1),x_2\right)+m_1\left(m_{n+1-i}(y,x_2),x_1\right)\right)\\ &=\mathrm{obs}_{n+1}^{(2)}(x_1,y)+\mathrm{obs}_{n+1}^{(2)}(x_2,y)+\mathrm{obs}_{n+1}^{(1)}(x_1,x_2,y).\end{aligned}$$

□

Proposition 6.2.16. *Soit (m_t^n,ω_t^n) une déformation d'ordre n de (m,ω). Soit $(m_{n+1},\ \omega_{n+1})\in C_{*_2}^2(L,L)$. Alors $\left(m_t^n+t^{n+1}m_{n+1},\ \omega_t^n+t^{n+1}\omega_{n+1}\right)$ est une déformation d'ordre $(n+1)$ de L si et seulement si*

$$\left(obs_{n+1}^{(1)},obs_{n+1}^{(2)}\right)=d_{*_2}^2\left(m_{n+1},\ \omega_{n+1}\right).$$

Preuve. Si $m_t^n+t^{n+1}m_{n+1}$ vérifie l'identité de Jacobi, on a alors, pour $x,y,z\in L$:

$$\sum_{i=0}^{n+1}\left(m_i(x,m_{n+1-i}(y,z))+m_i(y,m_{n+1-i}(z,x))+m_i(z,m_{n+1-i}(x,y))\right)=0. \tag{6.36}$$

Cette équation peut se réécrire

$$\sum_{i=1}^{n} \left(m_i(x, m_{n+1-i}(y,z)) + m_i(y, m_{n+1-i}(z,x)) + m_i(z, m_{n+1-i}(x,y))\right) = d^2_{\mathrm{CE}} m_{n+1}(x,y,z). \tag{6.37}$$

Réciproquement, si $\mathrm{obs}^{(1)}_{n+1} = d^2_{\mathrm{CE}} m_{n+1}$, alors $m^n_t + t^{n+1} m_{n+1}$ vérifie l'identité de Jacobi. Supposons que $\omega^n_t + t^{n+1}\omega_{n+1}$ est une 2-opération compatible avec $m^n_t + t^{n+1} m_{n+1}$. L'équation suivante est alors vérifiée :

$$m^{n+1}_t \left(x, \omega^{n+1}_t\right) = m^{n+1}_t \left(m^{n+1}_t(x,y), y\right), \tag{6.38}$$

où l'on a noté $m^{n+1}_t = m^n_t + t^{n+1} m_{n+1}$ et $\omega^{n+1}_t = \omega^n_t + t^{n+1}\omega_{n+1}$. En développant l'équation (6.38), on obtient

$$\sum_{q=0}^{n+1} t^q \sum_{i=0}^{q} m_i(x, \omega_{q-i}(y)) = \sum_{q=0}^{n+1} t^q \sum_{i=0}^{q} m_i(m_{q-i}(x,y), y). \tag{6.39}$$

En identifiant les coefficients de t^{n+1}, on obtient en particulier

$$\sum_{i=0}^{n+1} m_i(x, \omega_{n+1-i}(y)) = \sum_{i=0}^{n+1} t^q \sum_{i=0}^{n+1} m_i(m_{n+1-i}(x,y), y),$$

ce qui peut être réécrit

$$\begin{aligned} m(x, \omega_{n+1}(y)) + m_{n+1}(x, \omega(y)) + m(m_{n+1}(x,y), y) + m_{n+1}(m(x,y), y) \\ = \sum_{i=1}^{n} \Big(m_i(x, \omega_{n+1-i}(y)) + m_i(m_{n+1-i}(x,y), y) \Big). \end{aligned}$$

On conclut que

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(m_i(x, \omega_{n+1-i}(y)) + m_i(m_{n+1-i}(x,y), y) \Big) = \delta^2_{*_2} \omega_{n+1}(x,y).$$

□

6.3 Algèbres de Heisenberg restreintes en caractéristique $p = 2$

Dans cette section, on détermine les structures restreintes sur l'algèbre de Heisenberg, on calcule de second groupe de cohomologie à coefficients adjoints et on donne un exemple de déformation formelle d'une algèbre de Lie-Rinehart restreinte construite à partir d'une algèbre de Heisenberg restreinte. On peut trouver quelques informations sur l'origine physique de ces algèbres dans la section 5.5.

6.3.1 Cohomologie restreinte

Soit $\mathbb{F}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 2. Rappelons que algèbre de Heisenberg $\mathcal{H}$ est engendrée par les éléments x, y, z avec le crochet $[x, y] = z$. En caractéristique 2, $\mathcal{H}$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2$. Soit $(\cdot)^{[2]}$ une 2-opération sur $\mathcal{H}$. On a alors

$$\begin{aligned} (x+y)^{[2]} &= x^{[2]} + y^{[2]} + z; \\ (x+z)^{[2]} &= x^{[2]} + z^{[2]}; \end{aligned} \tag{6.40}$$

$$(y+z)^{[2]} = y^{[2]} + z^{[2]}.$$

La 2-opération n'est donc pas 2-semilinéaire dans ce cas. Soit $u = ax + by + cz \in \mathcal{H}$, $a, b, c \in \mathbb{F}$. Alors

$$u^{[2]} = (ax+by+cz)^{[2]} = a^2x^{[2]} + b^2y^{[2]} + c^2z^{[2]} + abz. \tag{6.41}$$

Grâce à la seconde condition de la définition 6.1.1, l'image de $(\cdot)^{[2]}$ appartient au centre de $\mathcal{H}$, qui est de dimension 1 et engendré par z. Ainsi, il existe $\theta : \mathcal{H} \to \mathbb{F}$ linéaire telle que $x^{[2]} = \theta(x)z,\ y^{[2]} = \theta(y)z,\ z^{[2]} = \theta(z)z$. On se rend compte facilement que le lemme 5.5.2 reste valide dans le cas $p = 2$. On en déduit le résultat de classification suivant, en utilisant les mêmes techniques que pour le théorème 5.5.3.

Théorème 6.3.1. *Il y a deux algèbres de Heisenberg restreintes non isomorphes en caractéristique 2, respectivement données par les formes linéaires $\theta = 0$ et $\theta = z^*$.*

On calcule le second groupe de cohomologie restreinte de l'algèbre de Heisenberg restreinte avec coefficients adjoints. Soit θ une forme linéaire sur l'algèbre de Heisenberg ordinaire. On note $(\mathcal{H}, \theta)$ l'algèbre de Heisenberg restreinte obtenue avec θ. On note également $H^2_*(\mathcal{H}, \theta) = H^2_{*_2}((\mathcal{H}, \theta), (\mathcal{H}, \theta))$ le second groupe de cohomologie restreinte de $(\mathcal{H}, \theta)$ avec coefficients adjoints.

Soient $u, v \in \mathcal{H}$ et $(\varphi, \omega) \in C_{*_2}(\mathcal{H}, \theta)$. La condition de 2-cocycle restreinte est donnée par

$$\varphi\left(u, \theta(v)z\right) + [u, \omega(v)] + [\varphi(u,v), v] + \varphi([u,v], v) = 0. \tag{6.42}$$

la condition de 2-cobord restreinte est donnée par

$$\omega(u) = [\varphi(u), u] + \varphi\left(\theta(u)z\right). \tag{6.43}$$

En utilisant les mêmes techniques que pour les lemmes 5.5.5 et 5.5.6, on obtient la forme générale des 2-cocycles et des 2-cobords.

Lemme 6.3.2. *Les 2-cocycles restreints pour $(\mathcal{H}, \theta)$ sont donnés par les couples (φ, ω) tels que*

- *Cas $\theta = 0$:*

$$\begin{cases} \varphi(x,y) &= ax+by+cz \\ \varphi(x,z) &= fz \\ \varphi(y,z) &= iz \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega(x) &= (b+f)x+\gamma z \\ \omega(y) &= (a+i)y+\epsilon z \\ \omega(z) &= \kappa z \end{cases} \tag{6.44}$$

- *Cas $\theta = z^*$:*

$$\begin{cases} \varphi(x,y) &= ax+by+cz \\ \varphi(x,z) &= fz \\ \varphi(y,z) &= iz \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega(x) &= (b+f)x+\gamma z \\ \omega(y) &= (a+i)y+\epsilon z \\ \omega(z) &= ix+fy+\kappa z, \end{cases} \tag{6.45}$$

où tous les paramètres $a, b, c, d, e, f, h, i, \gamma, \epsilon, \kappa$ appartiennent à $\mathbb{F}$.

Lemme 6.3.3. *Les 2-cobords restreints pour $(\mathcal{H}, \theta)$ sont donnés par les couples (φ, ω) tels que*

$$\begin{cases} \varphi(x,y) &= Ax+By+\tilde{C}z \\ \varphi(x,z) &= Hz \\ \varphi(y,z) &= Gz, \end{cases}$$

avec $A, B, \tilde{C}, D, E, G, H$ des éléments de $\mathbb{F}$ et

- <u>*Cas $\theta = 0$*</u> : $\omega(x) = Ez,\ \omega(y) = Dz,\ \omega(z) = 0;$
- <u>*Cas $\theta = z^*$*</u> : $\omega(x) = Ez,\ \omega(y) = Dy,\ \omega(z) = Gx + Hy + Iz.$

Grâce aux lemmes 6.3.2 et 6.3.3, on est capable de calculer une base pour les seconds espaces de cohomologie restreinte à coefficients adjoints.

Théorème 6.3.4. *On a* $\dim_{\mathbb{F}}\left(H^2_{*_2}(\mathcal{H}, 0)\right) = 3$ *et* $\dim_{\mathbb{F}}\left(H^2_{*_2}(\mathcal{H}, z^*)\right) = 2.$

- *Une base pour* $H^2_{*_2}(\mathcal{H}, 0)$ *est donnée par* $\Big\{(\varphi_1, \omega_1), (\varphi_2, \omega_2), (0, \omega_3)\Big\}$, *avec*

$$\varphi_1(y, z) = z;\ \varphi_2(x, z) = z;\ \omega_1(y) = y;\ \omega_2(x) = x;\ \omega_3(z) = z.$$

(On n'écrit que les images non nulles).

- *Une base pour* $H^2_{*_2}(\mathcal{H}, z^*)$ *est donnée* $\Big\{(\varphi_1, \omega_1), (\varphi_2, \omega_2)\Big\}$, *avec*

$$\varphi_1(x, y) = x;\ \varphi_2(x, y) = y;\ \omega_1(y) = y;\ \omega_2(x) = x.$$

6.3.2 Structure de Lie-Rinehart restreinte et déformations restreintes

Dans cette section, on va construire une déformation infinitésimale d'une algèbre de Lie-Rinehart restreinte en caractéristique 2 construite à partir du l'algèbre de Heisenberg $(\mathcal{H}, z^*)$. Sur un corps $\mathbb{F}$ de caractéristique 2, il y a trois algèbres associatives commutatives unitaires de dimension 2, données par

- $A_0 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}\{e_1, e_2\}$, avec e_1 l'unité et $e_2e_2 = 0$;
- $A_1 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}\{e_1, e_2\}$, avec e_1 l'unité et $e_2e_2 = e_1$;
- $A_2 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}\{e_1, e_2\}$, avec e_1 l'unité et $e_2e_2 = e_2$.

Les algèbres A_0 et A_2 sont bien connues sur des corps de caractéristique différente de 2. Ici, une nouvelle algèbre A_1 apparaît. Supposons avoir un isomorphisme d'algèbres $\varphi : A_1 \to A_2$ donné par $\varphi(e_2) = \alpha e_1 + \beta e_2,\ \alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Alors, la condition $\varphi(e_2^2) = \varphi(e_2)^2$ implique que $e_1 = \alpha^2 e_1 + \beta^2 e_2$, donc $\beta = 0$. Mais puisque φ est un isomorphisme, c'est impossible. Il ne peut ainsi pas y avoir d'isomorphisme d'algèbres entre A_1 et A_2.

Lemme 6.3.5. *Soit* $L = (\mathcal{H}, z^*)$ *et* $A = A_1$. *Supposons que* A *agit sur* L *par* $a \cdot u = u,\ \forall a \in A,\ \forall u \in L$. *Alors, la seule structure de Lie-Rinehart restreinte sur le couple* (A, L) *est donnée par l'ancre* $\rho = 0$.

Preuve. Puisque $\rho : L \to \mathrm{Der}(L)$ doit être un morphisme de Lie, on a $\rho(z) = 0$. La condition de A-linéarité donne $\rho(x)(e_2) = \lambda(e_1 + e_2)$ et $\rho(y)(e_2) = \mu(e_1 + e_2),\ \lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Puisque ρ doit également être un morphisme restreint, on doit avoir $0 = \rho(x)^2(e_2) = \lambda\rho(x)(e_2) = \lambda^2(e_1 + e_2)$. Ainsi, on a $\lambda = 0$. Le même calcul avec y en lieu et place de x donne $\mu = 0$. □

Choisissons une multidérivation restreinte (m_1, ω_1) donnée par $m_1(x, y) = y,\ m_1(x, z) = m_1(y, z) = 0$ et $\omega_1(x) = x,\ \omega_1(y) = \omega_1(z) = 0$. En posant $\sigma_1(x)(e_2) = \sigma_1(y)(e_2) = e_1 + e_2,\ \sigma_t(z)(e_2) = 0$, on se rend compte que σ_1 est un symbole compatible avec (m_1, ω_1) qui donne une déformation restreinte infinitésimale.On obtient ainsi la déformation restreinte

$$m_t(x, y) = z + ty,\ m_t(x, z) = m_t(y, z) = 0;$$
$$\omega_t(x) = tx,\ \omega_t(y) = 0,\ \omega_t(x) = z;$$
$$\sigma_t(x)(e_2) = \sigma_t(y)(e_2) = e_1 + e_2,\ \sigma_t(z)(e_2) = 0.$$

Il est facile de voir que les applications $\mathrm{obs}_2^{(1)}$ et $\mathrm{obs}_2^{(2)}$ s'annulent sur la base de $(\mathcal{H}, z^*)$. Ainsi, il est possible d'étendre la déformation au moyen d'un 2-cocycle restreint.

Chapitre 7

Représentations des algèbres de Lie-Rinehart en caractéristique positive

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux représentations restreintes d'algèbres de Lie-Rinehart restreintes. L'étude des représentations est centrale dans la théorie de Lie, que ce soit pour les algèbres de Lie ([HJ78]), les algèbres de Lie-Rinehart [HJ90, CGL18, PSTZ22] ou les algèbres de Lie restreintes ([SF88, SH98, JJ04, YY14]). Notre objectif dans ce chapitre est d'étudier la notion de représentation restreinte pour les algèbres de Lie-Rinehart restreintes au travers de la construction de produits semi-directs et d'exemples.

Ce chapitre est organisé comme suit. On rappelle dans un premier temps la définition de représentation restreinte d'une algèbre de Lie-Rinehart restreinte et on donne deux exemples immédiats. Ensuite, on s'intéresse au produit semi-direct, que l'on étudie selon deux angles. Tout d'abord, on se place sur un corps de caractéristique $p = 2$ et on construit un produit semi-direct entre deux algèbres de Lie-Rinehart restreintes ayant la même composante associative et dont l'une des deux a une ancre nulle. Dans ce cas, on peut construire explicitement une 2-opération sur le produit semi-direct (proposition 7.2.6) et déduire une condition nécessaire et suffisante pour que ce produit semi-direct soit équipé d'une structure de Lie-Rinehart restreinte (proposition 7.2.7). Puis, sur un corps de caractéristique $p > 0$ quelconque, on construit un produit semi-direct entre une algèbre de Lie-Rinehart restreinte et une représentation restreinte. Dans ce cas, il est plus difficile de construire une p-opération explicite et quelques subtilités doivent être considérées (proposition 7.2.3). Finalement, on montre une condition nécessaire et suffisante pour que ce produit semi-direct soit aussi équipé d'une structure de Lie-Rinehart restreinte (proposition 7.2.4). La troisième section de ce chapitre est consacrée à l'étude de certains exemples de représentations restreintes d'algèbres de Lie-Rinehart restreintes en dimension infinie.

Ce chapitre est tiré d'un travail en cours avec Viacheslav Futorny et Abdenacer Makhlouf.

7.1 Généralités

Rappelons la définition d'une représentation d'une algèbre de Lie-Rinehart restreinte.

Définition 7.1.1. Soit (A, L, ρ) une algèbre de Lie-Rinehart restreinte. Une représentation restreinte de (A, L, ρ) est un A-module M équipé d'un morphisme restreint A-linéaire d'algèbres de Lie restreintes $\pi : L \longrightarrow \mathrm{End}(M),\ x \longmapsto \pi_x$ tel que

$$\pi_x(am) = a\pi_x(m) + \rho_x(a)m, \quad \forall\, a \in A,\ \forall\, m \in M,\ \forall\, x \in L,$$

Si π n'est pas A-linéaire dans la définition précédente, la représentation est dite "faible" (voir [PSTZ22]).

Exemples.

1. **Représentation adjointe.** Soit (A, L, ρ) une algèbre de Lie-Rinehart restreinte. On peut alors considérer la représentation restreinte faible donnée par $\mathrm{ad} : L \longrightarrow \mathrm{Der}(L),\ x \longmapsto [x, \cdot]$.
2. **Représentation naturelle.** Soit (A, L, ρ) une algèbre de Lie-Rinehart restreinte. Alors (A, ρ) est une représentation restreinte de (A, L, ρ).

Définition 7.1.2. Soient (A, L, ρ) une algèbre de Lie-Rinehart et (M, π), (M', π') deux représentations faibles de (A, L, ρ). On dit qu'un morphisme de A-modules $\phi : M \to M'$ est un *morphisme de représentations faibles* si $\phi \circ \pi_x = \pi'_x \circ \phi,\ \forall x \in L$.

7.2 Produit semi-direct

Dans cette section, on présente deux versions du produit semi-direct pour les algèbres de Lie-Rinehart restreintes. La première fonctionne pour n'importe quelle caractéristique et s'obtient en faisant agir (A, L, ρ) sur un A-module V quelconque. Dans ce dernier cas, il n'est pas toujours possible de construire une p-opération explicite sur le produit semi-direct (voir la proposition 7.2.3 et la remarque qui suit). La deuxième est spécifique à la caractéristique $p = 2$, s'obtient en faisant agir une algèbre de Lie-Rinehart restreinte (A, L, ρ) sur une autre algèbre de Lie-Rinehart restreinte $(A, \mathfrak{g}, 0)$ à ancre nulle.

7.2.1 Produit semi-direct en caractéristique p quelconque

Soit $\left(L, [\cdot,\cdot], (\cdot)^{[p]}\right)$ une algèbre de Lie restreinte sur un corps $\mathbb{F}$ de caractéristique $p > 0$ et (π, V) une représentation restreinte de L à valeurs dans un espace vectoriel V (si $x \in L$, on utilisera indifféremment les notations $\pi(x)$ et π_x pour désigner l'image de x par la représentation π). On peut alors munir l'espace vectoriel $L \oplus V$ d'une structure d'algèbre de Lie avec le crochet

$$[(x, v), (y, w)] := ([x, y], \pi_x(w) - \pi_y(v)), \quad x, y \in L,\ v, w \in V. \tag{7.1}$$

On appelle $L \oplus V$ muni du crochet (7.1) le *produit semi-direct* de L avec V et on le note $L \rtimes_\pi V$, ou simplement $L \rtimes V$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Structure restreinte. L'objectif est maintenant de munir l'algèbre de Lie $L \rtimes_\pi V$ d'une p-opération compatible avec le crochet (7.1).

Lemme 7.2.1. *Soient $(L, [\cdot,\cdot])$ une algèbre de Lie et (π, V) une représentation de L. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\pi\left(\mathrm{ad}_x^n(y)\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \pi_x^{n-k} \pi_y \pi_x^k,\ x, y \in L. \tag{7.2}$$

Preuve. Soient $x, y \in L$. Prouvons le lemme par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. La formule est vraie pour $n = 0, 1$. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que le lemme soit vrai. Alors,

$$\begin{aligned}
\pi\left(\mathrm{ad}_x^{n+1}(y)\right) &= \pi_x \pi\left(\mathrm{ad}_x^n(y)\right) - \pi\left(\mathrm{ad}_x^n(y)\right)\pi_x \\
&= \pi_x \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \pi_x^{n-k} \pi_y \pi_x^k\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \pi_x^{n-k} \pi_y \pi_x^k\right) \pi_x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\pi_x^{n-k+1}\pi_y\pi_x^k - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\pi_x^{n-k}\pi_y\pi_x^{k+1}\\
&= \pi_x^{n+1}\pi_y + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\pi_x^{n-k+1}\pi_y\pi_x^k - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}\pi_x^{n-k+1}\pi_y\pi_x^k - (-1)^n\pi_y\pi_x^{n+1}\\
&= \pi_x^{n+1}\pi_y + (-1)^{n+1}\pi_y\pi_x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)\pi_x^{n-k+1}\pi_y\pi_x^k\\
&= \pi_x^{n+1}\pi_y + (-1)^{n+1}\pi_y\pi_x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k}\pi_x^{n-k+1}\pi_y\pi_x^k\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}\pi_x^{n-k+1}\pi_y\pi_x^k,
\end{aligned}
$$

ce qui achève la récurrence. □

Lemme 7.2.2. *Soient $\left(L,[\cdot,\cdot],(\cdot)^{[p]}\right)$ une algèbre de Lie restreinte, (π,V) une représentation restreinte de L et $L\oplus V$ équipée du crochet (7.1). Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a*

$$\mathrm{ad}^n_{(x,v)}(y,w) = \left(\mathrm{ad}^n_x(y), \pi^n_x(w) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\pi_x^{n-k}\pi_y\pi_x^{k-1}(v)\right),\quad x,y\in L,\ v\in V. \tag{7.3}$$

En particulier, si $n=p$, on a

$$\mathrm{ad}^p_{(x,v)}(y,w) = \left(\mathrm{ad}^p_x(y), \pi^p_x(w) - \pi_y\pi_x^{p-1}(v)\right)\quad x,y\in L,\ v\in V. \tag{7.4}$$

Preuve. Montrons la formule (7.3) par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$. Elle est vraie pour $n=0,1$. Soient $n\in\mathbb{N}$ tel que (7.3) soir vraie, $x,y\in L$ et $v,w\in V$. Avec la formule du crochet (7.1), il est clair que la première composante de $\mathrm{ad}^{n+1}_{(x,v)}(y,w)$ sera égale à $\mathrm{ad}^{n+1}_x(y)$. Calculons la deuxième composante.

$$
\begin{aligned}
&\pi_x\left(\mathrm{ad}^n_{(x,v)}(y,w)\right) - \pi\left(\mathrm{ad}^n_x(y)\right)(v)\\
&= \pi_x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\pi_x^{n-k+1}\pi_y\pi_{k-1}(v) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\pi_x^{n-k}\pi_y\pi_k(v) \quad \text{(lemme 7.2.1)}\\
&= \pi_x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^k\binom{n}{k} - (-1)^{k-1}\binom{n}{k-1}\right)\pi_x^{n-k+1}\pi_y\pi_x^{k-1}(v) + (-1)^{n+1}\pi_y\pi_x^n(v)\\
&= \pi_x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}\pi_x^{n-k+1}\pi_y\pi_x^{k-1}(v),
\end{aligned}
$$

ce qui achève la récurrence. □

Proposition 7.2.3. *Soit $\left(L,[\cdot,\cdot],(\cdot)^{[p]}\right)$ une algèbre de Lie restreinte et (π,V) une représentation restreinte de L. Supposons que le centre de $L\rtimes_\pi V$ est trivial. Alors l'application $(x,v)^{[p]} = \left(x^{[p]},\pi_x^{p-1}(v)\right)$ est une p-opération sur le produit semi-direct $L\rtimes_\pi V$ compatible avec le crochet (7.1).*

Preuve. Puisque $L \rtimes_\pi V$ est de centre trivial, le corollaire 5.1.17 assure qu'il suffit de vérifier la condition 2. de la définition 5.1.5. Soient $x, y \in L,\ v, w \in V$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}^p_{(x,v)}(y,w) - \Big[(x, v^{[p]}), (y,w)\Big] &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{(lemme 7.2.2)}}}{=} \Big(\mathrm{ad}^p_x(y), \pi^p_x(w) - \pi_y\pi^{p-1}_x(v)\Big) - \Big[\Big(x^{[p]}, \pi^{p-1}_x(v)\Big), (y,v)\Big] \\
&= \Big(\mathrm{ad}_{x^{[p]}}(y), \pi^p_x(w) - \pi_y\pi^{p-1}_x(v)\Big) \\
&\quad - \Big(\mathrm{ad}_{x^{[p]}}(y), \pi_{x^{[p]}}(w) - \pi_y\pi^{p-1}_x(v)\Big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Remarque dans le cas où le centre de $L \rtimes_\pi V$ n'est pas trivial. [1] Si le centre de $L \rtimes_\pi V$ n'est pas trivial, l'application $(x,v)^{[p]} = \Big(x^{[p]}, \pi^{p-1}_x(v)\Big)$ ne vérifie pas forcément la condition 3. de la définition 5.1.5. L'algèbre de Lie $L \rtimes_\pi V$ n'est alors que restreignable, ce qui signifie qu'il existe au moins une p-opération sur $L \rtimes_\pi V$, mais qui n'est pas forcément $(\cdot)^{[p]}$. Pour s'en convaincre, notons $Z := C(L \rtimes_\pi V)$ le centre de $L \rtimes_\pi V$. C'est un p-idéal de $L \rtimes_\pi V$, on peut donc considérer l'application

$$\begin{aligned}
(\cdot)^{[p]'} : (L \rtimes_\pi V)/Z &\longrightarrow (L \rtimes_\pi V)/Z \\
((x,v) + Z) &\longmapsto (x,v)^{[p]} + Z.
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Le quotient $(L \rtimes_\pi V)/Z$ est une algèbre de Lie avec le crochet

$$[(x,v) + Z, (y,w) + Z] = \big[(x,v), (y,w)\big] + Z,\ x, y \in L. \tag{7.6}$$

L'application $(\cdot)^{[p]'}$ vérifie la condition 2. de la définition 5.1.5 et est donc une p-opération sur $(L \rtimes_\pi V)/Z$, puisque $(L \rtimes_\pi V)/Z$ a un centre trivial, d'après le corollaire 5.1.17.

Pour $x, y \in L,\ v, w \in V$, notons $s_i\big((x,v),(y,w)\big)$ les coefficients obtenus comme à la définition 5.1.5 pour le crochet (7.1) et $s'_i\big((x,v),(y,w)\big)$ les coefficients obtenus avec le crochet (7.6). On a alors

$$s_i\big((x,v),(y,w)\big) = s'_i\big((x,v),(y,w)\big), \quad \forall x, y \in L,\ v, w \in V.$$

Puisque $(\cdot)^{[p]'}$ est une p-opération sur $(L \rtimes_\pi V)/Z$, on a

$$\big((x,v) + (y,w) + Z\big)^{[p]'} = \big((x,v) + Z\big)^{[p]'} + \big((y,w) + Z\big)^{[p]'} + \sum_{i=1}^{p-1} s'_i\big((x,v),(y,w)\big), \quad \text{ce qui équivaut à}$$

$$\big((x,y) + (y,w)\big)^{[p]} + Z = (x,v)^{[p]} + (y,w)^{[p]} + Z + \sum_{i=1}^{p-1} s_i\big((x,v),(y,w)\big).$$

Ainsi, il existe $z \in Z$ tel que

$$\big((x,y) + (y,w)\big)^{[p]} = (x,v)^{[p]} + (y,w)^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i\big((x,v),(y,w)\big) + z, \tag{7.7}$$

1. Cette remarque illustre bien les difficultés qu'impliquent la non-linéarité des p-opérations et la prudence qu'il faut observer en les manipulant.

ce qui montre que la condition 3. de la définition 5.1.5 n'est pas forcément satisfaite par l'application $(x,v)^{(p)} = \left(x^{[p]}, \pi_x^{p-1}(v)\right)$.

En revanche, $L \rtimes_\pi V$ est alors restreignable et le théorème de Jacobson (5.1.16) permet de construire une p-opération. Soit $\{(e_i,0)\} \cup \{(0,v_j)\}$ une base de $L \oplus V$ (en tant qu'espace vectoriel). On définit une application

$$(e_i,0)^{[p]^*} := \left(e_i^{[p]}, 0\right); \quad (0,v_j)^{[p]^*} := (0,0).$$

Cette application vérifie la condition 2. de la définition 5.1.5. On l'étend ensuite à n'importe quel élément de $L \rtimes_\pi V$ en utilisant les conditions 1. et 3. de la définition 5.1.5. Par construction, $(\cdot)^{[p]^*}$ est une p-opération sur $L \rtimes_\pi V$ qui coïncide avec $(\cdot)^{[p]}$ sur la base $\{(e_i,0)\} \cup \{(0,v_j)\}$ de $L \rtimes_\pi V$. En revanche, comme le centre $C(L \rtimes_\pi V)$ n'est pas trivial, on n'a pas forcément $(x,v)^{[p]^*} = (x,v)^{[p]} \;\; \forall (x,v) \in L \rtimes_\pi V$.

Note. Ce dernier fait n'est pas une contradiction avec le point 2. du corollaire 5.1.13, car si le centre $C(L \rtimes_\pi V)$ n'est pas trivial, alors $(\cdot)^{[p]}$ n'est pas forcément une p-opération sur $L \rtimes_\pi V$.

En imitant la preuve du théorème de Jacobson (5.1.16), on peut construire $(\cdot)^{[p]^*}$ d'une autre façon. Reprenons la base $\{(e_i,0)\} \cup \{(0,v_j)\}$ de $L \rtimes_\pi V$. On a alors

$$\mathrm{ad}^p_{(e_i,v_j)} - \mathrm{ad}_{(e_i,v_j)^{[p]}} = 0.$$

Ainsi, dans l'algèbre enveloppante (ordinaire) $U\big(L \rtimes_\pi V\big)$, on a

$$(e_i,v_j)^p - (e_i,v_j)^{[p]} \in C_{U\left(L \rtimes_\pi V\right)}\big(L \rtimes_\pi V\big).$$

On peut définir une application p-semilinéaire à valeurs dans le centre de $\big(L \rtimes_\pi V\big)$ par

$$f\left(\sum_{i,j} \alpha_{i,j}(e_i,v_j)\right) := \sum_{i,j} \alpha_{i,j}\left((e_i,v_j)^p - (e_i,v_j)^{[p]}\right).$$

On a alors

$$(x,v)^{[p]^*} = (x,v)^{[p]} + f(x,v), \;\; \forall (x,v) \in L \rtimes_\pi V.$$

Structure de Lie-Rinehart restreinte. Soit A une algèbre associative commutative et $\left(L, [\cdot,\cdot], (\cdot)^{[p]}\right)$ une algèbre de Lie restreinte, telles que (A, L, ρ) soit une algèbre de Lie-Rinehart restreinte. On considère de plus (π, V) une représentation restreinte de (A, L, ρ). Supposons que le centre de $L \rtimes_\pi V$ est trivial. C'est alors une algèbre de Lie restreinte avec

$$\begin{cases} [(x,v),(y,w)] &= \Big([x,y], \pi_x(w) - \pi_y(v)\Big), \quad x,y \in L, \; v,w \in V. \\ (x,v)^{[p]} &= \left(x^{[p]}, \pi_x^{p-1}(v)\right). \end{cases}$$

Le but est de munir $(A, L \rtimes_\pi V)$ d'une structure d'algèbre de Lie-Rinehart restreinte. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} : L \rtimes_\pi V &\longrightarrow \mathrm{Der}(A) \\ (x,v) &\longmapsto \rho_x. \end{aligned}$$

Proposition 7.2.4. *Le couple $(A, L \rtimes_\pi V)$ muni de la structure restreinte définie à la proposition 7.2.3 et de l'application $\tilde{\rho}$ définie ci-dessus est une algèbre de Lie-Rinehart restreinte si et seulement si la représentation π vérifie*

$$\pi_{ax}^{p-1}(av) = a^p \pi_x^{p-1}(v) + \rho_{ax}^{p-1}(a)v,\ \ a \in A,\ \ x \in L,\ \ v \in V. \tag{7.8}$$

Preuve. Il est clair que $\tilde{\rho}$ ainsi définie est une morphisme de Lie restreint A-linéaire à valeurs dans les dérivations de A. montrons les deux conditions de compatibilité. Soient $x, y \in L,\ a \in A,\ v, w \in V$.

- Première condition :

$$\begin{aligned}
&[(x,v), a(y,w)] - \tilde{\rho}(x,v)(a)(y,w) - a\big[(x,v),(y,w)\big] \\
&= \Big([x,ay], \pi_x(aw) - \pi_{ay}(v)\Big) - \Big(\rho_x(a)y + a[x,y], \rho_x(a)w + a\pi_x(w) - a\pi_y(v)\Big) \\
&= (0\ , \pi_x(aw) - \rho_x(a)w - a\pi_x(w)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

- Deuxième condition (Hochschild) :

$$\begin{aligned}
&\big(a(x,v)\big)^{[p]} - a^p(x,v)^{[p]} - \tilde{\rho}\big(a(x,v)\big)(a)(x,v) \\
&= \Big((ax)^{[p]}, \pi_{ax}^{p-1}(av)\Big) - a^p\Big(x^{[p]}, \pi_x^{p-1}(v)\Big) - \rho_{ax}^{p-1}(a)(x,v) \\
&= \Big(0\ , \pi_{ax}^{p-1}(av) - a^p\Big(x^{[p]}\Big) - \rho_{ax}^{p-1}(a)v\Big) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

  la dernière égalité étant vraie si et seulement si la condition (7.8) est satisfaite.

□

7.2.2 Produit semi-direct en caractéristique $p = 2$

Dans cette section, le corps $\mathbb{F}$ sera de caractéristique $p = 2$. On construit le produit semi-direct d'une algèbre de Lie-Rinehart restreinte par une algèbre de Lie restreinte équipée d'une structure de A-module.

Soient A une $\mathbb{F}$-algèbre associative commutative et $\Big(L, [\cdot,\cdot], (\cdot)^{[2]}\Big)$ une algèbre de Lie restreinte, telles que (A, L, ρ) soit une algèbre de Lie-Rinehart restreinte. On considère $\Big(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}, (\cdot)^{[2]_{\mathfrak{g}}}\Big)$ une algèbre de Lie restreinte telle que $(A, L, 0)$ soit une algèbre de Lie-Rinehart restreinte.

Définition 7.2.5. Avec les données ci-dessus, on dit que l'algèbre de Lie-Rinehart restreinte (A, L, ρ) agit sur $\mathfrak{g}$ s'il existe un morphisme de Lie restreint $\alpha : L \longrightarrow \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ tel que

- $\alpha(ax) = a\alpha(x),\ a \in A,\ x \in L$ (α est A-linéaire) ;
- $\alpha(x)(ag) = a\alpha(x)(g) + \rho(x)(a)g,\ a \in A,\ x \in L,\ g \in \mathfrak{g}$;
- $\alpha(x)\Big(g^{[2]_{\mathfrak{g}}}\Big) = [\alpha(x)(g), g]_{\mathfrak{g}},\ x \in L,\ g \in \mathfrak{g}$. ($\alpha(x)$ est une dérivation restreinte $\forall x \in L$) ;
- $\alpha(ax)(ag) = a^2\alpha(x)(g) + a\rho(x)(a)(g),\ a \in A,\ x \in L,\ g \in \mathfrak{g}$.

Proposition 7.2.6. *Avec les données ci-dessus, l'espace vectoriel $L \oplus \mathfrak{g}$ est équipé d'une structure de Lie restreinte avec le crochet*

$$[(x,g),(y,h)] = \Big([x,y], \alpha(x)(h) + \alpha(y)(g) + [g,h]_{\mathfrak{g}}\Big) \tag{7.9}$$

et la 2-opération

$$(x,g)^{[2]_\alpha} = \Big(x^{[2]}, \alpha(x)(g) + g^{[2]_\mathfrak{g}}\Big). \tag{7.10}$$

Preuve. Montrons que l'application $(\cdot)^{[2]_\alpha}$ est une 2-opération compatible avec le crochet $[\cdot,\cdot]_\alpha$. Soient $\lambda \in \mathbb{F}$, $x, y \in L$ et $g, h \in \mathfrak{g}$. Tout d'abord, on a

$$\Big(\lambda(x,g)\Big)^{[2]_\alpha} = \Big((\lambda x)^{[2]}, \alpha(\lambda x)(\lambda g) + (\lambda g)^{[2]_\mathfrak{g}}\Big) = \Big(\lambda^2 (x)^{[2]}, \lambda^2\alpha(x)(g) + \lambda^2 (g)^{[2]_\mathfrak{g}}\Big) = \lambda^2 (x,g)^{[2]_\alpha}.$$

Puis,

$$\begin{aligned}
&\Big((x,g)+(y,h)\Big)^{[2]_\alpha} - (x,g)^{[2]_\alpha} - (y,h)^{[2]_\alpha}\\
=&\Big((x+y),(g+h)\Big)^{[2]_\alpha} - (x,g)^{[2]_\alpha} - (y,h)^{[2]_\alpha}\\
=&\Big((x+y)^{[2]}, \alpha(x+y)(g+h) + (g+h)^{[2]_\mathfrak{g}}\Big) - \Big(x^{[2]}, \alpha(x)(g) + (g)^{[2]_\mathfrak{g}}\Big) - \Big(y^{[2]}, \alpha(y)(h) + (h)^{[2]_\mathfrak{g}}\Big)\\
=&\Big([x,y], \alpha(x)(g) + \alpha(x)(h) + \alpha(y)(g) + \alpha(y)(h) + g^{[2]_\mathfrak{g}} + h^{[2]_\mathfrak{g}} + [g,h]_\mathfrak{g} - \alpha(x)(g) - g^{[2]_\mathfrak{g}} - \alpha(y)(h) - h^{[2]_\mathfrak{g}}\Big)\\
=&\Big([x,y], \alpha(x)(h) + \alpha(y)(g) + [g,h]_\mathfrak{g}\Big)\\
=&\big[(x,g),(y,h)\big]_\alpha.
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
&\Big[(x,g), [(x,g),(y,h)]_\alpha\Big]_\alpha - \Big[(x,g)^{[2]_\alpha}, (y,h)\Big]\\
=&\Big[(x,g), \big([x,y], \alpha(x)(h) + \alpha(y)(g) + [g,h]_\mathfrak{g}\big)\Big]_\alpha - \Big[\Big(x^{[2]}, \alpha(x)(g) + g^{[2]_\mathfrak{g}}\Big), (y,h)\Big]_\alpha\\
=&\Big([x,[x,y]], \alpha(x)\big(\alpha(x)(h) + \alpha(y)(g) + [g,h]_\mathfrak{g}\big) + \alpha([x,y])(g) + \big[g, \alpha(x)(h) + \alpha(y)(g) + [g,h]_\mathfrak{g}\big]_\mathfrak{g}\Big)\\
&+ \left(\Big[x^{[2]}, y\Big], \alpha\left(x^{[2]}\right)(h) + \alpha(y)\left(\alpha(x)(g) + g^{[2]_\mathfrak{g}}\right) + \Big[\alpha(x)(g) + g^{[2]_\mathfrak{g}}, h\Big]_\mathfrak{g}\right).
\end{aligned}$$

Pour la première composante, on a immédiatement $\Big[x^{[2]}, y\Big] - [x,[x,y]] = 0$. Pour la deuxième composante :

- $\alpha\big([x,y]\big)(g) + \alpha(x)\circ\alpha(y)(g) + \alpha(y)\circ\alpha(x)(g) = 0$ car α est un morphisme de Lie ;
- $\alpha(x)^2(h) - \alpha\left(x^{[2]}\right) = 0$ car α est un morphisme restreint ;
- $\alpha(x)\big([g,h]_\mathfrak{g}\big) + \big[g, \alpha(x)(h)\big]_\mathfrak{g} + \big[\alpha(x)(g), h\big]_\mathfrak{g} = 0$ car $\alpha(x)$ est une dérivation de $\mathfrak{g}$;
- $\alpha(x)\left(g^{[2]_\mathfrak{g}}\right) - [\alpha(x)(g), g]_\mathfrak{g} = 0$ car $\alpha(x)$ est une dérivation restreinte de $\mathfrak{g}$;
- $[g^\mathfrak{g}, h]_\mathfrak{g} - [g,[g,h]_\mathfrak{g}]_\mathfrak{g} = 0$.

Finalement on obtient bien $\Big[(x,g), [(x,g),(y,h)]_\alpha\Big]_\alpha - \Big[(x,g)^{[2]_\alpha}, (y,h)\Big] = 0$. Ainsi, $(\cdot)^{[2]_\alpha}$ est une 2-opération sur $L \oplus \mathfrak{g}$ compatible avec le crochet $[\cdot,\cdot]_\alpha$. □

Munissons maintenant le couple $(A, L \oplus \mathfrak{g})$ d'une structure d'algèbre de Lie-Rinehart restreinte. Puisque l'algèbre de Lie $L \oplus \mathfrak{g}$ est restreinte avec la 2-opération définie ci-dessus, il ne reste qu'à définir une ancre $\tilde{\rho} : L \oplus \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(A)$ en posant $\tilde{\rho}(x, g) = \rho(x),\ x \in L,\ g \in \mathfrak{g}$.

Proposition 7.2.7. *Le couple $(A, L \oplus \mathfrak{g})$ muni de la structure restreinte définie à la proposition 7.2.6 et de l'application $\tilde{\rho}$ définie ci-dessus est une algèbre de Lie-Rinehart restreinte si et seulement si la représentation π vérifie*

$$\pi_{ax}(av) = a^2\pi_x(v) + \rho_{ax}(a)v,\ a \in A,\ x \in L,\ v \in V. \tag{7.11}$$

Preuve. On peut définir une action de A sur $L \oplus \mathfrak{g}$ par $a \cdot (x, g) = (a \cdot x, a \cdot g)$. L'application $\tilde{\rho}$ est alors bien A-linéaire. De plus, c'est une application de Lie restreinte à valeurs dans les dérivations de A. Il ne reste qu'à vérifier les deux conditions de compatibilité restantes.

- Première condition : soient $x, y \in L,\ g, h \in \mathfrak{g},\ a \in A$.

$$\begin{aligned}
&\big[(x, g), a(y, h)\big]_\alpha + \tilde{\rho}(x, g)(a)(y, h) + a\big[(x, g), (y, h)\big]_\alpha \\
&= \Big([x, ay], \alpha(x)(ah) + \alpha(ag)(g) + [g, ah]]_{\mathfrak{g}}\Big) \\
&\qquad + \Big(a[x, y] + \rho(x)(a)y, a\alpha(x)(h) + a\alpha(y)(g) + a[g, h] + \rho(x)(a)h\Big) \\
&= \Big(0\ , \alpha(x)(ah) + a\alpha(x)(h) + \rho(x)(a)h\Big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

- Seconde condition (condition de Hochschild) : soient $x \in L,\ g \in \mathfrak{g},\ a \in A$.

$$\begin{aligned}
&\big(a(x, g)\big)^{[2]_\alpha} - a^2(x, g)^{[2]_\alpha} - \tilde{\rho}\big(a(x, g)\big)(a)(x, g) \\
&= \Big((ax)^{[2]}, \alpha(ax)(ag) + (ag)^{[2]_{\mathfrak{g}}}\Big) \\
&\qquad - \Big(a^2x^{[2]} + \rho(ax)(a)x, a^2\alpha(x)(g) + a^2g^{[g]} + \rho(ax)(a)g\Big) \\
&= \alpha(ax)(ag) - a^2\alpha(x)(g) - a\rho(x)(a)g \\
&=\ 0,
\end{aligned}$$

  la dernière égalité étant vraie si et seulement si la condition (7.11) est satisfaite.

□

Remarque. Si la représentation (π, V) est faible, la condition 7.11 est automatiquement vérifiée.

7.3 Exemples de représentations en dimension infinie

Dans cette section, on présente quelques exemples de représentations en dimension infinie.

7.3.1 Exemple en caractéristique zéro

Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, soient de plus $A = \mathbb{K}[y, y^{-1}] \otimes \mathbb{K}[x]/(x^2)$ et L l'algèbre de Lie abélienne de dimension infinie engendrée par les éléments $h_k,\ k \in \mathbb{Z}$. On peut équiper L d'une structure de A-module avec l'action

$$y^s \cdot h_k = h_{k+s},\quad y^s x \cdot h_k = 0,\quad k, s \in \mathbb{Z}\,.$$

Considérons l'application $\rho : L \longrightarrow \mathrm{Der}(A),\ h_k \longmapsto y^k x\partial_x$, où $\partial_x := \frac{d}{dx}$ désigne la dérivée partielle par rapport à la variable x. Alors, ρ est une ancre sur L qui est compatible avec l'action ci-dessus, ainsi (A, L, ρ) devient une algèbre de Lie-Rinehart.

Proposition 7.3.1. *Soit* $V = \mathbb{K}[t, t^{-1}] = \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} \mathbb{K}\, t^s$. *Alors* V *est une représentation faible de* (A, L, ρ).

Preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Considérons l'application $\pi : L \to \mathrm{End}(V),\ \pi(h_k)(t^s) = \lambda t^{k+s}$. Alors V est un L-module. De plus, si $\lambda \neq 0$, ce module est simple. V est également un A-module avec l'action

$$y^k \cdot t^s = t^{k+s}, \quad y^k x \cdot t^s = 0.$$

Il reste à vérifier la condition de compatibilité de la définition 1.3.6.
<u>Cas $a = y^m$</u> :

$$\begin{aligned}\pi(h_k)(y^m \cdot t^s) - y^m \cdot \pi(h_k)(t^s) - \rho(h_k)(y^m) \cdot t^s &= \pi(h_k)(t^{m+s}) - \lambda y^m t^{s+k} - y^k x\partial_x(y^m) \cdot t^s \\ &= \lambda t^{m+s+k} - \lambda y^m \cdot t^{s+k} \\ &= 0.\end{aligned}$$

<u>Cas $a = y^m x$</u> :

$$\begin{aligned}\pi(h_k)(y^m x \cdot t^s) - y^m x \cdot \pi(h_k)(t^s) - \rho(h_k)(y^m x) \cdot t^s &= 0 - 0 - y^k x\partial_x(y^m x) \cdot t^s \\ &= y^{k+mx} \cdot t^s \\ &= 0.\end{aligned}$$

Finalement, V est une représentation faible simple de (A, L, ρ). □

7.3.2 Adaptation de l'exemple précédent en caractéristique p

Dans cette section, on considère l'exemple de la section 7.3.1 sur un corps $\mathbb{F}$ de caractéristique $p > 0$. Tout ce qui a été fait dans la section précédent reste valable. Le but est de construire une structure d'algèbre de Lie-Rinehart restreinte sur l'exemple précédent et de trouver une représentation restreinte. On reprend les notations de la section 7.3.1.

Proposition 7.3.2. *Soit* $\lambda \in \mathbb{F}$. *L'application* $h_k \longmapsto \lambda^{p-1} h_{pk}$ *est une* p*-opération sur* L. *De plus, cette* p*-opération est compatible avec l'ancre* ρ *si et seulement si* $\lambda^{p-1} = 1$. *Dans ce cas,* (A, L, ρ) *est une algèbre de Lie-Rinehart restreinte.*

Preuve. Soient $k, s \in \mathbb{Z}$. Puisque L est une algèbre de Lie abélienne, n'importe quelle application p-semilinéaire est une p-opération valable sur L. On peut ainsi choisir les valeurs de la p-opération arbitrairement sur les générateurs de L. Montrons maintenant que l'ancre ρ est un morphisme restreint par rapport à cette p-opération. On a d'une part

$$\rho\left(h_k^{[p]}\right)(y^s) = \rho\left(\lambda^{p-1} h_{pk}\right)(y^s) = 0 = \rho\left(h_k\right)^p(y^s);$$

et d'autre part

$$\rho\left(h_k^{[p]}\right)(y^s x) = \lambda^{p-1} y^{pk+s} x \ \text{ et } \rho(h_k)^p(y^s x) = y^{pk+s} x.$$

Ainsi, on a égalité si et seulement si $\lambda^{p-1} = 1$. Il ne reste qu'à vérifier la condition de Hochschild, pour $\lambda \in \mathbb{F}$ vérifiant $\lambda^{p-1} = 1$:

$$(y^s \cdot h_k) - y^{ps} \cdot (h_k) - \rho(y^s h_k)(y^s) \cdot h_k = h_{pk+ps} - h_{pk+ps} = 0;$$

$$\text{et} \quad (y^s x \cdot h_k) - y^{ps} x^p \cdot (h_k) - \rho(y^s x h_k)(y^s) \cdot h_k = 0.$$

Ainsi, la structure restreinte donnée par la p-opération $h_k \longmapsto h_{pk}$ est compatible avec l'ancre et on obtient ainsi une algèbre de Lie-Rinehart restreinte. □

On fixe maintenant $\lambda = 1$ et on reprend la représentation faible de la section précédente, à savoir l'application $\pi : L \to \mathrm{End}(V)$, $\pi(h_k)(t^s) = t^{k+s}$, avec $V = \mathbb{F}[t, t^{-1}]$.

Proposition 7.3.3. *Avec les données ci-dessus,* (π, V) *est une représentation restreinte faible de l'algèbre de Lie Rinehart restreinte* $(A, L\rho)$.

Preuve. Il ne reste qu'à vérifier que π est un morphisme restreint. Soient $k, s \in \mathbb{Z}$. D'une part, on a

$$\pi\left(h_k^{[p]}\right)(t^s) = \rho(h_{pk})(t^s) = t^{pk+s};$$

et d'autre part on a

$$\pi\,(h_k)^p\,(t^s) = \pi\,(h_k)^{p-1}\,(t^{k+s}) = \cdots = t^{pk+s}.$$

Ainsi, les deux expressions coïncident bien et π définit une représentation restreinte faible de l'algèbre de Lie-Rinehart restreinte $(A, L\rho)$. □

Remarque. En fait, on peut montrer que la p-opération $h_k \longmapsto h_{pk}$ est l'unique p-opération sur L qui soit compatible avec la représentation π.

7.3.3 Exemple en caractéristique $p = 2$

Soit $\mathbb{F}$ un corps de caractéristique $p = 2$. On considère l'algèbre de Lie L engendrée par les éléments h_k et l_k, $k \in \mathbb{Z}$ et équipée du crochet $[h_k, h_m] = [l_k, l_m] = 0$, $[l_m, h_k] = l_{m+k}$. On prend pour algèbre associative $A = \mathbb{F}[y, y^{-1}] \otimes \mathbb{F}[x]/(x^2)$. On équipe L d'une structure de A-module avec l'action donnée par

$$y^s \cdot h_k = h_{k+s},\ y^s x \cdot h_k = 0,\ y^s \cdot l_m = l_{m+s},\ y^s x \cdot l_m = h_{s+m}, \quad k, m, s \in \mathbb{Z}\,.$$

On définit une ancre $\rho : L \longrightarrow \mathrm{Der}(A)$ par

$$\begin{cases} \rho(h_k) = y^k x \partial_x; \\ \rho(l_m) = y^m \partial_x, \end{cases} \tag{7.12}$$

où comme avant $\partial_x := \frac{d}{dx}$ désigne la dérivée partielle par rapport à la variable x. On définit ainsi une structure d'algèbre de Lie-Rinehart sur le couple (A, L).

Structure restreinte. On détermine les structures restreintes sur L afin de construire une algèbre de Lie-Rinehart restreinte sur (A, L).

Proposition 7.3.4. *L'unique structure restreinte sur* L *est donnée par*

$$l_m^{[2]} = 0\ \forall m \in \mathbb{Z}; \quad h_k^{[2]} = h_{2k}\ \forall k \in \mathbb{Z}\,.$$

De plus, l'ancre (7.12) est compatible avec cette 2*-structure. Ainsi, on munit* (A, L, ρ) *d'une structure d'algèbre de Lie-Rinehart restreinte.*

Preuve. Soient $m, n, k \in \mathbb{Z}$ et $(\cdot)^{[2]}$ une 2-opération sur L.

- Puisque $[l_m^{[2]}, l_n] = [l_m, [l_m, l_n]]$, on a $[l_m^{[2]}, l_n] = 0$ et on en déduit donc que $l_m^{[2]} \in \mathrm{Vect}\{l_i,\ i \in \mathbb{Z}\}$. D'autre part, on a aussi $[l_m^{[2]}, h_k] = [l_m, [l_m, h_k]] = 0$, ce qui implique que $l_m^{[2]} \in \mathrm{Vect}\{h_j,\ j \in \mathbb{Z}\}$. On conclut donc que $l_m^{[2]} = 0$.

- Puisque $[h_k^{[2]}, h_n] = [h_k, [h_k, h_n]]$, on a $[h_k^{[2]}, h_n] = 0$ et on en déduit donc que $h_k^{[2]} \in \mathrm{Vect}\{h_j,\ j \in \mathbb{Z}\}$. Puis, on a

$$[h_k^{[2]}, l_m] = [h_k, [h_k, l_m]] = [h_k, l_{m+k}] = l_{m+2k},$$

ce qui implique que $h_k^{[2]} = h_{2k}$.

Montrons que ρ est un morphisme restreint.

- $\rho\left(l_m^{[2]}\right)(y^s) - \rho(l_m)^2(y^s) = \rho(l_m)\left(y^m \partial_x(y^s)\right) = 0;$
- $\rho\left(l_m^{[2]}\right)(y^s x) - \rho(l_m)^2(y^s) = \rho(l_m)\left(y^m \partial_x(y^s x)\right) = \rho(l_m)(y^{m+s}) = 0;$
- $\rho\left(h_k^{[2]}\right)(y^s) - \rho(h_k)^2(y^s) = \rho(h_{2k})(y^s) = y^{2k} x \partial_x(y^s) = 0;$
- $\rho\left(h_k^{[2]}\right)(y^s x) - \rho(h_k)^2(y^s x) = \rho(h_{2k})(y^s x) - \rho(h_k)(y^{k+s}) = y^{2k+s} - y^{2k+s} = 0.$

L'ancre ρ est donc un morphisme restreint. Il reste à vérifier la condition de Hochschild. Il y a quatre équations à contrôler :

- $(y^s \cdot l_m)^{[2]} - y^{2s} l_m^{[2]} - \rho\left(y^s \cdot l_m\right)(y^s) \cdot l_m = \rho\left(l_{m+s}\right)(y^s) \cdot l_m = 0;$
- $(y^s \cdot h_k)^{[2]} - y^{2s} h_k^{[2]} - \rho\left(y^s \cdot h_k\right)(y^s) \cdot h_k = h_{2k+2s} - h_{2k+2s} = 0;$
- $(y^s x \cdot l_m)^{[2]} - y^{2s} x^2 l_m^{[2]} - \rho\left(y^s x \cdot l_m\right)(y^s x) \cdot l_m = h_{2s+2m} - y^{2s+m} x \cdot l_m = 0;$
- $(y^s x \cdot h_k)^{[2]} - y^{2s} x^2 h_k^{[2]} - \rho\left(y^s x \cdot h_k\right)(y^s x) \cdot h_k = 0.$

Finalement, on a bien défini une structure d'algèbre de Lie-Rinehart restreinte sur (A, L, ρ).

□

Représentations. On construit une représentation restreinte de l'algèbre de Lie restreinte L et une représentation de l'algèbre de Lie-Rinehart restreinte (A, L, ρ). Toutefois, aucune de ces deux représentations n'est une représentation restreinte au sens de la définition 5.3.4.

Proposition 7.3.5. *On considère $\pi : L \longmapsto End(V)$, avec $V = \mathbb{F}[t, t^{-1}]$ défini par*

$$\pi(h_k)(t^s) = t^{k+s},\ \pi(l_m)(t^s) = 0,\ k, m, s \in \mathbb{Z}\,.$$

On munit V d'une structure de A-module par $y^k \cdot t^s = t^{k+s}$, $y^k x \cdot t^s = 0$. Alors, π est un morphisme restreint d'algèbres de Lie restreintes, mais π n'est pas compatible avec l'ancre (7.12) *(au sens de la définition 5.3.4).*

Preuve. Il est facile de voir que π est un morphisme d'algèbres de Lie. Montrons que π est un morphisme restreint. On a directement

$$\pi\left(l_m^{[2]}\right)(t^s) = 0 = \pi(l_m)^2(t^s).$$

Puis,

$$\pi\left(h_k^{[2]}\right)(t^s) - \pi(h_k)(t^s) = \pi(h_{2k})(t^s) - \pi(h_k)(t^{k+s}) = t^{2k+s} - t^{2k+s} = 0.$$

Ainsi, π est un morphisme restreint. Toutefois, π n'est pas une représentation d'algèbre de Lie-Rinehart. En effet, si c'était le cas, on devrait avoir

$$\pi(l_m)(y^s x \cdot t^n) = y^s x \cdot \pi(l_m)(t^n) + \rho_(l_m)(y^s x) \cdot t^n.$$

Or,

$$\pi(l_m)(y^s x \cdot t^n) = y^s x \cdot \pi(l_m)(t^n) = 0 \text{ alors que } \rho(l_m)(y^s x) \cdot t^n = t^{m+s+n}.$$

Ainsi la représentation π est une représentation de l'algèbre de Lie restreinte L mais pas de (A, L, ρ) en tant qu'algèbre de Lie-Rinehart restreinte. □

Proposition 7.3.6. *On considère $\theta : L \longmapsto End(V)$, avec $V = \mathbb{F}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{F}[x]$ définie par*

$$\theta(h_k)(t^s x^n) = nt^{k+s}x^n, \;\; \theta(l_m)(t^s x^n) = nt^{m+s}x^{n-1}, \;\; k, m, n, s \in \mathbb{Z}\,.$$

On munit V d'une structure de A-module par $y^k \cdot t^s x^n = t^{k+s}x^n$, $y^k x \cdot t^s x^n = t^{k+s}x^{n+1}$. Alors, θ est une représentation de l'algèbre de Lie-Rinehart (A, L, ρ), mais θ n'est pas un morphisme restreint.

Preuve. Soient $k, m, n, s \in \mathbb{Z}$. Il est facile de voir que $\theta(l_m) \circ \theta(l_k) = \theta(l_k) \circ \theta(l_m)$ et que $\theta(h_k) \circ \theta(h_m) = \theta(h_m) \circ \theta(h_k)$. De plus, on a

$$\theta([l_m, h_k]) = \theta(l_{m+k})(t^s x^n) = nt^{m+k+s}x^{n-1}$$

et

$$\theta(l_m) \circ \theta(h_k)(t^s x^n) - \theta(h_k) \circ \theta(l_m)(t^s x^n) = (n^2 - n(n-1))t^{m+t+s}x^{n-1} = nt^{m+t+s}x^{n-1}.$$

Ainsi, θ est un morphisme d'algèbres de Lie. Montrons que θ est compatible avec l'ancre ρ définie en (7.12) (au sens de la définition 5.3.4).

$$\begin{aligned}
&\theta(h_k)(y^m \cdot t^s x^n) - y^m \cdot \theta(h_k)(t^s x^n) - \rho(h_k)(y^m)(t^s x^n) \\
&\quad = nt^{m+k+s}x^n - nt^{m+k+s}x^n \\
&\quad = 0\;;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\theta(h_k)(y^m x \cdot t^s x^n) - y^m x \cdot \theta(h_k)(t^s x^n) - \rho(h_k)(y^m x)(t^s x^n) \\
&\quad = (n+1)t^{k+m+s}x^{n+1} - nt^{k+m+s}x^{n+1} - t^{k+m+s}x^{n+1} \\
&\quad = 0\;;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\theta(l_k)\,(y^m \cdot t^s x^n) - y^m \cdot \theta(l_k)(t^s x^n) - \rho(l_k)(y^m) \cdot t^s x^n \\
&\quad = nt^{k+m+s}x^{n-1} - nt^{m+n+s}x^{n-1} \\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\theta(l_k)\,(y^m x \cdot t^s x^n) - y^m x \cdot \theta(l_k)(t^s x^n) - \rho(l_k)(t^s x^n) \\
&\quad = (n+1)t^{k+m+s}x^n - nt^{k+m+s}x^n - t^{k+m+s}x^n \\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

La représentation θ est donc compatible avec l'ancre ρ au sens de la définition 5.3.4 et c'est donc une représentation de l'algèbre de Lie-Rinehart (A, L, ρ). Toutefois, θ n'est pas un morphisme restreint. En effet, on a $\theta\left(l_m^{[2]}\right) = 0$, alors que

$$\theta(l_m)^2(t^s x^n) = n(n-1)t^{s+2m}x^{n-2}, \;\; \forall s, m, n \in \mathbb{Z}\,.$$

□

Chapitre 8

Doubles extensions symplectiques de (super)-algèbres de Lie restreintes de type quasi-Frobenius

Dans ce chapitre, on développe une application de la cohomologie restreinte appliquée aux super-algèbres de Lie restreintes. On présente une méthode de double extension symplectique pour des (super)-algèbres de Lie restreintes de type quasi-Frobenius. Certains cocycles de la cohomologie restreinte, que nous décrivons entièrement, représentent les obstructions aux doubles extensions. On obtient une condition nécessaire devant être satisfaite afin qu'une super-algèbre le Lie restreinte de type quasi-Frobenius soit une double extension symplectique d'une super-algèbre plus petite. Les constructions sont illustrées par quelques exemples.

Ce chapitre est issu d'un travail en collaboration avec Sofiane Bouarroudj et Yoshiaki Maeda et est basé sur l'article *Symplectic double extensions for restricted quasi-Frobenius Lie (super)algebras* ([BEM23]), accepté dans la revue SIGMA.

8.1 Introduction

On présente ci-après une brève introduction aux structures symplectiques, ainsi qu'aux doubles extensions.

8.1.1 Groupes de Lie équipés d'une structure symplectique

Un groupe de Lie G est dit *symplectique* s'il est équipé d'une 2-forme fermée invariante à gauche dont le rang est égal à $\dim(G)$. Dans ce cas, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ serait une algèbre de Lie de type quasi-Frobenius. En particulier, il existe $\omega \in Z^2_{\mathrm{CE}}(\mathfrak{g}, \mathbb{F})$ tel que ω est non dégénérée, voir la sous-section 8.2.3 pour plus de détails. Parmi les groupes de Lie on trouve par exemple les groupes abéliens de dimension paire ainsi que le groupe des transformations affines.

Medina et Revoy ont classifié les groupes symplectiques nilpotents par leurs algèbres de Lie dans [MR92]. Les doubles extensions symplectiques ont été introduites dans leur travail, et ils ont démontré que toute algèbre de Lie de type quasi-Frobenius nilpotente peut être obtenue à partir de l'algèbre triviale par une suite de doubles extensions symplectiques.

La notion de double extension symplectique est l'analogue symplectique de la notion de double extension étudiée précédemment dans [MR85], lorsque la forme bilinéaire est non dégénérée, invariante et symétrique (en abrégé "NIS" dans [BKLS18]). Contrairement aux double extensions usuelles, des obstructions de nature cohomologique apparaissent dans la processus de double extension symplectique, comme discuté dans [MR92].

Cette construction a ensuite été généralisée à des groupes de Lie symplectiques quelconques par Medina et Dardié ([MD96]). Ils ont notamment montré que chaque groupe obtenu par ce procédé admet un feuilletage lagrangien invariant tel que la structure affine définie par la forme symplectique sur chaque feuille est complète.

Dans [MD96], on trouve de nombreux exemples de doubles extensions symplectiques. En particulier, les groupes de Lie symplectiques contenant un sous-groupe distingué fermé de codimension 1 qui est soit le groupe abélien, soit le groupe de Heisenberg sont obtenus par double extension symplectique.

Récemment, Benayadi et Bajo ([BB16]) ont généralisé l'idée de double extension symplectique lorsque le centre est trivial dans le cas d'algèbres de Lie para-Kähler abéliennes $\mathfrak{g}$, qui sont automatiquement résolubles. Ils ont également montré que de telles algèbres de Lie peuvent être obtenues par une suite de doubles extensions généralisées à partir de l'algèbre de Lie affine. Le cas où $\mathfrak{g}$ est résoluble mais pas para-Kähler abélienne n'a pas encore été traité.

Dans [BM21] ces résultats ont été adaptés aux super-algèbres de Lie. Dans ce contexte, il y a quatre différents cas à considérer, la forme bilinéaire ou la dérivation pouvant être paire ou impaire. Dans ce même article, il a été montré que les super-algèbres de Lie filiformes sont de type quasi-Frobenius, et les super-algèbres de Lie filiformes de dimension 4 de type quasi-Frobenius sont classifiées grâce à Backhouse ([BN78]). À notre connaissance, rien n'a été fait pour les super-groupes.

8.1.2 Super-algèbres de Lie restreintes et double extensions

La généralisation de la notion d'algèbre de Lie restreinte a été étudiée par plusieurs auteurs, par exemple [BKLS18, FR96, PV92, SZ10, UH13, YY14, YCC20, Z09] et plus particulièrement [BLLS21], où de nouveaux phénomènes ont été observés en caractéristique 2. L'existence de structure restreinte sur des super-algèbres de Lie simples (et "proches" de simple) admettant des matrices de Cartan a été étudiée entièrement dans [BKLLS18].

Comme on l'a vu, la cohomologie restreinte pour les algèbres de Lie restreintes a été introduite par Hochschild ([HG54]). Bien qu'il soit compliqué de calculer cette cohomologie aux ordres élevés, on peut effectuer des calculs aux petits ordres (voir la section 5.2). Une tentative de généralisation de cette cohomologie restreinte au cas des super-algèbres a été faite dans [YCC20]. Ces constructions seront utilisées dans ce chapitre pour décrire certains cocycles restreints.

Les doubles extensions de super-algèbres de Lie équipées d'une forme bilinéaire non dégénérée, invariante et symétrique (NIS) (appelées aussi super-algèbres de Lie quadratiques) ont été initiées dans [BB99], article qui a été suivi d'une série de papiers affinant ces résultats, voir [BS03] et les références qu'il contient. Parmi les exemples connus on retrouve les algèbres affines de Kac-Moody, qui sont de doubles extensions d'algèbres de boucles. Dans le cas super, le défi est de montrer que toute super-algèbre équipée d'une NIS est une double extension d'une super-algèbre plus petite, puisque la décomposition de Levi n'est pas valable pour les super-algèbres. De plus, les doubles extensions d'algèbres de Lie modulaires en caractéristique 2 nécessitent de nouvelles techniques, comme expliqué dans [BB18, BB23]. Les doubles extensions de super-algèbres de Lie *restreintes* équipées d'une NIS ont été étudiées récemment dans [BBH20], et plusieurs exemples, principalement des super-algèbres de Lie avec des matrices de Cartan, ont été étudiées en se basant sur [BKLLS18, BKLS18]. Ce chapitre se base sur l'article [BEM23], qui se veut être "l'analogue symplectique" de l'article [BBH20]. On construit des doubles extensions pour des super-algèbres de Lie restreintes de type quasi-Frobenius, et on met en évidence des conditions nécessaires pour que la double extension soit également restreinte. La nouveauté principale ici est que les obstructions au processus de double extension symplectique sont encodées par la cohomologie restreinte, au contraire du cas ordinaire (non restreint), où les obstructions sont encodées par la cohomologie de Chevalley-Eilenberg ordinaire, voir les théorèmes 8.3.1, 8.3.4, 8.4.1 et 8.4.3. Puisqu'on ne va rencontrer que des cocycles d'ordre 1 et 2, la méconnaissance de la cohomologie restreinte aux ordres supérieurs ne sera pas un obstacle ici.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. On commence par introduire les concepts basiques concernant les super-algèbres de Lie restreintes, leur cohomologie restreinte et les structures de type quasi-Frobenius dans la section 8.2. Les sections 8.3 et 8.4 sont consacrées à la construction de doubles extensions symplectiques. Les résultats principaux sont donnés par les théorèmes 8.3.1, 8.3.4, 8.4.1 et 8.4.3. La réciproque de ces théorèmes est donnée respectivement par les théorèmes 8.3.2, 8.3.5, 8.4.2 et 8.4.4. Dans la section 8.5, on étudie certains exemples de doubles extensions symplectiques, empruntés à [BM21, GKN04].

8.2 Super-algèbres de Lie restreintes et cohomologie restreinte

Dans la suite, $\mathbb{F}$ est un corps arbitraire de caractéristique $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = p > 2$. On adapte les notions d'algèbres de Lie restreintes et de cohomologie restreinte au cas $\mathbb{Z}_2$-gradué. Toutes les super-algèbres considérées sont supposées de dimension finie.

8.2.1 Super-algèbres de Lie restreintes

Soit $\mathfrak{a}$ une super-algèbre de Lie sur un corps de caractéristique $p > 2$. Pour $p = 3$, l'identité $[a, [a, a]] = 0$, pour $a \in \mathfrak{a}_1$, n'est pas une conséquence de l'identité de Jacobi, on doit donc rajouter cette condition à la définition 2.3.1 si $p = 3$. On note la parité d'un élément homogène non nul $a \in \mathfrak{a}$ par $|a|$.

Définition 8.2.1 ([PV92])**.** Rappelons que $\mathfrak{a}$ admet une *$p|2p$-structure* si $\mathfrak{a}_0$ est restreinte et si

$$\mathrm{ad}_{a^{[p]}}(b) = (\mathrm{ad}_a)^p(b) \text{ pour tous } a \in \mathfrak{a}_0 \text{ et } b \in \mathfrak{a}. \tag{8.1}$$

Rappelons que le crochet de deux éléments impairs d'une super-algèbre de Lie est donné par la polarisation de l'application carré $a \mapsto a^2 := \frac{1}{2}[a, a],\ a \in \mathfrak{a}_1$. Si $a, b \in \mathfrak{a}$, on a alors

$$[a, b] = (a + b)^2 - a^2 - b^2.$$

On pose

$$(\cdot)^{[2p]} : \mathfrak{a}_1 \to \mathfrak{a}_0, \quad a \mapsto (a^2)^{[p]} \text{ pour tout } a \in \mathfrak{a}_1.$$

On dira alors que la super-algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ équipée des applications $(\cdot)^{[p]}$ et $(\cdot)^{[2p]}$ est restreinte. On dira aussi que $\mathfrak{a}$ est équipée d'une $p|2p$-opération.

Pour $p = 2$, il existe plusieurs façons de définir une super-algèbre de Lie restreinte, voir [BLLS21], ainsi que la fin du chapitre 6 de cette thèse. On ne s'y intéressera pas dans ce chapitre.

Le résultat suivant est une généralisation immédiate du théorème de Jacobson (5.1.16) au cas $\mathbb{Z}_2$-gradué.

Théorème 8.2.2. *Soit $(e_j)_{j\in J}$ une base de $\mathfrak{a}_0$, soient $f_j \in \mathfrak{a}_0$ tels que $(\mathrm{ad}_{e_j})^p = \mathrm{ad}_{f_j}$. Alors, il existe exactement une $p|2p$-opération sur $\mathfrak{a}$ telle que*

$$e_j^{[p]} = f_j \quad \textit{pour tous } j \in J.$$

Définition 8.2.3. Un idéal homogène $I = I_0 \oplus I_1$ de $\mathfrak{a}$ est appelé *p-idéal* s'il est stable par la $p|2p$-opération, à savoir
$$a^{[p]} \in I_0 \text{ pour tous } a \in I_0.$$

Remarque. Puisque $a^{[2p]} = (a^2)^{[p]}$, pour tous $a \in \mathfrak{a}_1$, la condition ci-dessus implique que $a^{[2p]} \in I_0$ pour tous $a \in \mathfrak{a}_1$.

Définition 8.2.4. Soit $\mathfrak{a}$ une super-algèbre de Lie restreinte. Un $\mathfrak{a}$-module M est dit *restreint* si
$$\underbrace{a \cdots a}_{p \text{ termes}} \cdot m = a^{[p]} \cdot m \quad \text{pour tous } a \in \mathfrak{a}_0 \text{ et } m \in M.$$

8.2.2 Cohomologie restreinte des super-algèbres de Lie restreintes

La généralisation aux super-algèbres de Lie restreintes de la cohomologie restreinte a été faite dans [YCC20]. Dans cette section, on parcourt les notions relatives à cette généralisation dont on aura besoin pour notre construction.

Définition 8.2.5. Soit $\mathfrak{a}$ une super-algèbre de Lie restreinte, et soit M un $\mathfrak{a}$-module restreint. On note $C^2_{\text{CE}}(\mathfrak{a}; M)$ l'espace des cochaînes de la cohomolgie de Chevalley-Eilenberg. Soit $\varphi \in C^2_{\text{CE}}(\mathfrak{a}, M)$ et $\theta : \mathfrak{a}_0 \to M$. On dit que θ *a la propriété* $(*)$ *relativement à* φ si

$$\begin{aligned}
\theta(\delta a) &= \delta^p \theta(a), \text{ pour tout } \delta \in \mathbb{F} \text{ et } a \in \mathfrak{a}_0;\\
\theta(a+b) &= \theta(a) + \theta(b)\\
&\quad + \sum_{\substack{x_i = a \text{ ou } b\\ x_1 = a,\ x_2 = b}} \frac{1}{\pi\{a\}} \sum_{k=0}^{p-2} (-1)^k x_p \ldots x_{p-k+1} \varphi\Big([[\ldots[x_1, x_2], x_3] \ldots, x_{p-k-1}], x_{p-k}\Big),
\end{aligned}$$

avec $a, b \in \mathfrak{a}_0$, et $\pi\{a\}$ désignant le nombre de facteurs x_i égaux à a.

On peut maintenant définir l'espace des cochaînes restreintes :

$$C^2_*(\mathfrak{a}; M) := \Big\{(\varphi, \theta),\ \varphi \in C^2_{\text{CE}}(\mathfrak{g}; M),\ \theta : \mathfrak{a}_0 \to M \text{ a la propriété } (*) \text{ relativement à } \varphi\Big\}.$$

Un élément $(\alpha; \beta) \in C^2_*(\mathfrak{a}, M)$ induit une application

$$\begin{aligned}
\text{ind}^2(\alpha, \beta) : \mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{a}_0 &\longrightarrow M\\
(a, b) &\longmapsto \alpha\left(a, b^{[p]}\right) - \sum_{i+j=p-1} (-1)^i b^i \alpha\left([[\ldots[a, \overbrace{b], \ldots], b}^{j \text{ termes}}], b\right) + a\beta(b).
\end{aligned}$$

Définition 8.2.6. Soit $\mathfrak{a}$ une super-algèbre de Lie restreinte, et soit M un $\mathfrak{a}$-module restreint.

- Un 2-*cocycle restreint* est un élément $(\alpha; \beta) \in C^2_*(\mathfrak{a}; M)$ tel que
$$(d^2_{\text{CE}}\alpha, \text{ind}^2(\alpha, \beta)) = (0, 0).$$
On note $Z^2_*(\mathfrak{a}; M)$ l'espace des 2-cocycles restreints.

- Un 2-*cobord restreint* est un élément $(\alpha; \beta) \in C^2_*(\mathfrak{a}; M)$ tel qu'il existe $\varphi \in C^1_*(\mathfrak{a}; M) = C^1_{\text{CE}}(\mathfrak{a}; M)$ tel que
$$\begin{aligned}
\alpha(a, b) &= \varphi([a, b]) - a\varphi(b) + b\varphi(a) \quad \text{pour tous } a, b \in \mathfrak{a}\,; \text{ et}\\
\beta(a) &= \varphi(a^{[p]}) - a^{p-1}\varphi(a), \quad \text{pour tout } a \in \mathfrak{a}_0.
\end{aligned}$$
On note $B^2_*(\mathfrak{a}; M)$ l'espace des 2-cobords restreints.

8.2.3 Super-algèbres de Lie de type quasi-Frobenius

À notre connaissance, la notion d'algèbre de Lie de type quasi-Frobenius est due à Seligman. Ces algèbres de Lie on été introduites pour répondre à une question posée par Jacobson : si $\mathfrak{a}$ est de dimension finie, quelles conditions peut-on imposer sur $\mathfrak{a}$ afin que l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{a})$ admette un module simple exact ? La réponse à cette question est apportée par Ooms dans [OI80].

Certains auteurs utilisent le terme "algèbres de Lie symplectiques" pour désigner des algèbres de Lie de type quasi-Frobenius, voir [BC16, FM19, MR92, MD96].

La généralisation de cette notation au cas $\mathbb{Z}_2$-gradué est immédiate. On a choisi de conserver le terme "quasi-Frobenius" dans cas.

Définition 8.2.7. [[BB16, BM21]] Une super-algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ est dite *q*uasi-Frobenius si elle est équipée d'un 2-cocycle $\omega \in Z^2_{\mathrm{CE}}(\mathfrak{a};\mathbb{K})$ tel que ω est une forme bilinéaire non-dégénérée. De façon explicite, pour tout $a, b \in \mathfrak{a}$ on a

$$(-1)^{|a||c|}\omega(a,[b,c]) + (-1)^{|c||b|}\omega(c,[a,b]) + (-1)^{|b||a|}\omega(b,[c,a]) = 0. \tag{8.2}$$

On note une telle algèbre $(\mathfrak{a},\omega)$, et on dit que ω est *fermée*. On peut trouver une liste de super-algèbres de Lie de type quasi-Frobenius dans [BM21]. Si $\omega \in B^2_{\mathrm{CE}}(\mathfrak{a},\mathbb{F})$, la super-algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ est dite *d*e type Frobenius.

Définition 8.2.8.
- On appelle une forme bilinéaire non dégénérée paire (resp. impaire) *orthosymplectique* (resp. *périplectique*).
- Une super-algèbre de Lie de type quasi-Frobenius $(\mathfrak{a},\omega)$ est dite *orthosymplectique quasi-Frobenius* (resp. *périplectique quasi-Frobenius*) si la forme ω est paire (resp. impaire) sur $\mathfrak{a}$.

Définition 8.2.9. Soit $(\mathfrak{a},\omega)$ une super-algèbre de Lie de type quasi-Frobenius et soit $S \subseteq \mathfrak{a}$ un sous-espace. L'*orthogonal* de S dans $(\mathfrak{a},\omega)$ est

$$S^\perp = \{v \in \mathfrak{a} \mid \omega(v,w) = 0 \text{ pour tout } w \in S\}.$$

Le sous-espace S est dit *n*on-dégénéré si $S \cap S^\perp = \{0\}$. Il est dit *i*sotropique si $S \subset S^\perp$. Un sous-espace maximal isotropique est dit *L*agrangien s'il vérifie $S = S^\perp$.

Soit I un idéal de $\mathfrak{a}$. Alors $I^\perp$ est un idéal si et seulement si $I^\perp \subseteq C_{\mathfrak{a}}(I)$, où $C_{\mathfrak{a}}(I)$ désigne le centralisateur de I dans $\mathfrak{a}$ (voir [BM21, lemme 2.4]).

8.2.4 L'adjoint d'une dérivation

Rappelons qu'une (super-)dérivation D de $\mathfrak{a}$ est une application linéaire sur $\mathfrak{a}$ vérifiant

$$D([a,b]) = [D(a),b] + (-1)^{|D||a|}[a,D(b)] \text{ pour tous } a,b \in \mathfrak{g}.$$

Notons $\mathrm{Der}(\mathfrak{a})$ l'espace de toutes les super-dérivations sur $\mathfrak{a}$.

Définition 8.2.10. Soit $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{a})$ une super-dérivation. Il existe une unique application linéaire D^*, appelée *l*'adjoint de D, telle que

$$\omega(D(a),b) = (-1)^{|a||D|}\omega(a,D^*(b)).$$

Avec cette définition de D^*, il est aisé de vérifier que D^* est aussi une super-dérivation.

Définition 8.2.11. Supposons que $\mathfrak{a}$ est une super-algèbre de Lie restreinte. Une super-dérivation $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{a})$ est dite *restreinte* si

$$D(a^{[p]}) = (\mathrm{ad}_a)^{p-1}(D(a)) \quad \text{pour tout } a \in \mathfrak{a}_0.$$

Ainsi, on a

$$D\left(a^{[2p]}\right) = (\mathrm{ad}_{a^2})^{p-1} \circ D\left(a^2\right) \quad \text{pour tout } a \in \mathfrak{a}_1.$$

L'espace des super-dérivations restreintes est noté $\mathrm{Der}^p(\mathfrak{a})$.

Les super-dérivations extérieures restreintes d'algèbres de Lie nilpotentes restreintes ont été étudiées dans [FSW13].

Définition 8.2.12 ([BBH20])**.** Une super-dérivation $D \in \mathrm{Der}^p_{\bar 0}(\mathfrak{a})$ a la *p-propriété* s'il existe $\gamma \in \mathbb{F}$ et $a_0 \in \mathfrak{a}_{\bar 0}$ tels que

$$D^p = \gamma D + \mathrm{ad}_{a_0}, \quad D(a_0) = 0. \tag{8.3}$$

Une liste de super-dérivations extérieures vérifiant la p-propriété est donnée dans [BBH20].

8.2.5 Quelques cocycles utiles

Soit $(\mathfrak{a}, \omega)$ une super-algèbre de Lie restreinte de type quasi-Frobenius, et soit D une super-dérivation de $\mathfrak{a}$.

Lemme 8.2.13. *On définit une application :*

$$C : \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{a} \to \mathbb{F}, \quad (a, b) \mapsto \omega((D + D^*)(a), b) = \omega(D(a), b) + \omega(a, D(b)). \tag{8.4}$$

Il s'en suit que $C \in Z^2_{CE}(\mathfrak{a}; \mathbb{F})$. De plus, si D est intérieure, alors $C \in B^2_{CE}(\mathfrak{a}; \mathbb{F})$.

Preuve. Sachant que ω est un 2-cocycle, on a

$$\begin{aligned}
&\underset{a,b,c}{\circlearrowleft} (-1)^{|a||c|} C(a, [b, c]) \\
&= \underset{a,b,c}{\circlearrowleft} (-1)^{|a||c|} \Big(\omega(D(a), [b, c]) + (-1)^{|D||a|}\omega(a, [D(b), c]) + (-1)^{|D||a|+|D||b|}\omega(a, [b, D(c)])\Big) \\
&= \underset{D(a),b,c}{\circlearrowleft} (-1)^{p(D(a))|c|}\omega(D(a), [b, c]) + \underset{a,D(b),c}{\circlearrowleft} (-1)^{|a||c|}\omega(a, [D(b), c]) \\
&+ \underset{a,b,D(c)}{\circlearrowleft} (-1)^{p(D(c))|a|}\omega(a, [b, D(c)]) = 0.
\end{aligned}$$

Supposons de plus que D soit intérieure, c'est-à-dire que $D = \mathrm{ad}_X$, pour $X \in \mathfrak{a}$. Sachant que ω est fermée, un calcul direct montre que

$$C(a, b) = \omega(X, [a, b]).$$

□

La définition suivante est essentielle. Notons $\sigma_i^{\mathfrak{a}}(a, b)$ l'expression qui apparaît dans l'équation suivante :

$$\omega\Big((D + D^*)(\mu a + b), (\mathrm{ad}^{\mathfrak{a}}_{\mu a+b})^{p-2}(a)\Big) = \sum_{1 \le i \le p-1} i\sigma_i^{\mathfrak{a}}(a, b)\mu^{i-1}. \tag{8.5}$$

- If $p = 2$, alors $\sigma_1^{\mathfrak{a}}(a, b) = \omega_{\mathfrak{a}}((D + D^*)(b), a)$.

- If $p=3$, alors $\sigma_1^{\mathfrak{a}}(a,b)=\omega_{\mathfrak{a}}\big((D+D^*)(b),[b,a]\big)$ et $\sigma_2^{\mathfrak{a}}(a,b)=2\omega_{\mathfrak{a}}\big((D+D^*)(a),[b,a]\big)$.
- Si p est un nombre premier arbitraire, alors $\sigma_1^{\mathfrak{a}}(a,b)=\omega_{\mathfrak{a}}\Big((D+D^*)(b),(\mathrm{ad}_b^{\mathfrak{a}})^{p-2}(a)\Big)$.

Les résultats suivants seront utiles.

Lemme 8.2.14.
(i) Pour tous $a,b\in\mathfrak{a}_0$, on a

$$s_i^{\mathfrak{g}}(a,b)=\begin{cases} s_i^{\mathfrak{a}}(a,b)+\sigma_i^{\mathfrak{a}}(a,b)x & si \quad |D|+|\omega|=0,\\ \\ s_i^{\mathfrak{a}}(a,b) & si \quad |D|+|\omega|=1.\end{cases} \tag{8.6}$$

(ii) Pour tous $a,b\in\mathfrak{a}_0$, on a

$$\begin{aligned}\sigma_1^{\mathfrak{a}}(D(a),a) &= \omega\Big((D+D^*)(a),(\mathrm{ad}_a^{\mathfrak{a}})^{p-2}\circ D(a)\Big),\\ \sigma_1^{\mathfrak{a}}([a,b],a) &= \omega\Big((D+D^*)(a),(\mathrm{ad}_a^{\mathfrak{a}})^{p-1}(b)\Big).\end{aligned}$$

Preuve. Pour le point (i), puisque

$$(\mathrm{ad}_{\mu a+b}^{\mathfrak{g}})^{p-1}(a)=(\mathrm{ad}_{\mu a+b}^{\mathfrak{a}})^{p-1}(a)+\omega_{\mathfrak{a}}\Big((D+D^*)(\mu a+b),(\mathrm{ad}_{\mu a+b}^{\mathfrak{a}})^{p-2}(a)\Big)x,$$

le résultat suit immédiatement. Le point (ii) suit de la définition de $\sigma^{\mathfrak{a}}$ donnée dans (8.5), en prenant $\mu=0$ et en choisissant a et b de façon appropriée. □

Lemme 8.2.15. *Pour tous $a,b\in\mathfrak{a}_0$, on a*

$$\sum_{i=1}^{p-1}\sigma_i^{\mathfrak{a}}(a,b)=\sum_{\substack{x_k=a \text{ ou } b\\ x_{p-1}=b,\ x_p=a}}\frac{1}{\pi\{a\}}\omega_{\mathfrak{a}}\Big((D+D^*)(x_1),[x_2,[\ldots,[x_{p-1},x_p]_{\mathfrak{a}}\ldots]_{\mathfrak{a}}]_{\mathfrak{a}}\Big). \tag{8.7}$$

Preuve. Calcul similaire à celui effectué après la définition 5.1.5. □

On est maintenant d'introduire une nouvelle application P vérifiant certaines conditions. Le but ici est de construire un 2-cocycle $(C,P)\in Z_*^2(\mathfrak{a};\mathbb{F})$. On a déjà montré au lemme 8.2.13 que $C\in Z_{\mathrm{CE}}^2(\mathfrak{a},\mathbb{F})$. Cette construction sera utilisée dans la section 8.3 où l'on étudie les doubles extensions symplectiques. Définissons une application

$$P:\mathfrak{a}_0\to\mathbb{F}\quad a\mapsto P(a) \tag{8.8}$$

vérifiant les deux conditions :

$$P(\delta a) = \delta^p P(a)\quad \text{pour tout } a\in\mathfrak{a}_0 \text{ et } \delta\in\mathbb{F}, \tag{8.9}$$

$$P(a+b) = P(a)+P(b)+\sum_{i=1}^{p-1}\sigma_i^{\mathfrak{a}}(a,b)\quad \text{pour tous } a,b\in\mathfrak{a}_0. \tag{8.10}$$

Lemme 8.2.16. *L'application P a la propriété $(*)$ relativement à la 2-cochaîne C définie à l'équation (8.4).*

Preuve. En appliquant le lemme 8.2.15, il suffit de montrer que (pour tous $a, b \in \mathfrak{a}_0$) :

$$\sum_{\substack{x_k=a \text{ or } b \\ x_{p-1}=b,\ x_p=a}} \frac{1}{\pi(a)} \omega_{\mathfrak{a}}\Big((D+D^*)(x_1), [x_2, [..., [x_{p-1}, x_p]_{\mathfrak{a}} ...]_{\mathfrak{a}}]_{\mathfrak{a}}\Big)$$

$$= \sum_{\substack{x_i=a \text{ or } b \\ x_1=a,\ x_2=b}} \frac{1}{\pi(a)} \sum_{k=0}^{p-2} (-1)^k x_p ... x_{p-k+1} \omega_{\mathfrak{a}}\Big((D+D^*)([[...[x_1, x_2], x_3]..., x_{p-k-1}]_{\mathfrak{a}}), x_{p-k}\Big).$$

De façon équivalente,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p-1} \sigma_i^{\mathfrak{a}}(a,b) &= \sum_{x_k=a \text{ or } b} \frac{1}{\pi(a)} \omega_{\mathfrak{a}}\left((D+D^*)(x_1), [x_2, [x_3, [..., [b, a]_{\mathfrak{a}} ...]_{\mathfrak{a}}]_{\mathfrak{a}}\right) \\
&= \sum_{x_k=a \text{ or } b} \frac{1}{\pi(a)} \omega_{\mathfrak{a}}\left((D+D^*)(x_1), [x_2, [x_3, [..., [b, a]_{\mathfrak{a}} ...]_{\mathfrak{a}}]_{\mathfrak{a}}]_{\mathfrak{a}}\right) \\
&= \sum_{x_k=a \text{ or } b} \frac{1}{\pi(a)} \omega_{\mathfrak{a}}\left((D+D^*)(x_p), [x_{p-1}, [x_{p-2}, [..., [b, a]_{\mathfrak{a}} ...]_{\mathfrak{a}}]_{\mathfrak{a}}]_{\mathfrak{a}}\right) \\
&= (-1)^{p-2} \sum_{x_k=a \text{ or } b} \frac{1}{\pi(a)} \omega_{\mathfrak{a}}\left((D+D^*)(x_p), [[...[a, b]_{\mathfrak{a}}, x_3]_{\mathfrak{a}}, ..., x_{p-1}]_{\mathfrak{a}}\right) \\
&= \sum_{x_k=a \text{ or } b} \frac{1}{\pi(a)} \omega_{\mathfrak{a}}\left([[...[a, b]_{\mathfrak{a}}, x_3]_{\mathfrak{a}}, ..., x_{p-1}]_{\mathfrak{a}}, (D+D^*)(x_p)\right) \\
&= \sum_{x_k=a \text{ or } b} \frac{1}{\pi(a)} \omega_{\mathfrak{a}}\left((D+D^*)([[...[a, b]_{\mathfrak{a}}, x_3]_{\mathfrak{a}}, ..., x_{p-1}]_{\mathfrak{a}}), x_p\right) \\
&= \sum_{\substack{x_i=a \text{ or } b \\ x_1=a,\ x_2=b}} \frac{1}{\pi(a)} \sum_{k=0}^{p-2} (-1)^k x_p ... x_{p-k+1} \omega_{\mathfrak{a}}((D+D^*)([[...[x_1, x_2]_{\mathfrak{a}}, x_3]_{\mathfrak{a}} ..., x_{p-k-1}]_{\mathfrak{a}}), x_{p-k}).
\end{aligned}$$

La dernière égalité est vraie, puisque chaque terme de la somme $\sum_{k=0}^{p-2}$ est nul, sauf pour $k = 0$, puisque $\mathbb{F}$ est un $\mathfrak{a}$-module trivial. □

Proposition 8.2.17. *La 2-cochaîne $(C, P) \in C_*^2(\mathfrak{a}; \mathbb{F})$ est un 2-cocycle restreint si et seulement si*

$$\omega_{\mathfrak{a}}\Big((D+D^*)(b^{[p]}), a\Big) = \omega_{\mathfrak{a}}\Big((D+D^*)(b), \mathrm{ad}_b^{p-1}(a)\Big) \text{ pour tout } a, b \in \mathfrak{a}_0.$$

Preuve. On a déjà montré au lemme 8.2.13 que $C \in Z_{\mathrm{CE}}^2(\mathfrak{a}; \mathbb{F})$, et que P satisfait la propriété $(*)$ relativement à C au lemme 8.2.16. Il reste à montrer que $\mathrm{ind}^2(c, P)(a, b) = 0$, pour tous $a, b \in \mathfrak{a}_0$. En effet,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}^2(C, P)(a, b) &= C\left(a, b^{[p]}\right) - \sum_{i+j=p-1} (-1)^i b^i C\left([[...[a, \overbrace{b], ...], b}^{j \text{ termes}}], b\right) + aP(b) \\
&= C(a, b^{[p]}) - C\left([[...[a, \overbrace{b], ...], b}^{p-1 \text{ termes}}]\ , b\right)
\end{aligned}$$

$$= \omega_{\mathfrak{a}}((D+D^*)(a), b^{[p]}) - \omega_{\mathfrak{a}}((D+D^*)([[...[a, \overbrace{b], ...], b]}^{p-1 \text{ termes}}, b)$$
$$= -\omega_{\mathfrak{a}}((D+D^*)(b^{[p]}), a) + \omega_{\mathfrak{a}}((D+D^*)(b), \mathrm{ad}_b^{p-1}(a)).$$

□

8.3 Doubles extensions restreintes orthosymplectiques

8.3.1 D_0-extensions

Soit $(\mathfrak{a}, \omega_{\mathfrak{a}})$ une super-algèbre de Lie orthosymplectique restreinte de type quasi-Frobenius, et soit $D \in \mathrm{Der}_0^p(\mathfrak{a})$ une super-dérivation restreinte paire.

Considérons une application $P : \mathfrak{a}_0 \mapsto \mathbb{F}$ définie en (8.8) et vérifiant les conditions (8.9) et (8.10). On a montré au lemme 8.2.16 que P a la propriété $(*)$ relativement au cocycle C introduit en (8.4). Considérons maintenant les deux applications

$$\begin{aligned} \Omega : \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{a} \to \mathbb{F}, \quad (a,b) &\mapsto \omega_{\mathfrak{a}}\Big(D \circ D(a) + 2D^* \circ D(a) + D^* \circ D^*(a) + \lambda(D+D^*)(a), b\Big), \\ T : \mathfrak{a}_0 \to \mathbb{F}, \qquad a &\mapsto \omega_{\mathfrak{a}}\Big((D+D^*)(a), (\mathrm{ad}_a^{\mathfrak{a}})^{p-2}(D(a))\Big) + \lambda P(a). \end{aligned}$$

Supposons que :

$$T \text{ satisfait la propriété } (*) \text{ relativement à } \Omega \text{ et que } (\Omega, T) \text{ est un élément de } B^2_*(\mathfrak{a};\mathbb{F}). \tag{8.11}$$

Écrivons $(\Omega, T) = \Big(d^1_{\mathrm{CE}}(\chi), \mathrm{ind}^1(\chi)\Big)$ pour un certain $\chi \in C^1_*(\mathfrak{a};\mathbb{F})$; on a alors

$$\Omega(a,b) = \chi([a,b]_{\mathfrak{a}}) \text{ pour tous } a, b \in \mathfrak{a} \quad \text{et} \quad T(a) = \chi\left(a^{[p]}\right) \text{ pour tous } a \in \mathfrak{a}_0.$$

Puisque $\omega_{\mathfrak{a}}$ est non dégénérée, il existe $Z_\Omega \in \mathfrak{a}$ tel que

$$\Omega(a,b) = \omega_{\mathfrak{a}}(Z_\Omega, [a,b]_{\mathfrak{a}}),\ \forall a,b \in \mathfrak{a} \quad \text{et} \quad T(a) = \omega_{\mathfrak{a}}(Z_\Omega, a^{[p]}),\ \forall a \in \mathfrak{a}_0\,. \tag{8.12}$$

Théorème 8.3.1 (D_0-extension – le cas ω orthosymplectique)**.** *Soit $\mathfrak{a}$ une super-algèbre de Lie orthosymplectique restreinte de type quasi-Frobenius. Soit $D \in \mathrm{Der}_0^p(\mathfrak{a})$ une super-dérivation restreinte vérifiant la p-propriété (8.3). Supposons de plus que*

$$(\Omega, T) \in B^2_*(\mathfrak{a}, \mathbb{F}) \quad \textit{et} \quad (C, P) \in Z^2_*(\mathfrak{a}, \mathbb{F}).$$

(i) Il existe une structure de super-algèbre de Lie sur $\mathfrak{g} := \mathscr{K} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathscr{K}^*$, où $\mathscr{K} := \mathrm{Vect}\{x\}$ pour x pair, définie par (pour tout $a, b \in \mathfrak{a}$) :

$$[x, x^*]_{\mathfrak{g}} = \lambda x,\ [a,b]_{\mathfrak{g}} := [a,b]_{\mathfrak{a}} + \omega_{\mathfrak{a}}(D(a) + D^*(a), b)x,\ [x^*, a]_{\mathfrak{g}} := D(a) + \omega_{\mathfrak{a}}(Z_\Omega, a)x,$$

où $\lambda \in \mathbb{F}$ et $Z_\Omega \in \mathfrak{a}$ est comme dans (8.12). Il existe une forme orthosymplectique antisymétrique fermée $\omega_{\mathfrak{g}}$ sur $\mathfrak{g}$ définie par

$$\omega_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}} := \omega_{\mathfrak{a}}, \quad \omega_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}, \mathscr{K}) := \omega_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}, \mathscr{K}^*) := 0, \quad \omega_{\mathfrak{g}}(x^*, x) := 1, \quad \omega_{\mathfrak{g}}(x,x) := \omega_{\mathfrak{g}}(x^*, x^*) := 0.$$

(ii) Il existe une $p|2p$-opération sur la double extension $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{a}$, donnée par

$$\begin{aligned} a^{[p]_{\mathfrak{g}}} &= a^{[p]_{\mathfrak{a}}} + P(a)x, \\ (x^*)^{[p]_{\mathfrak{g}}} &= \gamma x^* + a_0 + \tilde{\lambda} x, \\ x^{[p]_{\mathfrak{g}}} &= b_0 + \sigma x + \delta x^*, \end{aligned}$$

où

(*iia*) <u>*Cas où* $\lambda \neq 0$</u> *:*

$$D(a_0) = 0, \quad \tilde{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\omega(Z_\Omega, a_0), \quad \gamma = \lambda^{p-1}, \qquad \delta = 0$$
$$D(b_0) = 0, \quad \sigma = \frac{1}{\lambda}\omega(Z_\Omega, b_0), \quad D^*(b_0) = 0, \quad b_0 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{a}),$$

et

$$D^*(a_0) = \sum_{1 \leq i \leq p-1} (-1)^{p-1-i}\lambda^{p-1-i}D^{*i}(Z_\Omega). \tag{8.13}$$

(*iib*) <u>*Cas où* $\lambda = 0$ *et* $D \neq -\delta^{-1}\operatorname{ad}_{b_0}$</u> *:*

$$\begin{array}{rclrclrcl} D(a_0) &=& 0, & \omega(Z_\Omega, a_0) &=& 0, & \delta &=& 0, \\ D(b_0) &=& 0, & \omega(Z_\Omega, b_0) &=& 0, & D^*(b_0) &=& 0, \quad b_0 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{a}), \end{array}$$

et

$$D^*(a_0) + \gamma Z_\Omega = D^{*p-1}(Z_\Omega). \tag{8.14}$$

(*iic*) <u>*Cas où* $\lambda = 0$ *et* $D = -\delta^{-1}\operatorname{ad}_{b_0}$ *est intérieure*</u> *:*

$$\begin{array}{rclrclrcl} D(a_0) &=& 0, & \omega(Z_\Omega, a_0) &=& 0, \\ D(b_0) &=& 0, & \omega(Z_\Omega, b_0) &=& 0, & D^*(b_0) &=& -\delta Z_\Omega, \end{array}$$

et

$$D^*(a_0) + \gamma Z_\Omega = D^{*p-1}(Z_\Omega). \tag{8.15}$$

La super-algèbre de Lie orthosymplectique de type quasi-Frobenius $(\mathfrak{g}, \omega_\mathfrak{g})$ sera appelée la *d*ouble extension symplectique par un espace de dimension 1 de la super-algèbre de Lie orthosymplectique de type quasi-Frobenius $(\mathfrak{a}, \omega_\mathfrak{a})$. Dans le cas particulier où x est central dans $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire si $\lambda = 0$, alors la double extension a été appelée *c*lassique dans [BB16, MD96].

Preuve. La preuve du point (i) est dans [BM21]. Prouvons le point (ii), en utilisant le théorème de Jacobson. On a

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{ad}^\mathfrak{g}_{(x^*)^{[p]_\mathfrak{g}}}(x) - (\operatorname{ad}^\mathfrak{g}_{x^*})^p(x) &=& [a_0 + \gamma x^* + \tilde{\lambda}x, x]_\mathfrak{g} - (\operatorname{ad}^\mathfrak{g}_{x^*})^{p-1}(-\lambda x) \\ &=& -\lambda\gamma x - (-1)^p\lambda^p x = 0. \end{array}$$

De plus,

$$\begin{array}{rcl} (\operatorname{ad}^\mathfrak{g}_{(x^*)^{[p]_\mathfrak{g}}})(x^*) - (\operatorname{ad}^\mathfrak{g}_{x^*})^p(x^*) &=& [a_0 + \gamma x^* + \tilde{\lambda}x, x^*]_\mathfrak{g} - (\operatorname{ad}^\mathfrak{g}_{x^*})^{p-1}([x^*, x^*]_\mathfrak{g}) \\ &=& -(D(a_0) + \omega_\mathfrak{a}(Z_\Omega, a_0)x) + \tilde{\lambda}\lambda x \\ &=& -D(a_0) + (\tilde{\lambda}\lambda - \omega_\mathfrak{a}(Z_\Omega, a_0))x = 0. \end{array}$$

En outre,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_{(x^*)^{[p]_{\mathfrak{g}}}}(a)-(\mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_{x^*})^p(a) &= [a_0+\gamma x^*+\tilde{\lambda}x,a]_{\mathfrak{g}}-(\mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_{x^*})^{p-1}([x^*,a]_{\mathfrak{g}})\\
&= [a_0,a]_{\mathfrak{g}}+\gamma[x^*,a]_{\mathfrak{a}}+-(\mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_{x^*})^{p-1}(D(a)+\omega_{\mathfrak{a}}(Z_\Omega,a)))\\
&= [a_0,a]_{\mathfrak{a}}+\omega_{\mathfrak{a}}\Big((D+D^*)(a_0),a\Big)x+\gamma\Big(D(a)+\omega_{\mathfrak{a}}(a_0,a)x\Big)\\
&\quad -\left(D^p(a)-\omega_{\mathfrak{a}}\left(Z_\Omega,\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^{p-1-i}\lambda^{p-1-i}D^i(a)\right)\right)=0,
\end{aligned}$$

puisque D vérifie la propriété p et soit l'équation (8.13), soit (8.14), soit (8.15). D'autre part,

$$\mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_{a^{[p]_{\mathfrak{g}}}}(x)-(\mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_a)^p(x)\ =0.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_{a^{[p]_{\mathfrak{g}}}}(x^*)-(\mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_a)^p(x^*) &= [a^{[p]_{\mathfrak{a}}}+P(a)x,x^*]_{\mathfrak{g}}-(\mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_a)^{p-1}(-D(a)-\omega_{\mathfrak{a}}(Z_\Omega,a)x)\\
&= -D(a^{[p]_{\mathfrak{a}}})-\omega_{\mathfrak{a}}(Z_\Omega,a^{[p]_{\mathfrak{a}}})x+\lambda P(a)x\\
&\quad -(\mathrm{ad}^{\mathfrak{a}}_a)^p\circ D(a)-\omega_{\mathfrak{a}}\Big((D+D^*)(a),(\mathrm{ad}^{\mathfrak{a}}_a)^{p-2}\circ D(a)\Big)x=0,
\end{aligned}$$

puisque D est une super-dérivation restreinte, et (Ω,T) est un cobord. En outre,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_{a^{[p]_{\mathfrak{g}}}}(b)-(\mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_a)p(b) &= [a^{[p]_{\mathfrak{a}}}+P(a)x,b]_{\mathfrak{g}}-(\mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_a)^{p-1}([a,b]_{\mathfrak{g}})\\
&= [a^{[p]_{\mathfrak{a}}},b]_{\mathfrak{a}}+\omega_{\mathfrak{a}}\Big((D+D^*)(a^{[p]_{\mathfrak{a}}}),b\Big)x-(\mathrm{ad}^{\mathfrak{a}}_a)^{p-1}(b)\\
&\quad -\omega_{\mathfrak{a}}\Big((D+D^*)(a),(\mathrm{ad}^{\mathfrak{a}}_a)^{p-1}(b)\Big)x=0,
\end{aligned}$$

puisque la super-algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ est restreinte, (C,P) est un 2-cocycle et ainsi la proposition 8.2.17 peut être appliquée.

Finalement, en utilisant les mêmes techniques que précédemment, on peut montrer que $\mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_{x^{[p]_{\mathfrak{g}}}}=(\mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_x)^p$. □

Théorème 8.3.2. *Soit $(\mathfrak{g},\omega_{\mathfrak{g}})$ une super-algèbre de Lie orthosymplectique restreinte de type quasi-Frobenius. Supposons qu'il existe un élément pair et non nul $x\in([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]_{\mathfrak{g}})^\perp$ tel que $\mathscr{K}:=\mathrm{Vect}\{x\}$ soit un idéal, et tel que $\mathscr{K}^\perp$ soit un p-idéal. Alors, $(\mathfrak{g},\omega_{\mathfrak{g}})$ peut être obtenue au moyen d'une D_0-extension symplectique par un espace de dimension 1 à partir d'une super-algèbre de Lie orthosymplectique restreinte de type quasi-Frobenius $(\mathfrak{a},\omega_{\mathfrak{a}})$. De plus, si $C(\mathfrak{g})_0\neq 0$, on peut choisir $x\in C(\mathfrak{g})_0$, de telle sorte à ce que la double extension soit classique.*

Preuve. Dans [BM21], il a été prouvé que l'espace $\mathscr{K}^\perp$ est un idéal de $(\mathfrak{g},\omega_{\mathfrak{g}})$, et qu'il existe $x^*\in\mathfrak{g}_0$ (puisque $(\mathscr{K}^\perp)_1=\mathfrak{g}_1$) tel que

$$\mathfrak{g}=\mathscr{K}^\perp\oplus\mathscr{K}^*,\qquad \text{où } \mathscr{K}^*:=\mathrm{Vect}\{x^*\}.$$

On peut normaliser x^* de telle sorte à ce que $\omega_{\mathfrak{g}}(x^*,x)=1$.

Définissons $\mathfrak{a} := (\mathscr{K} + \mathscr{K}^*)^\perp$. On a alors une décomposition $\mathfrak{g} = \mathscr{K} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathscr{K}^*$.

Définissons une forme orthosymplectique sur $\mathfrak{a}$ en posant :

$$\omega_\mathfrak{a} = \omega_\mathfrak{g}|_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}}.$$

Dans [BM21], il a été prouvé que l'espace vectoriel $\mathfrak{a}$ peut être équipé d'une structure de super-algèbre de Lie, et qu'il existe une structure orthosymplectique sur $\mathfrak{a}$ pour laquelle $\mathfrak{g}$ est sa double extension symplectique au moyen de la forme $\omega_\mathfrak{a}$, d'une super-dérivation D et de $Z_\Omega \in \mathfrak{a}$ comme au point (i) du théorème 8.3.1. En particulier, il a été démontré que l'application

$$\Omega : \mathfrak{a}\wedge\mathfrak{a} \to \mathbb{F} \quad (a, b) \mapsto \omega_\mathfrak{a}\Big(D\circ D(a) + 2D^*\circ D(a) + D^*\circ D^*(a) + \lambda(D + D^*)(a), b\Big)$$

est un élément de $B^2_{\mathrm{CE}}(\mathfrak{a}; \mathbb{F})$, ce qui implique que

$$\Omega(a, b) = \omega_\mathfrak{a}(Z_\Omega, [a, b]_\mathfrak{a}) \quad \text{pour un } Z_\Omega \in \mathfrak{a}. \tag{8.16}$$

De plus, l'application

$$C : \mathfrak{a}\wedge\mathfrak{a} \to \mathbb{F} \quad (a, b) \mapsto \omega_\mathfrak{a}\big((D + D^*)(a), b\big)$$

est un élément de $Z^2_{\mathrm{CE}}(\mathfrak{a}; \mathbb{F})$ par le lemme 8.2.13. Il reste à montrer qu'il existe une $p|2p$-opération sur $\mathfrak{a}$. Puisque $\mathfrak{a} \subset \mathscr{K}^\perp$ et $\mathscr{K}^\perp$ est un p-idéal, alors

$$a^{[p]_\mathfrak{g}} \in \mathscr{K}^\perp = \mathscr{K} \oplus \mathfrak{a} \qquad \text{pour tout } a \in \mathfrak{a}_0.$$

Il s'en suit que

$$a^{[p]_\mathfrak{g}} = s(a) + P(a)x.$$

Montrons que l'application

$$s : \mathfrak{a}_0 \to \mathfrak{a}_0, \quad a \mapsto s(a),$$

est une $p|2p$-opération sur $\mathfrak{a}$. Puisque $(\delta a)^{[p]_\mathfrak{g}} = \delta^p(a^{[p]_\mathfrak{g}})$, pour tout $\delta \in \mathbb{F}$ et pour tout $a \in \mathfrak{a}_0$, on a

$$s(\delta a) = \delta^p s(a) \tag{8.17}$$

$$P(\delta a) = \delta^p P(a). \tag{8.18}$$

Puis, pour tout $a \in \mathfrak{a}_0$ et pour tout $b \in \mathfrak{a}$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= [a^{[p]_\mathfrak{g}}, b]_\mathfrak{g} - (\mathrm{ad}^\mathfrak{g}_a)^p(b) \\ &= [s(a), b]_\mathfrak{a} + \omega_\mathfrak{a}\big((D + D^*)(s(a)), b\big)x - (\mathrm{ad}^\mathfrak{a}_a)^p(b) - \omega_\mathfrak{a}\big((D + D^*)(a), (\mathrm{ad}^\mathfrak{a}_a)^{p-1}(b)\big)x. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\omega_\mathfrak{a}\big((D + D^*)(s(a)), b\big) = \omega_\mathfrak{a}\big((D + D^*)(a), (\mathrm{ad}^\mathfrak{a}_a)^{p-1}(b)\big), \tag{8.19}$$

$$[s(a), b]_\mathfrak{a} = (\mathrm{ad}^\mathfrak{a}_a)^p(b). \tag{8.20}$$

Puisque

$$\begin{aligned} \sum_{1\leq i\leq p-1} i s^\mathfrak{g}_i(a, b)\mu^{i-1} &= (\mathrm{ad}^\mathfrak{g}_{\mu a+b})^{p-1}(a), \\ &= (\mathrm{ad}^\mathfrak{a}_{\mu a+b})^{p-1}(a) + \omega_\mathfrak{a}\big((D + D^*)(\mu a + b), (\mathrm{ad}^\mathfrak{a}_{\mu a+b})^{p-2}(a)\big)x, \end{aligned}$$

on obtient
$$s_i^{\mathfrak{g}}(a,b) = s_i^{\mathfrak{a}}(a,b) + \sigma_i^{\mathfrak{a}}(a,b)x.$$

En outre,
$$\begin{aligned} 0 &= (a+b)^{[p]_{\mathfrak{g}}} - a^{[p]_{\mathfrak{g}}} - b^{[p]_{\mathfrak{g}}} - \sum_{1\le i\le p-1} s_i^{\mathfrak{g}}(a,b) \\ &= (P(a+b) - P(a) - P(b) - \sum_{1\le i\le p-1} \sigma_i^{\mathfrak{a}}(a,b))x \\ &\quad + s(a+b) - s(a) - s(b) - \sum_{1\le i\le p-1} s_i^{\mathfrak{a}}(a,b). \end{aligned}$$

Ainsi,
$$s(a+b) = s(a) + s(b) + \sum_{1\le i\le p-1} s_i^{\mathfrak{a}}(a,b), \tag{8.21}$$
$$P(a+b) - P(a) - P(b) = \sum_{1\le i\le p-1} \sigma_i^{\mathfrak{a}}(a,b). \tag{8.22}$$

Les équations (8.17), (8.20) et (8.21) impliquent que s définit une $p|2p$-opération sur $\mathfrak{a}$. Maintenant, puisque $[a^{[p]_{\mathfrak{g}}}, x^*]_{\mathfrak{g}} = (\mathrm{ad}_a^{\mathfrak{g}})^p(x^*)$, on a
$$P(a)\lambda x - D(s(a)) - \omega_{\mathfrak{a}}(Z_\Omega, s(a))x = -(\mathrm{ad}_a^{\mathfrak{a}})^{p-1} \circ D(a) - \omega_{\mathfrak{a}}\big((D+D^*)(a), (\mathrm{ad}_a^{\mathfrak{a}})^{p-2} \circ D(a)\big)x.$$

Il s'en suit que
$$D(s(a)) = (\mathrm{ad}_a^{\mathfrak{a}})^{p-1} \circ D(a), \tag{8.23}$$
$$P(a)\lambda = \omega_{\mathfrak{a}}(Z_\Omega, s(a)) - \omega_{\mathfrak{a}}((D+D^*)(a), (\mathrm{ad}_a^{\mathfrak{a}})^{p-2} \circ D(a)). \tag{8.24}$$

L'équation (8.23) implique que D est une super-dérivation restreinte de $\mathfrak{a}$ (relativement à la $p|2p$-opération s). Définissons l'application
$$T : a \to \mathbb{F} \quad a \mapsto \omega_{\mathfrak{a}}((D+D^*)(a), (\mathrm{ad}_a^{\mathfrak{a}})^{p-2} \circ D(a)) + \lambda P(a).$$

Lemme 8.3.3.
$$(C,P) \in Z_*^2(\mathfrak{a},\mathbb{F}) \textit{ et } (\Omega,T) \in B_*^2(\mathfrak{a},\mathbb{F}).$$

Preuve. Les équations (8.18) et (8.21), ainsi que le lemme 8.2.16, impliquent que P satisfait la propriété $(*)$ relativement au cocycle C. De plus, l'équation (8.19) et la proposition 8.2.17 impliquent que $(C,P) \in Z_*^2(\mathfrak{a};\mathbb{F})$.

Dans [BM21], il a été montré que $\Omega \in B_{\mathrm{CE}}^2(\mathfrak{a};\mathbb{F})$. Montrons que l'application T satisfait la propriété $(*)$ relativement à Ω. En effet, pour tout $\delta \in \mathbb{F}$ et pour tout $a \in \mathfrak{a}_0$, on a
$$\begin{aligned} T(\delta a) &= \omega_{\mathfrak{a}}\big((D+D^*)(\delta a), (\mathrm{ad}_{\delta a}^{\mathfrak{a}})^{p-2} \circ D(\delta a)\big) + \lambda P(\delta a) \\ &= \delta^p \omega\big((D+D^*)(a), (\mathrm{ad}_a^{\mathfrak{a}})^{p-2} \circ D(a)\big) + \lambda \delta^p P(a) \\ &= \delta^p T(a). \end{aligned}$$

De plus, pour tout $a, b \in \mathfrak{a}_0$, on a

$$\begin{aligned}
T(a+b) &= \omega_{\mathfrak{a}}(Z_\Omega, (a+b)^{[p]_{\mathfrak{a}}}) && \text{(par (8.24))}\\
&= \omega_{\mathfrak{a}}(Z_\Omega, a^{[p]_{\mathfrak{a}}}) + \omega_{\mathfrak{a}}(Z_\Omega, b^{[p]_{\mathfrak{a}}}) + \omega_{\mathfrak{a}}\left(Z_\Omega, \sum_{1\leq i\leq p-1} s_i(a,b)\right) && \text{(par définition)}\\
&= T(a)+T(b)\\
&\quad + \sum_{\substack{x_k=a \text{ or } b\\ x_{p-1}=b,\ x_p=a}} \frac{1}{\pi(a)}\omega_{\mathfrak{a}}\Big(Z_\Omega, [x_1,[x_2,[\ldots,[x_{p-1},x_p]_{\mathfrak{a}}\ldots]_{\mathfrak{a}}]_{\mathfrak{a}}\Big)\\
&= T(a)+T(b)\\
&\quad + \sum_{\substack{x_k=a \text{ or } b\\ x_{p-1}=b,\ x_p=a}} \frac{1}{\pi(a)}\Omega\Big(x_1,[x_2,[\ldots,[x_{p-1},x_p]_{\mathfrak{a}}\ldots]_{\mathfrak{a}}]_{\mathfrak{a}}\Big) && \text{(par (8.16))}\\
&= T(a)+T(b)\\
&\quad + \sum_{\substack{x_k=a \text{ or } b\\ x_{p-1}=b,\ x_p=a}} \frac{1}{\pi(a)}\Omega\Big([[[x_p,x_{p-1}]_{\mathfrak{a}},x_{p-2}]_{\mathfrak{a}},\ldots,x_2]_{\mathfrak{a}},x_1\Big)
\end{aligned}$$

Les équations (8.16) et (8.24) impliquent que $(\Omega, T) \in B^2_*(\mathfrak{a};\mathbb{Z})$. □

Supposons maintenant que

$$(x^*)^{[p]_{\mathfrak{g}}} = a_0 + \beta x + \gamma x^*, \text{ où } a_0 \in \mathfrak{a} \text{ et } \beta,\gamma \in \mathbb{F}. \tag{8.25}$$

On a

$$0 = [(x^*)^{[p]}, x]_{\mathfrak{g}} - (\mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_{x^*})^p(x) = -\gamma\lambda x + \lambda^p x.$$

Ainsi, $\gamma\lambda = \lambda^p$. De plus,

$$0 = [(x^*)^{[p]}, x^*]_{\mathfrak{g}} - (\mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_{x^*})^p(x^*) = \beta\lambda x - \big(D(a_0) + \omega_{\mathfrak{a}}(Z_\Omega, a_0)x\big).$$

Ainsi, $D(a_0) = 0$ et $\lambda\beta = \omega_{\mathfrak{a}}(Z_\Omega, a_0)$. Pour tout $a \in \mathfrak{a}$, on a

$$\begin{aligned}
0 = [(x^*)^{[p]_{\mathfrak{g}}}, a]_{\mathfrak{g}} - (\mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_{x^*})^p(a) &= [a_0, a] + \omega_{\mathfrak{a}}((D+D^*)(a_0), a)x + \gamma D(a) + \gamma\omega(Z_\Omega, a)x - D^p(a)\\
&\quad - \sum_{1\leq i\leq p-1} \omega_{\mathfrak{a}}((-\lambda)^{p-1-i}D^{*i}(Z_\Omega), a)x - (-\lambda)^{p-1}\omega(Z_\Omega, a)x.
\end{aligned}$$

Il s'en suit $D^p = \gamma D + \mathrm{ad}_{a_0}$ et $D^*(a_0) + \gamma Z_\Omega = \sum_{0\leq i\leq p-1} (-\lambda)^{p-1-i} D^{*i}(Z_\Omega)$ ($\omega_{\mathfrak{g}}$ est non dégénérée). Supposons que

$$x^{[p]_{\mathfrak{g}}} = b_0 + \sigma x + \delta x^*, \text{ où } \sigma,\delta \in \mathbb{F} \text{ et } b_0 \in \mathfrak{a}_0. \tag{8.26}$$

on a

$$0 = [x^{[p]}, x]_{\mathfrak{g}} - (\mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_{x})^p(x) = -\delta\lambda x.$$

Ainsi, $\lambda\delta = 0$. En outre,

$$0 = [x^{[p]}, x^*]_{\mathfrak{g}} - (\mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_{x})^p(x^*) = \sigma\lambda x - \big(D(b_0) + \omega_{\mathfrak{a}}(Z_\Omega, b_0)x\big).$$

Ainsi, $D(b_0) = 0$ et $\lambda\sigma - \omega(Z_\Omega, b_0) = 0$.

Pour tout $b \in \mathfrak{a}$, on a

$$0 = [x^{[p]_\mathfrak{g}}, b]_\mathfrak{g} - (\mathrm{ad}_x^\mathfrak{g})^p(b) = [b_0, b]_\mathfrak{a} + \omega_\mathfrak{a}\Big((D + D^*)(b_0), b)x + \delta(D(b) + \omega_\mathfrak{a}(Z_\Omega, b)x\Big).$$

Il s'en suit que $\delta D(b) + [b_0, b]_\mathfrak{a} = 0$ et $D^*(b_0) + \delta Z_\Omega = 0$ (puisque $\omega_\mathfrak{a}$ est non dégénérée).

Le cas $\lambda \neq 0$: on a $\delta = 0$, $D^*(b_0) = 0$ et $b_0 \in C(\mathfrak{a})$. Ainsi, $\mathfrak{g}$ peut s'obtenir à partir de la super-algèbre de Lie restreinte $\mathfrak{a}$ de la même façon qu'au théorème 8.3.1.

Le cas $\lambda = 0$: on a $\omega(Z_\Omega, b_0) = 0$. Ici, si $\delta = 0$ alors $b_0 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{a})$. Ainsi, $\mathfrak{g}$ peut s'obtenir à partir de la super-algèbre de Lie restreinte$\mathfrak{a}$ de la même façon qu'au théorème 8.3.1. Toutefois, si $\delta \neq 0$, on a alors $D = -\delta^{-1} \mathrm{ad}_{b_0}$ et $D^*(b_0) = -\delta Z_\Omega$. □

8.3.2 D_1-extensions

Soit $(\mathfrak{a}, \omega_\mathfrak{a})$ une super-algèbre de Lie orthosymplectique restreinte de type quasi-Frobenius, et soit $D \in \mathrm{Der}_1(\mathfrak{a})$ une super-dérivation impaire.

Définissons les deux applications

$$\Omega : \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{a} \to \mathbb{F}, \quad (a, b) \mapsto \quad \omega_\mathfrak{a}\Big(D \circ D(a) - D^* \circ D^*(a), b\Big), \tag{8.27}$$

$$\Delta : \mathfrak{a}_0 \to \mathbb{F}, \qquad a \mapsto \qquad \omega_\mathfrak{a}\Big((D + D^*)(a), \mathrm{ad}_a^{p-2}(D(a)\Big). \tag{8.28}$$

Supposons que (Ω, Δ) soit un élément de $B^2_*(\mathfrak{g}; \mathbb{F})$ (i.e., un 2-cobord de la cohomologie restreinte). Écrivons dans ce cas $(\Omega, \Delta) = (d^1_{\mathrm{CE}}(\chi), \mathrm{ind}^1(\chi))$ pour un certain $\chi \in C^1_*(\mathfrak{a}; \mathbb{F})$; on a donc alors

$$\Omega(a, b) = \chi([a, b]_\mathfrak{a}) \quad \text{ et } \quad \Delta(a) = \chi(a^{[p]}).$$

Puisque $\omega_\mathfrak{a}$ est non dégénérée, il existe $a_0 \in \mathfrak{a}$ tel que

$$\Omega(a, b) = \omega_\mathfrak{a}(a_0, [a, b]_\mathfrak{a}) \;\; \forall a, b \in \mathfrak{a} \quad \text{ et } \quad \Delta(a) = \omega_\mathfrak{a}\left(a_0, a^{[p]}\right) \;\; \forall a \in \mathfrak{a}_0\,. \tag{8.29}$$

Théorème 8.3.4 (D_1-extension – le cas ω orthosymplectique)**.** *Soit $(\mathfrak{a}, \omega_\mathfrak{a})$ une super-algèbre de Lie orthosymplectique restreinte de type quasi-Frobenius. Soit $D \in \mathrm{Der}_1(\mathfrak{a})$ une super-dérivation restreinte vérifiant*

$$(\Omega, \Delta) \in B^2_*(\mathfrak{a}, \mathbb{F}),$$

et

$$D^2 = \mathrm{ad}_{a_0} \quad \text{ et } \quad D(a_0) = 0,$$

où a_0 est comme dans l'équation (8.29).

(*i*) *Il existe une structure de super-algèbre de Lie sur $\mathfrak{g} := \mathscr{K} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathscr{K}^*$, où $\mathscr{K} :=$ Vect$\{x\}$ pour x impair, définie de la façon suivante (pour tous $a, b \in \mathfrak{a}$) :*

$$[\mathscr{K}, \mathfrak{g}]_\mathfrak{g} = 0, \qquad [a, b]_\mathfrak{g} := [a, b]_\mathfrak{a} + \Big(\omega_\mathfrak{a}(D(a), b) + (-1)^{|a|}\omega_\mathfrak{a}(a, D(b))\Big)\, x,$$

$$[x^*, x^*]_\mathfrak{g} = 2a_0, \quad [x^*, a]_\mathfrak{g} := D(a) - \omega_\mathfrak{a}(a, a_0)x.$$

Il existe une forme orthosymplectique antisymétrique fermée $\omega_{\mathfrak{g}}$ sur $\mathfrak{g}$ définie par

$$\omega_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}} := \omega_{\mathfrak{a}}, \quad \omega_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}, \mathscr{K}) := \omega_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}, \mathscr{K}^*) := 0, \quad \omega_{\mathfrak{g}}(x^*, x) := 1, \quad \omega_{\mathfrak{g}}(x, x) := \omega_{\mathfrak{g}}(x^*, x^*) := 0.$$

(*ii*) *Il existe une $p|2p$-opération sur la double extension $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{a}$ définie par*

$$a^{[p]_{\mathfrak{g}}} \quad = \quad a^{[p]_{\mathfrak{a}}}.$$

Preuve. Similaire à celle du théorème 8.3.1. □

Théorème 8.3.5 (Réciproque du théorème 8.3.4)**.** *Soit $(\mathfrak{g}, \omega_{\mathfrak{g}})$ une super-algèbre de Lie orthosymplectique restreinte de type quasi-Frobenius. Supposons qu'il existe un élément non nul $x \in C(\mathfrak{g})_1$ tel que $\omega(x, x) = 0$. Alors, $(\mathfrak{g}, \omega_{\mathfrak{g}})$ est une D_1-extension d'une super-algèbre de Lie orthosymplectique restreinte de type quasi-Frobenius $(\mathfrak{a}, \omega_{\mathfrak{a}})$.*

Remarque. La condition $\omega(x, x) = 0$ est nécessaire. Un contre-exemple est donné par la super-algèbre de Lie $C^1_{1/2} + A$, voir [BM21].

Preuve. Soit x un élément non nul de $C(\mathfrak{g})_1$. Il a été démontré dans [BM21] que les sous-espaces $\mathscr{K} := \mathrm{Vect}\{x\}$ et $\mathscr{K}^\perp$ sont des idéaux de $(\mathfrak{g}, \omega_{\mathfrak{g}})$. Puisque $\mathscr{K}$ est de dimension 1 et que $\omega(x, x) = 0$, on a $\mathscr{K} \subset \mathscr{K}^\perp$ et $\dim(\mathscr{K}^\perp) = \dim(\mathfrak{g}) - 1$. Ainsi, il existe $x^* \in \mathfrak{g}_1$ tel que

$$\mathfrak{g} = \mathscr{K}^\perp \oplus \mathscr{K}^*, \qquad \text{où } \mathscr{K}^* := \mathrm{Vect}\{x^*\}.$$

Cet élément x^* peut être normalisé de sorte à avoir $\omega_{\mathfrak{g}}(x^*, x) = 1$.

Définissons $\mathfrak{a} := (\mathscr{K} + \mathscr{K}^*)^\perp$. On a alors la décomposition $\mathfrak{g} = \mathscr{K} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathscr{K}^*$. On définit une forme orthosymplectique sur $\mathfrak{a}$ en posant

$$\omega_{\mathfrak{a}} = \omega_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}}.$$

Il a été prouvé dans [BM21] que $\omega_{\mathfrak{a}}$ est non dégénérée on $\mathfrak{a}$, et que $\mathfrak{g}$ est une double extension symplectique de $\mathfrak{a}$ à l'aide de $\omega_{\mathfrak{a}}$ et d'une super-dérivation D vérifiant $D^2 = \mathrm{ad}_{a_0}$ et $D(a_0) = 0$. De plus, il a également été prouvé que $\Omega \in B^2_{\mathrm{CE}}(\mathfrak{a}; \mathbb{F})$, et que $C \in Z^2_{\mathrm{CE}}(\mathfrak{a}; \mathbb{F})$. Il reste à montrer qu'il existe une $p|2p$-opération sur $\mathfrak{a}$. Puisque $\mathfrak{a} \subset \mathscr{K}^\perp$ et que x et x^* sont impairs, on a

$$a^{[p]_{\mathfrak{g}}} \in \mathfrak{a} \qquad \text{pour tout } a \in \mathfrak{a}_0.$$

Il s'en suit que

$$a^{[p]_{\mathfrak{g}}} = s(a).$$

Montrons maintenant que l'application

$$s : \mathfrak{a}_0 \to \mathfrak{a}_0, \quad a \mapsto s(a),$$

est une $p|2p$-opération sur $\mathfrak{a}$. Puisque $(\delta a)^{[p]_{\mathfrak{g}}} = \delta^p(a^{[p]_{\mathfrak{g}}})$, on a que $s(\delta a) = \delta^p s(a)$, pour tout $\delta \in \mathbb{F}$ et $a \in \mathfrak{a}_0$. En outre,

$$\begin{aligned} 0 &= [a^{[p]_{\mathfrak{g}}}, b]_{\mathfrak{g}} - (\mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_a)^p(b) \\ &= [s(a), b]_{\mathfrak{a}} + \omega_{\mathfrak{a}}((D + D^*)(s(a)), b)x - (\mathrm{ad}^{\mathfrak{a}}_a)^p(b) - \omega_{\mathfrak{a}}((D + D^*)(a), (\mathrm{ad}^{\mathfrak{a}}_a)^{p-1}(b))x. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\omega_{\mathfrak{a}}\Big((D + D^*)(s(a)), b\Big) \quad = \quad \omega_{\mathfrak{a}}\Big((D + D^*)(a), (\mathrm{ad}^{\mathfrak{a}}_a)^{p-1}(b)\Big), \tag{8.30}$$

$$[s(a), b]_{\mathfrak{a}} \;=\; (\mathrm{ad}^{\mathfrak{a}}_a)^p(b). \tag{8.31}$$

Ensuite, puisque,

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i\leq p-1} is_i^{\mathfrak{g}}(a,b)\lambda^{i-1} &= (\mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_{\lambda a+b})^{p-1}(a),\\ &= (\mathrm{ad}^{\mathfrak{a}}_{\lambda a+b})^{p-1}(a)+\omega_{\mathfrak{a}}\Big((D+D^*)(\lambda a+b),(\mathrm{ad}^{\mathfrak{a}}_{\lambda a+b})^{p-2}(a)\Big)x,\\ &= (\mathrm{ad}^{\mathfrak{a}}_{\lambda a+b})^{p-1}(a).\end{aligned}$$

on a que

$$s_i^{\mathfrak{g}}(a,b)=s_i^{\mathfrak{a}}(a,b).$$

De plus,

$$\begin{aligned}0 &= (a+b)^{[p]_{\mathfrak{g}}}-a^{[p]_{\mathfrak{g}}}-b^{[p]_{\mathfrak{g}}}-\sum_{1\leq i\leq p-1}s_i^{\mathfrak{g}}(a,b)\\ &= s(a+b)-s(a)-s(b)-\sum_{1\leq i\leq p-1}s_i^{\mathfrak{a}}(a,b).\end{aligned}$$

En conséquence de quoi,

$$s(a+b) \;=\; s(a)+s(b)+\sum_{1\leq i\leq p-1}s_i^{\mathfrak{a}}(a,b).$$

Ainsi, s est une $p|2p$-opération sur $\mathfrak{a}$. On a aussi $[a^{[p]_{\mathfrak{g}}},x^*]_{\mathfrak{g}}=(\mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_a)^p(x^*)$, donc

$$-D(s(a))+\omega(s(a),a_0)x=-(\mathrm{ad}^{\mathfrak{a}}_a)^{p-1}\circ D(a)-\omega\Big((D+D^*)(a),(\mathrm{ad}^{\mathfrak{a}}_a)^{p-2}\circ D(a)\Big)x.$$

On a alors

$$D(s(a))=(\mathrm{ad}^{\mathfrak{a}}_a)^{p-1}\circ D(a),\;\text{ et }\;\omega(a_0,s(a))=\omega\Big((D+D^*)(a),(\mathrm{ad}^{\mathfrak{a}}_a)^{p-2}\circ D(a)\Big).$$

La première équation montre que D est une super-dérivation restreinte de $\mathfrak{a}$ (relativement à la $p|2p$-opération s). La seconde équation complète la preuve, ainsi $(\Omega,\Delta)\in B^2_*(\mathfrak{a},\mathbb{F})$, avec Ω et Δ donnés par

$$\begin{aligned}\Omega:\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{a}\to\mathbb{F}\quad (a,b)&\mapsto\;\omega_{\mathfrak{a}}\Big(D\circ D(a)-D^*\circ D^*(a),b\Big),\\ \Delta:\mathfrak{a}_0\to\mathbb{F}\qquad\quad a&\mapsto\;\omega_{\mathfrak{a}}\Big((D+D^*)(a),\mathrm{ad}_a^{p-2}(D(a)\Big).\end{aligned}$$

Finalement, $\mathfrak{g}$ est une double extension symplectique de $\mathfrak{a}$. □

8.4 Doubles extensions restreintes périplectiques

8.4.1 D_0-extensions

Soit $(\mathfrak{a},\omega_{\mathfrak{a}})$ une super-algèbre de Lie restreinte périplectique de type quasi-Frobenius, et soit $D\in\mathrm{Der}_0(\mathfrak{a})$ une super-dérivation. Considérons l'application

$$\Omega:\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{a}\to\mathbb{F},\quad (a,b)\;\mapsto\;\omega_{\mathfrak{a}}\Big((D\circ D+2D^*\circ D+D^*\circ D^*+\lambda D+\lambda D^*)(a),b\Big).$$

Supposons que $(\Omega, 0)$ soit un élément de $B^2_*(\mathfrak{a}, \mathbb{F})$ (i.e. un 2-cobord de la cohomologie restreinte). Écrivons $(\Omega, 0) = (d^1_{\mathrm{CE}}(\chi), \mathrm{ind}^1(\chi))$ pour un certain $\chi \in C^1_*(\mathfrak{a}; \mathbb{F})$; on a donc

$$\Omega(a, b) = \chi([a, b]_{\mathfrak{a}}) \quad \text{et} \quad \chi(a^{[p]}) = 0.$$

Puisque $\omega_{\mathfrak{a}}$ est non dégénérée, il existe $Z_\Omega \in \mathfrak{a}$ tel que

$$\Omega(a, b) = \omega_{\mathfrak{a}}(Z_\Omega, [a, b]_{\mathfrak{a}}) \quad \text{et} \quad \omega_{\mathfrak{a}}(Z_\Omega, a^{[p]}) = 0. \tag{8.32}$$

Théorème 8.4.1 (D_0-extension – le cas ω périplectique)**.** *Soit* $(\mathfrak{a}, \omega_{\mathfrak{a}})$ *une super-algèbre de Lie restreinte périplectique de type quasi-Frobenius. Soit* $D \in \mathrm{Der}_0(\mathfrak{a})$ *une super-dérivation restreinte satisfaisant la p-propriété* (8.3)*. Supposons de plus que* $(\Omega, 0) \in B^2_*(\mathfrak{a}, \mathbb{F})$*. Alors*

(i) Il existe une structure de super-algèbre de Lie sur $\mathfrak{g} := \mathscr{K} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathscr{K}^*$*, où* $\mathscr{K} := Vect\{x\}$ *pour* x *impair et* $\mathscr{K}^* := Vect\{e\}$ *pour* e *pair, définie (pour tous* $a, b \in \mathfrak{a}$*) par*

$$[x, e]_{\mathfrak{g}} = \lambda x, \; [a, b]_{\mathfrak{g}} := [a, b]_{\mathfrak{a}} + \Big(\omega_{\mathfrak{a}}(D(a), b) + \omega_{\mathfrak{a}}(a, D(b))\Big)x, \quad [e, a]_{\mathfrak{g}} := D(a) + \omega_{\mathfrak{a}}(Z_\Omega, a)x.$$

Il existe une forme périplectique antisymétrique fermée $\omega_{\mathfrak{g}}$ *sur* $\mathfrak{g}$ *définie par :*

$$\omega_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}} := \omega_{\mathfrak{a}}, \quad \omega_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}, \mathscr{K}) := \omega_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}, \mathscr{K}^*) := 0, \quad \omega_{\mathfrak{g}}(e, x) := 1, \quad \omega_{\mathfrak{g}}(x, x) := \omega_{\mathfrak{g}}(e, e) := 0.$$

(ii) Il existe une $p|2p$*-opération sur la double extension symplectique* $\mathfrak{g}$ *de* $\mathfrak{a}$ *donnée par*

$$a^{[p]_{\mathfrak{g}}} = a^{[p]_{\mathfrak{a}}}, \quad e^{[p]_{\mathfrak{g}}} = a_0 + \gamma e,$$

où $a_0 \in \mathfrak{a}$ *et* $\gamma \in \mathbb{F}$ *sont comme dans l'équation* (8.3)*, et où les conditions suivantes doivent être satisfaites :*

$$\begin{aligned} \lambda\gamma &= \lambda^p, \\ \omega(Z_\Omega, a_0) &= 0, \\ \sum_{i+j=p-1} (-\lambda)^j (D^*)^i (Z_\Omega) &= D^*(a_0) + \gamma Z_\Omega. \end{aligned}$$

Preuve. Similaire à celle du théorème 8.3.1. □

Théorème 8.4.2 (Réciproque du théorème 8.4.1)**.** *Soit* $(\mathfrak{g}, \omega_{\mathfrak{g}})$ *une super-algèbre de Lie restreinte périplectique de type quasi-Frobenius. Supposons qu'il existe un élément non nul* $x \in ([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])^{\perp}_{\bar{1}}$ *tel que* $\mathscr{K} := Vect\{x\}$ *soit un idéal et que* $K^{\perp}$ *soit un p-idéal. Alors* $(\mathfrak{g}, \omega_{\mathfrak{g}})$ *est obtenu comme* D_0*-extension symplectique à partir d'une super-algèbre de Lie restreinte périplectique de type quasi-Frobenius* $(\mathfrak{a}, \omega_{\mathfrak{a}})$*.*

Preuve. Il a été démontré dans [BM21] que $\mathscr{K}^{\perp}$ est aussi un idéal de $(\mathfrak{g}, \omega_{\mathfrak{g}})$. Puisque $\mathscr{K}$ est de dimension 1 et que $\omega_{\mathfrak{g}}(x, x) = 0$, on a que $\mathscr{K} \subset \mathscr{K}^{\perp}$ et $\dim(\mathscr{K}^{\perp}) = \dim(\mathfrak{g}) - 1$. Ainsi, il existe $e \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ (car $(\mathscr{K}^{\perp})_{\bar{1}} = \mathfrak{g}_{\bar{1}}$) tel que

$$\mathfrak{g} = \mathscr{K}^{\perp} \oplus \mathscr{K}^*, \quad \text{où } \mathscr{K}^* := \mathrm{Vect}\{x^*\}.$$

On peut normaliser e de telle sorte à ce que $\omega_{\mathfrak{g}}(e, x) = 1$. Définissons $\mathfrak{a} := (\mathscr{K} + \mathscr{K}^*)^{\perp}$. On a alors une décomposition $\mathfrak{g} = \mathscr{K} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathscr{K}^*$. Dans [BM21], il a été montré que $\mathfrak{g}$ est une double extension symplectique de $\mathfrak{a}$. Il reste à montrer qu'il existe une $p|2p$-opération sur $\mathfrak{a}$. Puisque $\mathfrak{a} \subset \mathscr{K}^{\perp}$ et que $\mathscr{K}^{\perp}$ est un p-idéal, on a

$$a^{[p]_{\mathfrak{g}}} \in \mathscr{K}^{\perp} = \mathscr{K} \oplus \mathfrak{a} \quad \text{pour tout } a \in \mathfrak{a}_{\bar{0}}.$$

on a donc $a^{[p]_{\mathfrak{g}}} = s(a)$. L'application

$$s : \mathfrak{a}_{\bar{0}} \to \mathfrak{a}_{\bar{0}}, \quad a \mapsto s(a),$$

est alors une $p|2p$-opération sur $\mathfrak{a}$. La preuve est similaire à celle du théorème 8.3.2. □

8.4.2 D_1-extensions

Soit $(\mathfrak{a}, \omega_\mathfrak{a})$ une super-algèbre de Lie restreinte périplectique de type quasi-Frobenius, et soit $D \in \mathrm{Der}_1(\mathfrak{a})$ une super-dérivation. Définissons l'application suivante

$$\Omega : \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{a} \to \mathbb{F}, \quad (a,b) \quad \mapsto \quad \omega_\mathfrak{a}\Big(D \circ D(a) - D^* \circ D^*(a), b\Big).$$

Supposons que $(\Omega, 0)$ soit un élément de $B^2_*(\mathfrak{g};\mathbb{F})$ (i.e., a 2-cobord de la cohomologie restreinte). Écrivons $(\Omega, 0) = (d^1_{\mathrm{CE}}(\chi), \mathrm{ind}^1(\chi))$ pour un certain $\chi \in C^1_*(\mathfrak{a};\mathbb{F})$; on a alors

$$\Omega(a,b) = \chi([a,b]_\mathfrak{a}) \ \ \forall a,b \in \mathfrak{a} \quad \text{ et } \quad \chi\left(a^{[p]}\right) = 0 \ \ \forall a \in \mathfrak{a}_0\,.$$

Puisque $\omega_\mathfrak{a}$ est non dégénérée, il existe $a_0 \in \mathfrak{a}$ tel que

$$\Omega(a,b) = \omega_\mathfrak{a}(a_0, [a,b]_\mathfrak{a}) \quad \text{et} \quad \omega_\mathfrak{a}\left(a_0, a^{[p]}\right) = 0. \tag{8.33}$$

Soit maintenant une application $P : \mathfrak{a}_0 \mapsto \mathbb{F}$ vérifiant les conditions (8.9) et (8.10). Le lemme 8.2.16 assure que P a la propriété $(*)$ relativement au cocycle C défini dans (8.4).

Théorème 8.4.3 (D_1-extension – les cas ω périplectique)**.** *Soit $(\mathfrak{a}, \omega_\mathfrak{a})$ une super-algèbre de Lie restreinte périplectique de type quasi-Frobenius, et soit $D \in \mathrm{Der}_1(\mathfrak{a})$ une super-dérivation. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

$$(\Omega, 0) \in B^2_*(\mathfrak{a}, \mathbb{F}) \quad \textit{et} \quad (C, P) \in Z^2_*(\mathfrak{a}, \mathbb{F}).$$

Supposons de plus que a_0 est donné comme dans l'équation ((8.33)) :

$$D^2 = \mathrm{ad}_{a_0}, \quad D(a_0) = D^*(a_0) = 0.$$

(i) Il existe une structure de super-algèbre de Lie sur $\mathfrak{g} := \mathscr{K} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathscr{K}^*$, où $\mathscr{K} :=$ Vect$\{x\}$ pour x pair et $\mathscr{K}^* :=$ Vect$\{e\}$ pour e impair, définie pour tous $a, b \in \mathfrak{a}$ par

$$[\mathscr{K}, \mathfrak{g}]_\mathfrak{g} = 0, \quad [a,b]_\mathfrak{g} := [a,b]_\mathfrak{a} + \Big(\omega_\mathfrak{a}(D(a),b) + (-1)^{|a|}\omega_\mathfrak{a}(a, D(b))\Big)\, x,$$
$$[e,e]_\mathfrak{g} = 2a_0, \quad [e,a]_\mathfrak{g} := D(a) + \omega_\mathfrak{a}(a_0,a)x.$$

Il existe une forme périplectique antisymétrique fermée $\omega_\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}$ définie par :

$$\omega_\mathfrak{g}|_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}} := \omega_\mathfrak{a}, \quad \omega_\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \mathscr{K}) := \omega_\mathfrak{g}(\mathfrak{a}, \mathscr{K}^*) := 0, \quad \omega_\mathfrak{g}(e,x) := 1, \quad \omega_\mathfrak{g}(x,x) := \omega_\mathfrak{g}(e,e) := 0.$$

(ii) Supposons qu'il existe $b_0 \in Z(\mathfrak{a})$ tel que

$$D(b_0) = D^*(b_0) = \omega(a_0, b_0) = 0.$$

La $p|2p$-opération sur $\mathfrak{a}$ peut être étendue sur $\mathfrak{g}$ de la façon suivante (μ est quelconque) :

$$a^{[p]_\mathfrak{g}} \;=\; a^{[p]_\mathfrak{a}} + P(a)x, \quad x^{[p]_\mathfrak{g}} \;=\; b_0 + \mu x.$$

Preuve. Similaire à celle du théorème 8.3.1. □

La réciproque du théorème 8.4.3 est donné par le théorème suivant.

Théorème 8.4.4 (Réciproque du théorème 8.4.3)**.** *Soit* $(\mathfrak{g}, \omega_{\mathfrak{g}})$ *une super-algèbre de Lie restreinte périplectique de type quasi-Frobenius. Supposons de plus que* $C(\mathfrak{g})_0 \neq \{0\}$*. Alors,* $(\mathfrak{g}, \omega_{\mathfrak{g}})$ *est obtenue comme une* D_1*-extension d'une super-algèbre de Lie restreinte périplectique de type quasi-Frobenius* $(\mathfrak{a}, \omega_{\mathfrak{a}})$*.*

Preuve. Soit x un élément non nul de $C(\mathfrak{g})_0$. Il a été montré dans [BM21] que les sous-espaces $\mathscr{K} := \mathrm{Vect}\{x\}$ et $\mathscr{K}^{\perp}$ sont des idéaux de $(\mathfrak{g}, \omega_{\mathfrak{g}})$. Puisque $\omega_{\mathfrak{g}}(x, x) = 0$, il s'en suit que $\mathscr{K} \subset \mathscr{K}^{\perp}$ et $\dim(\mathscr{K}^{\perp}) = \dim(\mathfrak{g}) - 1$. Ainsi, il existe $e \in \mathfrak{g}_1$ (car $(\mathscr{K}^{\perp})_0 = \mathfrak{g}_0$) tel que

$$\mathfrak{g} = \mathscr{K}^{\perp} \oplus \mathscr{K}^{*}, \quad \text{où } \mathscr{K}^{*} := \mathrm{Vect}\{e\}.$$

On peut normaliser e de telle sorte à ce que $\omega_{\mathfrak{g}}(e, x) = 1$. Définissons $\mathfrak{a} := (\mathscr{K} + \mathscr{K}^{*})^{\perp}$. on a alors une décomposition $\mathfrak{g} = \mathscr{K} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathscr{K}^{*}$.

On définit une forme périplectique sur $\mathfrak{a}$ par $\omega_{\mathfrak{a}} = \omega_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}}$. La forme $\omega_{\mathfrak{a}}$ est non dégénérée sur $\mathfrak{a}$. Il a été montré dans [BM21] que l'espace vectoriel $\mathfrak{a}$ peut être équipé d'une structure de super-algèbre de Lie, et il existe une structure périplectique sur $\mathfrak{a}$ telle que $\mathfrak{g}$ est sa double extension symplectique. La preuve se termine comme celle du théorème 8.3.4. □

8.5 Exemples de doubles extensions symplectiques

8.5.1 La super-algèbre de Lie $D^7_{q,-q}$ (pour $q \neq 0, 1$)

Considérons la super-algèbre de Lie $D^7_{q,-q}$, pour $q \neq 0, 1$, (voir [BN78]) où les crochets non nuls sont donnés sur la base $e_1, e_2 \mid e_3, e_4$ (pair | impair) par

$$[e_1, e_2] = e_2, \quad [e_1, e_3] = qe_3, \quad [e_1, e_4] = -qe_4,$$

Il a été montré dans [BM21] que cette super-algèbre de Lie est orthosymplectique de type quasi-Frobenius, avec la forme donnée par

$$\omega = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*.$$

Il existe une $p|2p$-opération sur $D^7_{q,-q}$ donnée par $e_1^{[p]} = e_1$ et $e_2^{[p]} = 0$. Considérons les super-dérivations extérieures

$$D_1 = e_3 \otimes e_3^* \text{ et } \quad D_2 = e_4 \otimes e_4^*.$$

Ces deux dérivations sont restreintes et vérifient $D_1^* = D_2$. De plus, on a

$$D_1^2 + 2D_1 \circ D_1^* + D_1^* \circ D_1^* + \lambda(D_1 + D_1^*) = (\lambda + 1)(e_3 \otimes e_3^* + e_4 \otimes e_4^*).$$

Le cocycle (Ω, T) (voir théorème 8.3.1) est un cobord si et seulement si $\lambda = -1$. Dans ce cas, $\Omega \equiv 0$ et $C = e_3^* \wedge e_4^*$. Choisissons $Z_\Omega = ue_2$, avec $u \in \mathbb{F}$. On a alors $P(e_1) = u$ et $P(e_2) = 0$. En outre,

$$a_0 = 0, \quad \tilde{\lambda} = 0, \quad \gamma = 1, \quad b_0 = 0, \quad \sigma = 0.$$

8.5.2 La super-algèbre de Lie $C_1^1 + A$

Considérons la super-algèbre de Lie $C_1^1 + A$ (voir [BN78]) avec le crochet donné dans la base $e_1, e_2 \mid e_3, e_4$ (pair | impair) par

$$[e_1, e_2] = e_2, \quad [e_1, e_3] = e_3, \quad [e_3, e_4] = e_2.$$

Il a été montré dans [BM21] que cette super-algèbre de Lie est orthosymplectique de type quasi-Frobenius avec la forme donnée par

$$\omega = e_1^* \wedge e_2^* - e_3^* \wedge e_4^*.$$

La $p|2p$-opération est donnée par $e_1^{[p]} = e_1$, $e_2^{[p]} = 0$. Considérons la super-dérivation extérieure impaire donnée par

$$D = e_1 \otimes e_4^* + e_3 \otimes e_2^*.$$

On a $D^* = -D$. Ainsi, le cocyle $(C, \Delta) = (0, 0)$ (voir théorème 8.3.4). En outre, puisque $C(\mathfrak{g}) = 0$, la condition $D^2 = \mathrm{ad}_{a_0} = 0$ implique que $a_0 = 0$.

8.5.3 La super-algèbre de Lie D^5

Considérons la super-algèbre de Lie D^5 (voir [BN78]) dont le crochet est donné dans la base $e_1, e_2, | \, e_3, e_4$ (pair | impair) par

$$[e_1, e_3] = e_3, \quad [e_1, e_4] = e_4, \quad [e_2, e_4] = e_3.$$

Il a été montré dans [BM21] que cette super-algèbre de Lie est périplectique de type quasi-Frobenius avec la forme donnée par

$$\omega = e_1^* \wedge e_3^* + e_2^* \wedge e_4^*.$$

La $p|2p$-opération est donnée par $e_1^{[p]} = e_1$ et $e_2^{[p]} = 0$. Considérons la super-dérivation extérieure paire donnée par

$$D = e_2 \otimes e_2^* - e_4 \otimes e_4^*.$$

On a alors $D^* = -D$, et $D^p = D$, donc $\gamma = 1$ et $a_0 = 0$ (voir théorème 8.4.1 pour les définitions). Ainsi, $\Omega = C = 0$. On peut ensuite prendre pour λ un scalaire satisfaisant l'équation $\lambda^p - \lambda = 0$, et $Z_\Omega = 0$.

8.5.4 La super-algèbre de Lie $(2A_{1,1} + 2A)^2_{1/2}$

Considérons la super-algèbre de Lie $(2A_{1,1} + 2A)^2_{1/2}$ (voir [BN78]) dont le crochet est donné dans la base $e_1, e_2, | \, e_3, e_4$ (pair | impair) par

$$[e_3, e_3] = e_1, \quad [e_4, e_4] = e_2, \quad [e_3, e_4] = \frac{1}{2}(e_1 + e_2).$$

Il a été montré dans [BM21] que cette super-algèbre de Lie est périplectique quasi-Frobenius avec la forme donnée par

$$\omega = e_2^* \wedge e_3^* - e_1^* \wedge e_4^*.$$

On peut définir une $p|2p$-opération par $e_i^{[p]} = u_i e_1 + v_i e_2$, où u_i et v_i sont des scalaires, pour $i = 1, 2$.

Considérons la super-dérivation extérieure impaire $D = e_2 \otimes e_3^*$. On a alors $D^* = D$. Ainsi, $\Omega = \Delta = C = P = 0$ (voir théorème 8.4.3). On a de plus $a_0 = 0$, alors que $b_0 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ est quelconque.

8.5.5 L'algèbre de Witt $W(1)$ pour $p > 3$

Rappelons que l'algèbre de Witt $W(1)$ (voir section 5.1.2) est engendrée par les générateurs (pairs) $e_{-1}, e_0, ..., e_{p-2}$ et équipée du crochet

$$[e_i, e_j] = \begin{cases} (j-i)e_{i+j} & \text{if } \ i+j \in \{-1, ..., p-2\}; \\ 0 \ \text{ sinon.} \end{cases}$$

Soit ω une forme bilinéaire antisymétrique sur $W(1)$, donnée par

$$\omega = \sum_{i,j=-1}^{p-2} \lambda_{i,j} e_i^* \wedge e_j^*, \quad \lambda_{i,j} \in \mathbb{F}.$$

Supposons de plus que ω est un 2-cocycle. On a alors

$$\omega(e_k, [e_i, e_j]) + \omega(e_j, [e_k, e_i]) + \omega(e_i, [e_j, e_k]) = 0. \tag{8.34}$$

Montrons que toute forme bilinéaire antisymétrique sur $W(1)$ satisfaisant l'équation (8.34) est dégénérée. Supposons que i, j, k sont tels que $i+j, i+k, j+k \in \{-1, ..., p-2\}$. On a alors

$$\begin{aligned} (8.34) &\iff \omega(e_k, (j-i)e_{i+j}) + \omega(e_j, (i-k)e_{i+k}) + \omega(e_i, (k-j)e_{j+k}) = 0 \\ &\iff (j-i)\lambda_{k,i+j} + (i-k)\lambda_{j,i+k} + (k-j)\lambda_{i,j+k} = 0. \end{aligned} \tag{8.35}$$

Si on prend $k = 0$ dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$(j-i)\lambda_{0,i+j} + (i+j)\lambda_{i,j} = 0. \tag{8.36}$$

En prenant $i = 0$, l'équation précédente se réduit à

$$\lambda_{0,j} = 0, \ \forall j \in \{-1, ..., p-2\},$$

Cela signifie qu'il y a une ligne de la matrice de ω qui ne comporte que des zéros. Ainsi, ω est dégénérée.

8.5.6 La super-algèbre de Lie $K^{2,m}$, m impair

La super-algèbre de Lie $K^{2,m}$, m impair (voir [GKN04]) est engendrée par les générateurs $x_0, x_1 \mid y_1, \ldots, y_m$ (pair | impair), avec les crochets non nuls donnés par

$$\begin{array}{rclcll} [x_0, y_i] & = & -[y_i, x_0] & = & y_{i+1}, & i \leq m-1, \\ [y_i, y_{m+1-i}] & = & [y_{m+1-i}, y_i] & = & (-1)^{i+1} x_1, & 1 \leq i \leq \frac{m+1}{2}. \end{array}$$

Dans [GKN04], les auteurs ont montré qu'une super-algèbre de Lie de dimension $n|m$ a un nilindice maximal $n+m-1$ uniquement lorsque $n = 2$ et m est impair. De plus, pour tout m impair, il n'y a qu'une super-algèbre ayant cet indice maximal, qui est $K^{2,m}$.

Proposition 8.5.1.

(i) Pour tout $m \geq 3$, la super-algèbre de Lie $K^{2,m}$ n'est pas périplectique de type quasi-Frobenius.

(ii) $K^{2,m}$ *est orthosymplectique de type quasi-Frobenius si et seulement si* $m = 0 \mod (p)$. *De plus, si* $m = 0 \mod (p)$*, la forme est donnée par*

$$x_0^* \wedge x_1^* - \frac{1}{2}\, y_1^* \wedge y_1^* - \frac{1}{2}\,(-1)^{\frac{m+3}{2}}\, y^*_{\frac{m+1}{2}} \wedge y^*_{\frac{m+3}{2}} - \sum_{1 \leq i \leq \frac{m-3}{2}} i\,(-1)^{i+1}\, y^*_{i+1} \wedge y^*_{m+1-i}.$$

Preuve. Pour le point (i), supposons que $K^{2,m}$ est périplectique de type quasi-Frobenius. la condition de 2-cocycle appliquée à la forme périplectique ω sur les éléments $\{x_0, x_1, y_i\}$ donne

$$0 = \omega(x_0, [x_1, y_i]) + \omega(y_i, [x_0, x_1]) + \omega(x_1, [y_i, x_0]) = 0 + 0 - \omega(x_1, y_{i+1}), \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m-1.$$

De même, la condition appliquée aux éléments $\{y_1, y_2, y_{m-1}\}$ donne $\omega(x_1, y_1) = 0$. Mais puisque ω est supposée impaire, on a $\omega(x_1, v) = 0$ pour tout $v \in K^{2,m}$. Ainsi, ω est dégénérée, ce qui est une contradiction.

Pour le point (ii), supposons que ω est orthosymplectique. Dans ce cas, puisque ω paire, on ne vérifiera la condition de 2-cocycle que sur les triplets $\{x_0, y_i, y_i\}$ et $\{x_0, y_i, y_j\}$ pour $i < j$. Écrivons [1]

$$\omega = \alpha\, x_0^* \wedge x_1^* - \sum_{i,j} \alpha_{i,j}\, y_i^* \wedge y_j^*.$$

Le cas $\{x_0, y_i, y_i\}$. Pour $i \leq \frac{m+1}{2}$, la condition de 2-cocycle est équivalente à

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\,(-1)^{\frac{m+3}{2}}\, \alpha_{\frac{m+1}{2},\frac{m+3}{2}} && \text{si} \quad i = \tfrac{m+1}{2}, \\ \alpha_{i,i+1} &= 0 && \text{si} \quad i < \tfrac{m+1}{2}. \end{aligned} \tag{8.37}$$

De plus, si $i > \frac{m+1}{2}$ la condition de 2-cocycle est équivalente à

$$\alpha_{i,i+1} = 0 \quad \text{pour} \quad \frac{m+1}{2} < i < m. \tag{8.38}$$

Le cas $\{x_0, y_i, y_j\}$, avec $i < j$. Si $1 \leq i \leq \frac{m+1}{2}$ et $j = m+1-i$, la condition de 2-cocycle implique que

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_{m,2} && \text{si} \quad i = 1, \\ (-1)^{i+1}\alpha - \alpha_{m+1-i,i+1} - \alpha_{i,m+2-i} &= 0 && \text{si} \quad 1 < i < \tfrac{m+1}{2}. \end{aligned} \tag{8.39}$$

D'autre part, si $j \neq m+1-i$, la condition de 2-cocycle est équivalente à

$$\begin{aligned} \alpha_{m,i+1} &= 0 \quad \text{si} \quad j = m, \text{ et } i \neq 1, \\ \alpha_{j,i+1} + \alpha_{i,j+1} &= 0 \quad \text{si} \quad 1 \leq i \leq \tfrac{m+1}{2}, \text{ et } j \neq m. \end{aligned} \tag{8.40}$$

Si $i > \frac{m+1}{2}$, la condition de 2-cocycle est équivalente à

$$\begin{aligned} \alpha_{m,i} &= 0 \quad \text{si} \quad j = m, \\ \alpha_{j,i+1} + \alpha_{i,j+1} &= 0 \quad \text{si} \quad \tfrac{m+1}{2} < i < j < m. \end{aligned} \tag{8.41}$$

1. Par convention, $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ et $e_i^* \otimes e_j^*(e_k \otimes e_l) = (-1)^{|e_k||e_j|} e_i^*(e_k) e_j^*(e_l)$.

En combinant les équations (8.37) et (8.39) on obtient $m\alpha = 0$. Si $m \neq 0 \mod (p)$, alors $\alpha = 0$ et la forme ω sera dégénérée. Si $m = 0 \mod (p)$, le système d'équations donné par (8.37)–(8.41) admet des solutions. Choisissons $\alpha_{\frac{m+1}{2},\frac{m+3}{2}} = \frac{1}{2}(-1)^{\frac{m+3}{2}}$, ainsi $\alpha = 1$. Les équations (8.39) impliquent que $\alpha_{m+1-i,i+1} = i(-1)^{i+1}$ pour $i = 1, \dots \frac{m-1}{2}$. Il ne reste qu'a prendre $\alpha_{1,1} = \frac{1}{2}$ et les autres coefficients triviaux pour construire une forme non dégénérée. □

Proposition 8.5.2. $K^{2,m}$ *est restreinte si et seulement si* $m \leq p$. *La* $p|2p$*-opération est alors donnée par*

$$x_0^{[p]} = s_1 x_1, \quad x_1^{[p]} = s_2 x_1, \text{ où } s_1, s_2 \in \mathbb{F}.$$

Preuve. Tout d'abord, notons que la partie paire de $K^{2,m}$ est abélienne. Écrivons $x_1^{[p]} = s_2 x_1 + \tilde{s}_2 x_0$. La condition $[x_1^{[p]}, y_i] = \mathrm{ad}_{x_1}^p(y_i)$ implique que $\tilde{s}_2 = 0$. Ainsi, $x_1^{[p]} = s_2 x_1$. En outre, écrivons $x_0^{[p]} = s_1 x_1 + \tilde{s}_1 x_0$. La condition $[x_0^{[p]}, y_i] = \mathrm{ad}_{x_0}^p(y_i)$ implique que $\tilde{s}_1 y_{i+1} = y_{p+i}$ pour $i < m$. Cette condition implique que $p + i > m$, pour tout $i < m$, et $\tilde{s}_1 = 0$. □

Dans la suite supposons que la $p|2p$-opération est donnée par

$$x_0^{[p]} = 0, \quad x_1^{[p]} = x_1.$$

On va lister quelques super-dérivations extérieures et étudier les doubles extension symplectiques obtenues avec ces super-dérivations

Une super-dérivation inadaptée. Considérons la super-dérivation extérieure donnée par

$$D = x_1 \otimes x_1^* - \frac{p-1}{2} \sum_{1 \leq i \leq p} y_i \otimes y_i^*.$$

On a $D(x_1^{[p]}) = D(x_1) = x_1 \neq \mathrm{ad}_{x_1}^{p-1} \circ D(x_1) = 0$. On en déduit que cette super-dérivation n'est pas restreinte, elle n'est donc pas adaptée pour construire une double extension.

Une super-dérivation conduisant à une extension triviale. Considérons la super-dérivation extérieure donnée par

$$D = x_1 \otimes x_0^*.$$

Elle est restreinte et vérifie $D^* = -D$. Ainsi, le cocycle C du lemme 8.2.13 et l'application Ω de la section 8.3.1 sont identiquement nuls. Les conditions du théorème 8.3.1 sont satisfaites. On peut choisir

$$a_0 = 0, \quad \lambda = 0, \quad \gamma = 0, \quad b_0 = 0, \quad \sigma = 0, \quad Z_\Omega = 0, \quad P \equiv 0.$$

Une super-dérivation conduisant à une extension non triviale. Considérons la super-dérivation extérieure donnée par

$$D = y_{p-1} \otimes y_1^* + y_p \otimes y_2^*.$$

Elle est restreinte et vérifie

$$D^* = y_p \otimes y_2^* - 2y_1 \otimes y_3^*.$$

Il s'en suit que

$$D^2 + 2D^* \circ D + D^{*2} + \lambda(D + D^*) = \lambda y_{p-1} \otimes y_1^* + 2\lambda y_p \otimes y_2^* - 2\lambda y_1 \otimes y_3^*.$$

L'application Ω définie à la section 8.3.1 a la forme suivante (on omet les termes nuls) :

$$\Omega(y_1, y_3) = -2\lambda, \quad \Omega(y_2, y_2) = 2\lambda.$$

Le cas $p = 3$: Dans ce cas, le cocyle C est donné par

$$C = \frac{1}{2}\, y_1^* \wedge y_3^* + y_2^* \wedge y_2^*.$$

L'application Ω est un cobord de la cohomologie ordinaire, donc $\Omega = d^1_{\mathrm{CE}}\phi$ avec $\phi = \lambda\, x_1^*$. Choisissons (voir théorème 8.3.1)

$$Z_\Omega = \lambda x_0, \quad \text{et} \quad P(a) = x_1^*\left(a^{[p]}\right) \text{ pour } a \in K_0^{2,3}.$$

D'autre part : (voir théorème 8.3.1)

$$\gamma = \lambda^{p-1}, \quad a_0 = -\gamma x_0, \quad \tilde{\lambda} = 0, \quad b_0 = x_1, \quad \sigma = 1.$$

Le cas $p > 3$: Dans ce cas, le cocyle C est donné par

$$C = 2\, y_1^* \wedge y_3^* - 2\, y_2^* \wedge y_2^*.$$

L'application Ω n'est pas un cobord, sauf si $\lambda = 0$, où il devient trivial. Dans ce cas, on peut choisir

$$\gamma = 0, \quad b_0 = 0, \quad a_0 = x_1, \quad Z_\Omega = x_1.$$

8.5.7 La super-algèbre de Lie $K^{2,m}$, m pair

Si m est pair, la super-algèbre de Lie $K^{2,m}$ (voir [GKN04]) est engendrée par les générateurs $x_0, x_1 \mid y_1, \dots y_m$ (pair | impair), avec les crochets non nuls donnés par

$$\begin{array}{rclcll} [x_0, y_i] & = & -[y_i, x_0] & = & y_{i+1}, & 1 \le i \le m-1, \\ [y_i, y_{m-i}] & = & [y_{m-i}, y_i] & = & (-1)^{(m-2i)/2} x_1, & 1 \le i \le \frac{m}{2}. \end{array}$$

Il a été montré dans [GKN04] que la super-algèbre $K^{2,m}$ a un nilindice maximal m.

La super-algèbre $K^{2,m}$, avec m pair, est restreinte si et seulement si $m \le p$. Dans ce cas, la $p|2p$-opération est donnée par

$$x_0^{[p]} = s_1 x_1, \quad x_1^{[p]} = s_2 x_1, \text{ où } s_1, s_2 \in \mathbb{K}.$$

La preuve est similaire au cas m impair.

Proposition 8.5.3.

(i) Pour tout $m \ge 2$, la super-algèbre de Lie $K^{2,m}$ est périplectique de type quasi-Frobenius si et seulement si $p = 3$. Dans ce cas, la forme est donnée par

$$\omega = x_0^* \wedge y_2^* + x_1^* \wedge y_1^*.$$

(ii) Pour tout $m \ge 2$, la super-algèbre de Lie $K^{2,m}$ est orthosymplectique de type quasi-Frobenius si et seulement si $m < p$. Dans ce cas, la forme ω est donnée par

$$\omega = \sum_{i=1}^{m/2} \alpha_i\, y_i^* \wedge y_{m-i+1}^* + 2\, x_0^* \wedge x_1^*,$$

où $\alpha_i = (-1)^{\frac{m}{2}-i+1}(m - 2i + 1)$.

Une super-dérivation conduisant à une extension non triviale. Considérons la dérivation extérieure donnée par
$$D = x_1 \otimes x_0^*.$$

Cette dérivation est paire et restreinte. De plus, elle a la p-propriété (voir équation (8.3)) en prenant $\gamma = 0$ et $a_0 = l_1 x_1,\ l_1 \in \mathbb{F}$. Puisque γ est nul, il n'y a que le cas (iib) du théorème 8.3.1 à considérer. Des calculs directs montrent que $D^2 = 0$ et que $D^* = -D$. Il s'en suit que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} \sigma_i^{\mathfrak{a}}(a,b) = 0$ (voir équation 8.10)), que (C, P) est un 2-cocycle restreint, et que les applications Ω et T définies à la section 8.3.1 sont identiquement nulles. Puisque (Ω, T) est un 2-cobord restreint, on choisit $Z_\Omega = tx_1 + sy_m,\ t, s \in \mathbb{F}$, pour obtenir

$$0 = \omega(Z_\Omega, [a,b]) \ \text{ et } 0 = \omega\left(Z_\Omega, \tilde{a}^{[p]}\right),\ a, b \in K^{2,m},\ \tilde{a} \in K^{2,m}_{\bar{0}}.$$

Les conditions du théorème 8.3.1 sont satisfaites et on peut alors choisir $b_0 = l_2 x_1,\ l_2 \in \mathbb{F}$ et $\sigma \in \mathbb{F}$ arbitraire pour construire une double extension non triviale.

Bibliographie

[AM14] S. Aissaoui, A. Makhlouf, *On classification of finite-dimensional superbialgebras and Hopf superalgebras*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **10** (2014), paper 001, 24pp.

[AM10] F. Ammar, A. Makhlouf, *Hom-Lie superalgebras and Hom-Lie admissible superalgebras*, J. Algebra **324** (2010), no.7, 1513–1528.

[ACZ09] A. Armour , H-X. Chen, Y. Zhang *Classification of 4-Dimensional Graded Algebras*, Comm. Algebra **37** (2009), no. 10, 3697–3728.

[BB86] B. Binegar, *Cohomology and Deformations of Lie Superalgebras*, Lett. Math. Phys. **12**, (1986), no. 4, 301-308.

[BB99] H. Benamor, S. Benayadi , *Double extension of quadratic Lie superalgebras.* Comm. Algebra **27** (1) (1999), 67–88.

[BB16] I. Bajo, S. Benayadi , *Abelian para-Kähler structures on Lie algebras*, Differential Geom. Appl. **29** (2011), 160–173.

[BB18] S. Benayadi, S. Bouarroudj, *Double Extensions of Lie superalgebras in characteristic 2 with non-degenerate invariant supersymmetric bilinear forms*, J. Algebra **510** (2018), 141–179.

[BB23] S. Benayadi, S. Bouarroudj, *Manin triples and non-degenerate anti-symmetric bilinear forms on Lie superalgebras in characteristic* 2, J. Algebra **614** (2023) 199–250.

[BBH20] S. Benayadi, S. Bouarroudj, M. Hajli, *Double extensions of restricted Lie (super)algebras*, Arnold Math. J. **6** (2020), 231–269.

[BC16] O. Baues, V. Cortés, *Symplectic Lie groups I-III, Symplectic Reduction, Lagrangian extensions, and existence of Lagrangian normal subgroups*, Astérique **379**, Société mathématique de France (2016).

[BC23] C. Brouder, *Communication personelle*, Restaurant du CIRM, entre le fromage et le dessert, avril 2023.

[BEM23] S. Bouarroudj, Q. Ehret, Y. Maeda, *Symplectic double extensions for restricted quasi-Frobenius Lie (super)algebras*, `arXiv:2301.12385` (2023).

[BF78] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, *Deformation Theory and Quantization I & II*, Ann. Physics **111** (1978), no. 1, 61-151.

[BGL09] S. Bouarroudj, P. Grozman, D. Leites, *Classification of Finite Dimensional Modular Lie Superalgebras with Indecomposable Cartan Matrix*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **5** (2009), Paper 060, 63 pp.

[BKLS18] S. Bouarroudj, A. Krutov, D. Leites, I. Shchepochkina, *Non-degenerate invariant (super)symmetric bilinear forms on simple Lie (super)algebras.* Algebr. Represent. Theory. **21** (2018), no 5, 897–941.

[BKLLS18] S. Bouarroudj, A. Krutov, A. Lebedev, D. Leites, I. Shchepochkina, *Restricted simple Lie (super)algebras in characteristic* 3. Funktsional. Anal. Prilozhen. **52** (1), (2018) 61–64 ; (in Russian ; English translation : Restricted Lie (super)algebras in characteristic 3. Funct. Anal. Appl. **52** (1), (2018) 49–52).

[BLLS15] S. Bouarroudj, A. Lebedev, D. Leites, I. Shchepochkina, *Lie algebras deformations in characteristic 2*, Math. Res. Lett. **22** (2015), no. 2, 353–402.

[BLLS21] S. Bouarroudj, A. Lebedev, D. Leites, I. Shchepochkina, *Classifications of simple Lie superalgebras in characteristic 2*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2023), no. 1, 54–94.

[BK70] F. A. Berezin, G. I. Kats, *Lie groups with commuting and anticommuting parameters,*, Mat. Sb. (NS) **82** (**124**) (1970), 343-359 (en russe).

[BM21] S. Bouarroudj, Y. Maeda, *Double and Lagrangian extensions for quasi-Frobenius Lie superalgebras*, https ://doi.org/10.1142/S0219498824500014 ; `arXiv:2111.00838`.

[BM22] S. Bouarroudj, A. Makhlouf, *Hom-Lie superalgebras in characteristic 2*, `arXiv:2210.08986`, (2022).

[BN78] N. Backhouse, *A classification of four-dimensional Lie superalgebras*, J. Math. Phys. **19** (1978), 2400.

[BP89] H. Ben Amor, G. Pinczon, *The graded Lie algebra structure of Lie superalgebra deformation theory*, Lett. Math. Phys. **18** (1989), no. 4, 307–313.

[BS99] D. Burde, C. Steinhoff, *Classification of orbit closure of 4-dimensional complex Lie algebras*, J. Algebra, **214** (1999), no. 2, 729–739.

[BS03] S. Benayadi, *Socle and some invariants of quadratic Lie superalgebras.* J. Algebra **261** (2003), no. 2, 245–291.

[BYZ17] Y. H. Bao, Y. Ye, J. J. Zhang, *Restricted Poisson Algebras*, Pacific J. Math. **289** (2017), No 1, 1–34 .

[CCGN20] R. Catenacci, C.A. Cremonini, P.A. Grassi, S. Noja *Cohomology of Lie Superalgebras : Forms, Integral Forms and Coset Superspaces* `arXiv:2012.05246v2`.

[CLP05] J. M. Casas, M. Ladra, T. Pirashvili *Triple cohomology of Lie–Rinehart algebras and the canonical class of associative algebras*, J. Algebra **291** (2005), no. 1, 144-163.

[CE29] E. Cartan, *Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique **8** (1929), 181–225 .

[CE48] C. Chevalley, S. Eilenberg, *Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), 84-124.

[CGL18] J. L. Castiglioni, X. García-Martínez, M. Ladra, *Universal central extensions of Lie–Rinehart algebras*, J. Algebra Appl **17** (2018), No. 7, 1850134, 30pp.

[CJM11] J. M. Casas, *Obstructions to Lie-Rinehart algebra Extensions*, Algebra Colloq. **18** (2011), no.1, 83–104.

[CS95] S. Chemla, *Operations for modules on Lie-Rinehart superalgebras*, Manuscripta Math. **87** (1995), no. 2, 199–223.

[CM08] M. Crainic, I. Moerdijk, *Deformations of Lie brackets : cohomological aspects*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **10** (2008), no. 4, 1037–1059.

[CP15] P. J. Clavier, *Analytical and Geometric approches of non-perturbative Quantum Field Theories*, PhD Thesis, `arXiv:1511.09190` (2015).

[CV22] V. Callet, *Persistent Homology on Musical Bars.* Mathematics and computation in music, 349–355. Lecture Notes in Comput. Sci., 13267. Lecture Notes in Artificial Intelligence. Springer, Cham (2022).

[DI12] I. Dokas, *Cohomology of restricted Lie-Rinehart algebras and the Brauer group*, Adv. Math. **231** (2012) no.5, 2573–2592.

[EA83] A. G. Elashvili, *Frobenius Lie algebras*, Funct. Anal. Appl. **16** (4) (1982), 326–328.

[EF02] T. J. Evans, D. Fuchs, *On the Restricted Lie Algebra Structure of the Witt Lie Algebra in Finite Characteristic*, Funct. Anal. Appl. **36**, (2002) no. 2, 140–144 .

[EF08] T. J. Evans, D. Fuchs, *A complex for the cohomology of restricted Lie algebras*, J. Fixed Point Theory Appl. **3** (2008), no. 1, 159-179.

[EFP16] T. J. Evans, A. Fialowski, M. Penkava, *Restricted Cohomology of Modular Witt Algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **144** (2016), no. 5, 1877-1886.

[EF19] T. J. Evans, A. Fialowski, *Restricted One-dimensional Central Extensions of the Restricted Filiform Lie Algebras* $\mathfrak{m}_0^\lambda(p)$, Linear Algebra Appl. **565** (2019), 244-257.

[EF22] T. J. Evans, A. Fialowski, *Central Extensions of Restricted Affine Nilpotent Lie Algebras* $\mathfrak{n}_+(A_1^{(1)})(p)$, J. Lie Theory **33** (2023), no. 1, 195–215.

[EM22] Q. Ehret, A. Makhlouf, *On Deformations and Classification of Lie-Rinehart Superalgebras*, Communications in Mathematics **30** (2022), no. 2, 67–92.

[EM23] Q. Ehret, A. Makhlouf, *Deformations and Cohomology of restricted Lie-Rinehart algebras in positive characteristic*, `arXiv:2305.16425v1`.

[ET00] T. J. Evans, *Cohomology of restricted Lie algebras*, Thesis (Ph.D.)–University of California, Davis ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2000. 78 pp. **ISBN :** 978-0599-94288-2.

[FD86] D. B. Fuks, *Cohomology of Infinite Dimensional Lie Algebras* Contemp. Soviet Math. Consultants Bureau, New York, 1986. xii+339 pp. **ISBN :** 0-306-10990-5.

[FR96] R. Farnsteiner, *Note on Frobenius extensions and restricted Lie superalgebras.* J. Pure Appl. Algebra **108** (1996), no.3, 241–256.

[FM19] M. Fischer, *Symplectic Lie algebras with degenerate center*, J. Algebra **521** (2019), 257–283.

[FSW13] J. Feldvoss, S. Siciliano, T. Weigel, *Outer restricted derivations of nilpotent restricted Lie algebras.* Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), no. 1, 171–179.

[GKN04] J. R. Gòmez, Y. Khakimdjanov , R. M. Navarro , *Some problems concerning to nilpotent Lie superalgebras.* J. Geom. Phys. **51** (2004), no. 4, 473–486.

[GM64] M. Gerstenhaber, *On the deformation of rings and algebras*, Ann. of Math. (2) **79** (1964), 59–103.

[GP74] P. Gabriel, *Finite representation type is open*, Proceedings of the International Conference on Representations of Algebras (Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1974), Paper No. 10, 23 pp. Carleton Math. Lecture Notes, No. 9, Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1974.

[GP23] P. Guillot, *Leçons sur l'homologie et le groupe fondamental.* Cours Spéc., 29 Société Mathématique de France, Paris, [2022], ©2022. xiv+314 pp. **ISBN :** 978-2-85629-965-4.

[HG54] G. Hochschild, *Cohomology of restricted Lie algebras*, Amer. J. Math., **76** (1954), 555–580.

[HG55.1] G. Hochschild, *Simple algebras with purely inseparable splitting fields of exponent 1*, Trans. Amer. Math. Soc. **79** (1955), 477–489.

[HG55.2] G. Hochschild, *Restricted Lie algebras and simple associative algebras of characteristic p*, Trans. Amer. Math. Soc. **80** (1955), 135–147.

[HJ53] J. Herz, *Pseudo-algebres de Lie*, C. R. Acad. Sci. Paris **236** (1953), 1935-1937.

[HJ78] J. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and Representation Theory*, Second printing, revised Graduate Texts in Mathematics, 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978. xii+171 pp. **ISBN :** 0-387-90053-5.

[HJ90] J. Huebschmann, *Poisson cohomology and quantization*, J. Reine Angew. Math. **408** (1990), 57–113.

[HJ98] J. Huebschmann, *Lie-Rinehart algebras, Gerstenhaber algebras and Batalin-Vilkovisky algebras,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **48** (1998), no.2, 425–440.

[HJ21] J. Huebschmann, *On the history of Lie brackets, crossed modules and Lie-Rinehart algebras* J. Geom. Mech. **13** (2021), no.3, 385–402.

[HLS06] J. T. Harwig, D. Larsson, S. D. Silvestrov , *Deformations of Lie algebras using σ-derivations,* J. Algebra **295** (2006), no.2, 314–361.

[JJ04] J. C. Jantzen, *Representations of Lie algebras in positive characteristic,* Representation theory of algebraic groups and quantum groups, 175–218. Adv. Stud. Pure Math., 40. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004. **ISBN :** 4-931469-25-6.

[JN37] N. Jacobson, *Abstract derivation and Lie algebras,* Trans. Amer. Math. Soc. **42** (1937), no. 2, 206-224.

[JN41] N. Jacobson, *Restricted Lie algebras of characteristic p,* Trans. Amer. Math. Soc. **50** (1941), 15–25.

[JN62] N. Jacobson, *Lie algebras,* Republication of the 1962 original Dover Publications, Inc., New York, 1979. ix+331 pp. **ISBN :** 0-486-63832-4.

[KQS10] S. Krippendorf, F. Quevedo, O. Schlotterer, *Cambridge Lectures on Supersymmetry and Extra Dimensions,* `arXiv:1011.1491`.

[KV77] V. G. Kac, *Lie superalgebras,* Advances in Math. **26** (1977), no.1, 8—96.

[LA10] A. Lebedev, *Analogs of the orthogonal, Hamiltonian, Poisson, and contact Lie superalgebras in characteristic 2,* J. Nonlinear Math. Phys. **17** (2010), suppl. 1, 217–251.

[LD75] D. A. Leites, *Cohomology of Lie Superalgebras,* Funkcional. Anal. i Priložen. **9** (1975), no.4, 75–76.

[MD96] A. Medina, J. M. Dardié , *Double extension symplectique d'un groupe de Lie symplectique*, Adv. Math. **117** (1996), no.2, 208—227.

[MK87] K. Mackenzie, *Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometry*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 124 Cambridge University Press, Cambridge, 1987. xvi+327 pp. **ISBN :** 0-521-34882-X.

[MJP66] J. P. May, *The cohomology of restricted Lie algebras and of Hopf algebras*, J. Algebra **3** (1966), 123-146.

[MM20] A. Mandal, S. K. Mishra, *Deformations of hom-Lie-Rinehart algebras,* Comm. Algebra **48** (2020), no. 4, 1653–1670.

[MR85] A. Medina, P. Revoy, *Algèbres de Lie et produit scalaire invariant.* Ann. Sci. École. Norm. Sup. (4) **18** (1985), no. 3, 553–561.

[MR92] A. Medina, P. Revoy, *Groupes de Lie à structure symplectique invariante*, Séminaire Gaston Darboux de Géométrie et Topologie Différentielle, 1990–1991 (Montpellier, 1990–1991), iii, 77–85. Université Montpellier II, Département des Sciences Mathématiques, Montpellier, 1992.

[MA07] A. Makhlouf, *A Comparison of Deformations and Geometric Study of Varieties of Associative Algebras*, Int. J. Math. Math. Sci.(2007), Art. ID 18915, 24 pp.

[MS08] A. Makhlouf, S. Silvestrov, *Hom-algebra Structures*, J. Gen. Lie Theory Appl. **2** (2008), no.2, 51-–64.

[NR66] A. Nijenhuis, N. W. Richardson Jr, *Cohomology and deformations in graded Lie algebras*, Bull. Amer. Soc. **72** (1966), 1–29.

[NR67] A. Nijenhuis, N. W. Richardson Jr, *Deformations of Lie algebra structures*, J. Math. Mech. **17** (1967), 89-–105.

[OI80] I. O. Ooms, *On Frobenius Lie algebras*, Comm. Algebra **8** (1980) no. 1, 13–52.

[PN02] N. Poncin, *Quantification par déformation* (in French), `https://orbilu.uni.lu/bitstream/10993/14270/1/archives.pdf`.

[PG21] M. P. Páez Guillán, *Restricted Lie (super) algebras, central extensions of non-associative algebras and some tapas*, PhD dissertation, 2021.

[PR61] R. Palais, *The Cohomology of Lie Rings*,Proc. Sympos. Pure Math., Vol. III, pp. 130–137 American Mathematical Society, Providence, R.I., 1961.

[PSTZ22] Y. Pei, Y. Sheng, R. Tang, K. Zhao, *Actions of Monoidal Categories and Representations of Cartan Type Lie Algebras*, J. Inst. Math. Jussieu, First View, (2022) pp. 1–36.

[PV92] V. M. Petrogradski, *Identities in the Enveloping Algebras for Modular Lie Superalgebra*, J. Algebra **145** (1992), no. 1, 1-12.

[RA07] A. Rogers, *Supermanifolds : Theory and Applications*,heory and applications World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2007. xii+251 pp. **ISBN :** 978-981-02-1228-5. **ISBN :** 981-02-1228-3.

[RD00] D. Rumynin, *Duality for Hopf Algebroids*, J. Algebra **223** (2000), no.1, 237-255.

[RE20] E. Remm, *Lie algebroids. Lie-Rinehart algebras*, 2020, `arXiv 2010.00927` (in French).

[RG63] G. S. Rinehart, *Differential form on general commutative algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 195–222.

[RC20] C. Roger, *About Lie-Rinehart superalgebras*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, **89** (2020), 186–197.

[RJ09] J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*,Second edition Universitext Springer, New York, 2009. xiv+709 pp. **ISBN :** 978-0-387-24527-0

[RMB23] S. de Rose, P. Meyer, F. Bertrand, *Human Body Shapes Anomaly Detection and Classification Using Persistent Homology.*, Algorithms **16** (2023).

[SC15] B. Sun, L. Chen, *Restricted and quasi-toral restricted Lie-Rinehart algebras*, Open Math. **13** (2015), no.1, 518-–527.

[SF88] H. Strade, R. Farnsteiner, *Modular Lie Algebras and their Representations*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., 116 Marcel Dekker, Inc., New York, 1988. x+301 pp. **ISBN :** 0-8247-7594-5.

[SH98] H. Strade, *The Classification of the Simple Modular Lie Algebras : VI. Solving the final case*, Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), no.7, 2553—2628.

[SH04] H. Strade, *Simple Lie algebras over fields of positive characteristic. I. Structure theory*, De Gruyter Exp. Math., 38 Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2004. viii+540 pp. **ISBN :** 3-11-014211-2.

[SP16] P. Schauenburg, *A note on the restricted universal enveloping algebra of a restricted Lie-Rinehart Algebra*, Bull. Belg. Math. Soc., Simon Stevin 23, no 5, 769-777 (2016)

[SP22] P. Saracco, *Universal Enveloping Algebras of Lie–Rinehart Algebras as a Left Adjoint Functor*, Mediterr. J. Math. **19** (2022), no. 2, Paper No. 92, 19pp.

[SM79] M. Scheunert, *The theory of Lie superalgebras - an Introduction*, Lecture Notes in Mathematics, 716. Springer, Berlin, 1979. x+271 pp. **ISBN :** 3-540-09256-0.

[SU16] C. Schneider, H. Usefi, *The classification of p-nilpotent restricted Lie algebras of dimension at most* 4, Forum Math. **28** (2016), no.4, 713–727.

[SZ10] B. Shu, C. Zhang , *Restricted representations of the Witt superalgebras.* J. Algebra **324** (2010), no. 4, 652–672.

[UH13] H. Usefi, *Lie identities on enveloping algebras of restricted Lie superalgebras.* J. Algebra **393** (2013), 120–131.

[VL15] L. Vitagliano, *Representations of homotopy Lie-Rinehart algebras*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **158** (2015), no. 1, 155–191.

[WC94] C. A. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra* ,Cambridge Stud. Adv. Math., 38 Cambridge University Press, Cambridge, 1994. xiv+450 pp. **ISBN :** 0-521-43500-5 **ISBN :** 0-521-55987-1.

[WP17] P. Woit, *Quantum Theory, Groups and Representations, An Introduction*, Springer, Cham, 2017. xxii+668 pp. **ISBN :** 978-3-319-64610-7 **ISBN :** 978-3-319-64612-1

[YCC20] J. Yuan, L. Chen, Y. Cao, *Restricted cohomology of restricted Lie superalgebras*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **38** (2022), no.11, 2115–2130.

[YY14] Y. Yu-Feng, *On representations of restricted Lie superalgebras.* Czechoslovak Math. J. **64 (139)** (2014), no.3, 845-–856.

[Z09] C. Zhang , *On the simple modules for the restricted Lie superalgebra* $sl(n|1)$, J. Pure Appl. Algebra **213** (2009), no. 5, 756—765.