Méthodes Adaptatives pour les Problèmes de Discontinuité

Thomas Jacumin (avec Andreas Langer)

Université de Lund

1er Juillet 2023

Organisation

Organisation

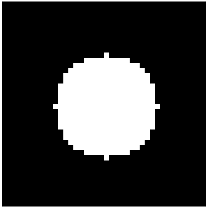
1. Introduction
2. La Variation Totale
3. Application aux Images

Objectif : débruiter et déflouter une image $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to [0,1]$:

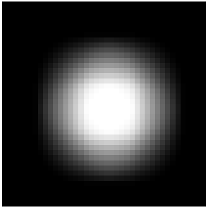
$$f = \mathcal{N}(K\hat{u}),$$

où

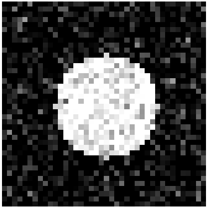
- $\mathcal{N}$ représente le bruit,
- K est un opérateur linéaire borné (flou),
- $\hat{u} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ est l'image originale (inconnue).



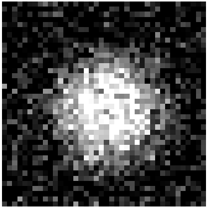
(a) Originale.



(b) Floutée.



(c) Bruitée.



(d) Floutée et bruitée.

Méthode générale :

Problem

$$\min_u \mathcal{D}(Ku, f) + \mathcal{R}_\alpha(u),$$

avec

- $\mathcal{D}$ le terme de fidélité des données,
- $\mathcal{R}$ le terme de régularisation,
- α le paramètre de régularisation.

Méthode générale :

Problem

$$\min_u \mathcal{D}(Ku, f) + \mathcal{R}_\alpha(u),$$

avec

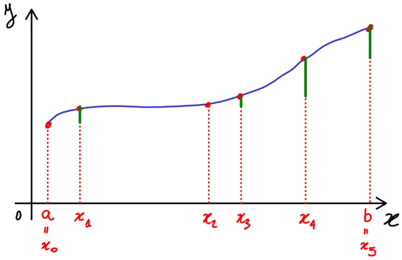
- $\mathcal{D}$ le terme de fidélité des données,
- $\mathcal{R}$ le terme de régularisation,
- α le paramètre de régularisation.

On s'intéresse uniquement au bruit gaussien et $K = Id$.

Definition

Soit $a < b$ dans $\bar{R}$. On pose $I := (a, b)$. Pour toutes fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit la variation totale de u sur I par

$$\mathrm{TV}^*(u, I) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} |u(x_{i+1}) - u(x_i)| \;\middle|\; a < x_1 < \ldots < x_N < b \right\}.$$



Definition

On définit la variation totale de $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ par,

$$\text{TV}(u, \Omega) := \sup_{\varphi \in C^1_c(\Omega),\ \|\varphi\|_\infty \leq 1} \int_\Omega u \,\text{div}(\varphi)\, dx.$$

Definition

On définit la variation totale de $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ par,

$$\mathrm{TV}(u,\Omega) := \sup_{\varphi \in C^1_c(\Omega),\ \|\varphi\|_\infty \leq 1} \int_\Omega u \,\mathrm{div}(\varphi)\ dx.$$

Proposition

Si u est dans $W^{1,1}(\Omega) \subset BV(\Omega)$, alors,

$$\mathrm{TV}(u,\Omega) = \int_\Omega |\nabla u|\ dx.$$

Definition

On définit la variation totale de $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ par,

$$\text{TV}(u,\Omega) := \sup_{\varphi \in C^1_c(\Omega),\ \|\varphi\|_\infty \leq 1} \int_\Omega u \, \text{div}(\varphi)\; dx.$$

Proposition

Si u est dans $W^{1,1}(\Omega) \subset BV(\Omega)$, alors,

$$\text{TV}(u,\Omega) = \int_\Omega |\nabla u| \; dx.$$

Remarque : en 1D TV^* et TV coïncide presque partout.

Definition

Espace des fonctions à variations bornées :

$$BV(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega) \mid \mathrm{TV}(u, \Omega) < +\infty\}.$$

$$\|u\|_{BV(\Omega)} := \|u\|_{L^1(\Omega)} + \mathrm{TV}(u, \Omega).$$

Organisation

Paramètre Constant

On considère :

Problem

$$\min_{u\in BV(\Omega)} \underbrace{\|u-f\|^2_{L^2(\Omega)}}_{\mathcal{D}} + \underbrace{\alpha\int_\Omega |Du|}_{\mathcal{R}_\alpha}.$$

On considère :

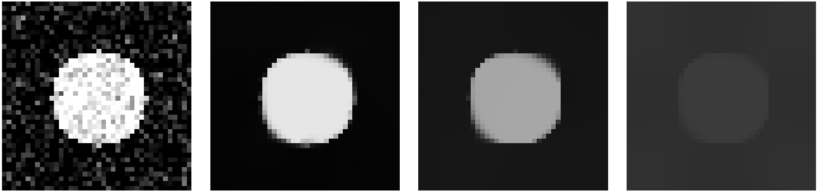
Problem

$$\min_{u \in BV(\Omega)} \underbrace{\|u - f\|^2_{L^2(\Omega)}}_{\mathcal{D}} + \underbrace{\alpha \int_\Omega |Du|}_{\mathcal{R}_\alpha}.$$

Theorem

Il existe une solution unique au problème précédent.

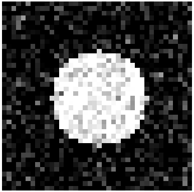
Antonin Chambolle et Pierre-Louis Lions. "Image recovery via total variation minimization and related problems". In : *Numerische Mathematik* 76.2 (avr. 1997), p. 167-188



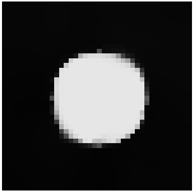
(e) Bruitée. (f) $\alpha = 0.02$. (g) $\alpha = 0.05$. (h) $\alpha = 0.1$.

Figure – Résultats numériques avec l'algorithme de Chambolle-Pock.

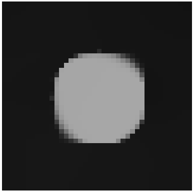
Antonin Chambolle et Thomas Pock. "A First-Order Primal-Dual Algorithm for Convex Problems with Applications to Imaging". en. In : *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 40.1 (mai 2011), p. 120-145



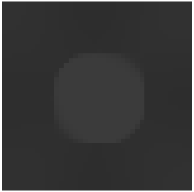
(a) Bruitée.



(b) $\alpha = 0.02$.



(c) $\alpha = 0.05$.



(d) $\alpha = 0.1$.

Figure – Résultats numériques avec l'algorithme de Chambolle-Pock.

Problèmes :

- on floute les arêtes,
- perte d'énergie dans la zone blanche.

Antonin Chambolle et Thomas Pock. "A First-Order Primal-Dual Algorithm for Convex Problems with Applications to Imaging". en. In : *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 40.1 (mai 2011), p. 120-145

Paramètre Variable

On considère :

Problem

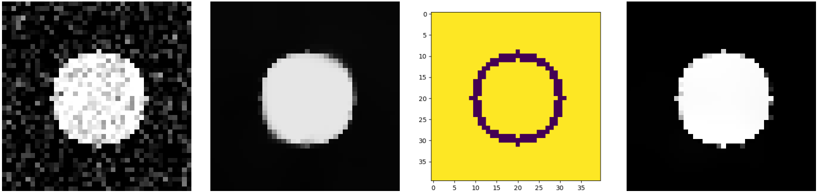
$$\min_{u \in BV(\Omega)} \underbrace{\|u - f\|^2_{L^2(\Omega)}}_{\mathcal{D}} + \underbrace{\int_\Omega \alpha(x)|Du|}_{\mathcal{R}_\alpha}.$$

On considère :

Problem

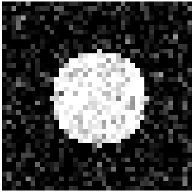
$$\min_{u \in BV(\Omega)} \underbrace{\|u - f\|^2_{L^2(\Omega)}}_{\mathcal{D}} + \underbrace{\int_\Omega \alpha(x)|Du|}_{\mathcal{R}_\alpha}.$$

Idée : choisir α faible proche des arêtes et grand dans les zones homogènes.

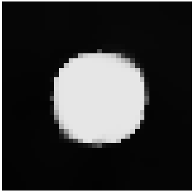


(a) Bruitée. (b) $\alpha = 0.02$. (c) α. (d) u.

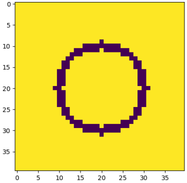
Figure – Résultats numériques avec l'algorithme de Chambolle-Pock.



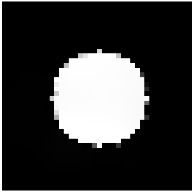
(a) Bruitée.



(b) $\alpha = 0.02$.



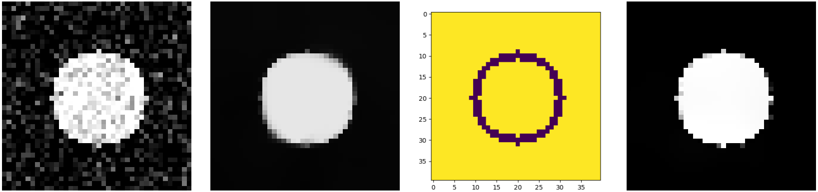
(c) α.



(d) u.

Figure – Résultats numériques avec l'algorithme de Chambolle-Pock.

Problème : on a du bruit sur les arêtes.

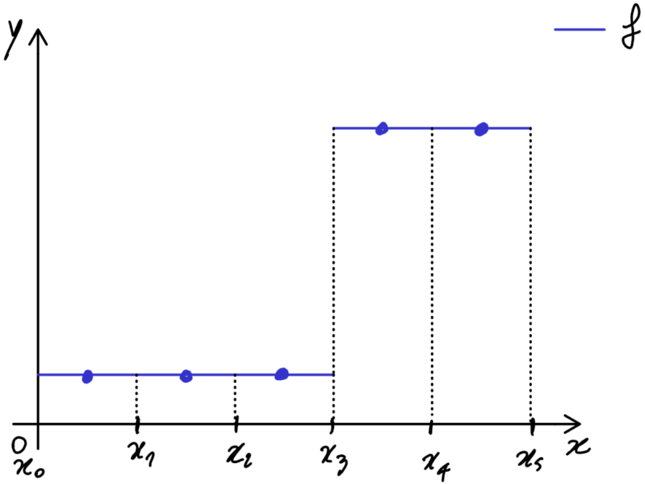


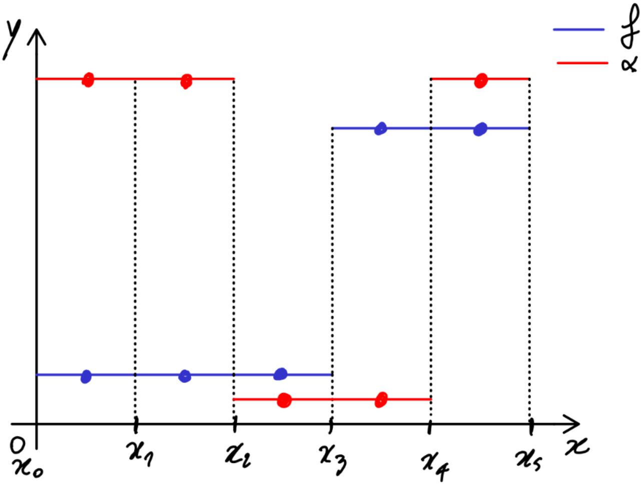
(a) Bruitée. (b) $\alpha = 0.02$. (c) α. (d) u.

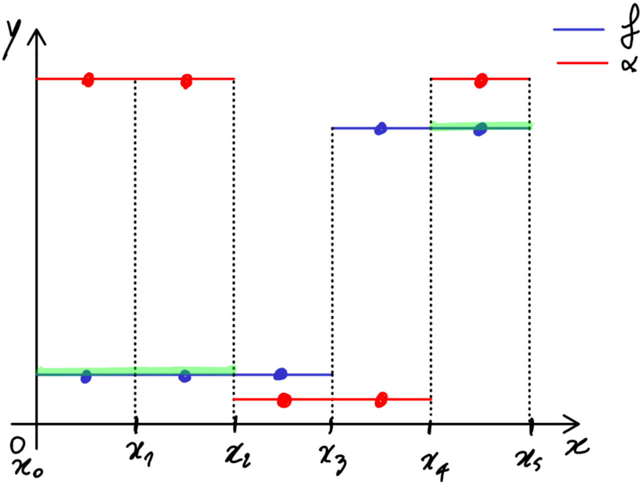
Figure – Résultats numériques avec l'algorithme de Chambolle-Pock.

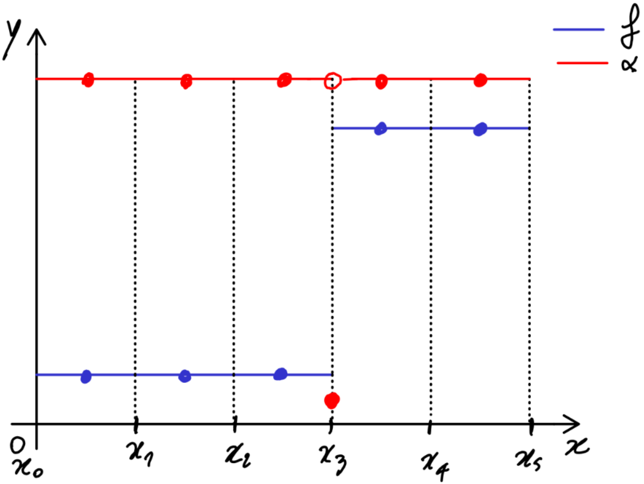
Problème : on a du bruit sur les arêtes. Il faudrait un α plus "fin".

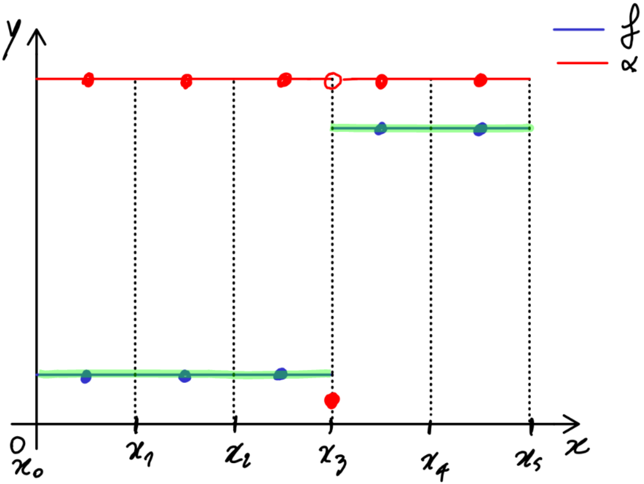
Grille Adaptative


y
f
O
x_0
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x


y
f
α
O
x_0
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x


y
x
O
x_0
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
f
α


y
f
α
O
x_0
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x


y
f
α
O
x_0
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x

Règles de construction du maillage (en 2D) :

- On commence avec 1 élément (degrés de liberté) par pixel.

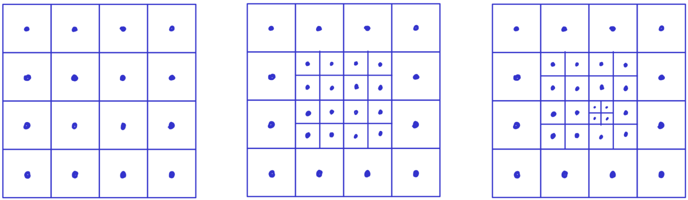
Règles de construction du maillage (en 2D) :

- On commence avec 1 élément (degrés de liberté) par pixel.
- On divise un élément en 4 sous-éléments.

Règles de construction du maillage (en 2D) :

- On commence avec 1 élément (degrés de liberté) par pixel.
- On divise un élément en 4 sous-éléments.
- À la fin, chaque élément doit être :
  - de même taille,
  - deux fois plus petit,
  - deux fois plus grand,

  que ses voisins (éléments adjacents).



(a) Régulier. (b) Raffiné une fois. (c) Raffiné deux fois.

Figure – Discrétisations possibles.

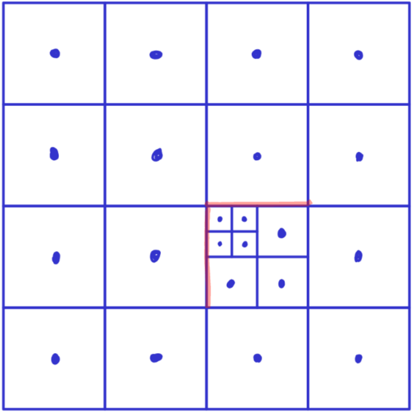


Figure – Discrétisation interdite.

Différences Finies

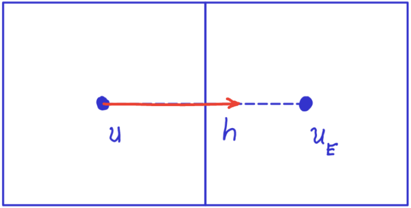


Figure – Cas régulier.

$$\partial_x u = \nabla u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \frac{u_{\mathrm{E}} - u}{h}.$$

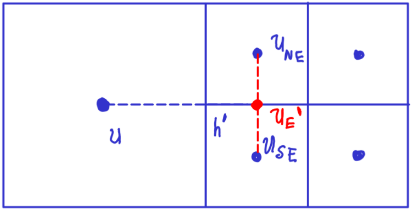
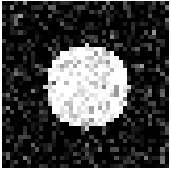
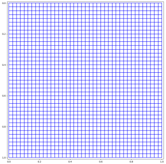


Figure – Cas non-régulier.

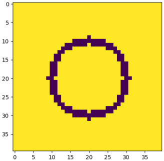
$$\partial_x u \approx \frac{\frac{u_{\mathrm{NE}}+u_{\mathrm{SE}}}{2} - u}{h'}.$$



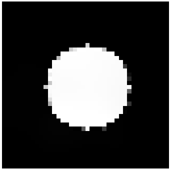
(a) Bruitée.



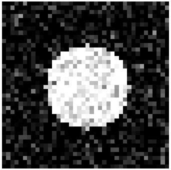
(b) Maillage.



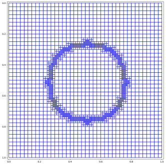
(c) α.



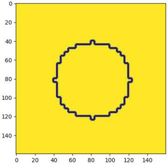
(d) u.



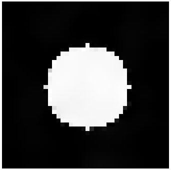
(e) Bruitée.



(f) Maillage.

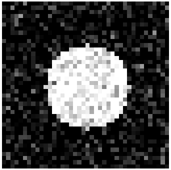


(g) α.

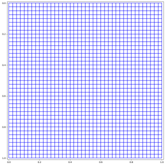


(h) u.

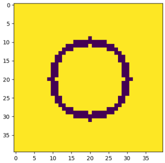
Figure – Résultats numériques avec l'algorithme de Chambolle-Pock.



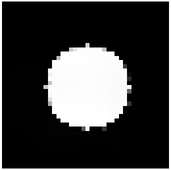
(a) Bruitée.



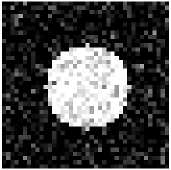
(b) Maillage.



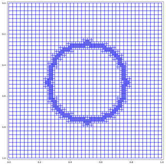
(c) α.



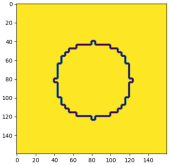
(d) u.



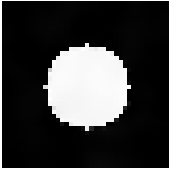
(e) Bruitée.



(f) Maillage.



(g) α.



(h) u.

Figure – Résultats numériques avec l'algorithme de Chambolle-Pock.

On a besoin de connaître l'emplacement des discontinuités !

Méthode de Hintermüller et Kunisch :

- Utilise uniquement la variable dual,

K. Kunisch et M. Hintermüller. "Total Bounded Variation Regularization as a Bilaterally Constrained Optimization Problem". en. In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 64.4 (jan. 2004), p. 1311-1333

Méthode de Hintermüller et Kunisch :

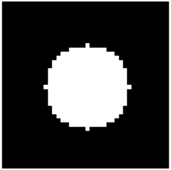
- Utilise uniquement la variable dual,
- Méthode de Newton (itérative),
- Utilise des ensembles actifs (ensemble de contraintes) : permet de détecter les arêtes,

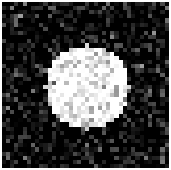
K. Kunisch et M. Hintermüller. "Total Bounded Variation Regularization as a Bilaterally Constrained Optimization Problem". en. In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 64.4 (jan. 2004), p. 1311-1333

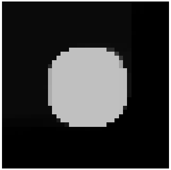
Méthode de Hintermüller et Kunisch :

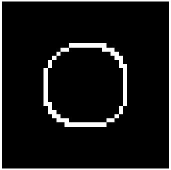
- Utilise uniquement la variable dual,
- Méthode de Newton (itérative),
- Utilise des ensembles actifs (ensemble de contraintes) : permet de détecter les arêtes,
- Convergence plus rapide que linéaire.

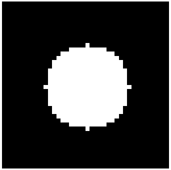
K. Kunisch et M. Hintermüller. "Total Bounded Variation Regularization as a Bilaterally Constrained Optimization Problem". en. In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 64.4 (jan. 2004), p. 1311-1333

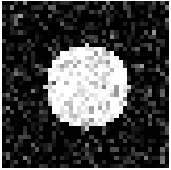

(a) Originale.

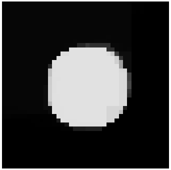

(b) Bruitée.


(c) u.


(d) Arêtes.


(e) Originale.


(f) Bruitée.


(g) u.

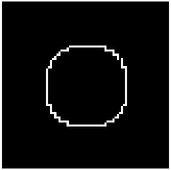

(h) Arêtes.

Figure – Résultats numériques avec l'algorithme de Hintermüller-Kunisch.

(a) Originale.

(b) Bruitée.

(c) u.

(d) Arêtes.

Figure – Résultats numériques avec l'algorithme de Hintermüller-Kunisch.

Conclusion

Conclusion : on a :

- proposé des différences finies sur un maillage non régulier,
- amélioré la reconstruction avec un maillage et un paramètre qui dépend des arêtes (construction à la main).

Conclusion

Conclusion : on a :

- proposé des différences finies sur un maillage non régulier,
- amélioré la reconstruction avec un maillage et un paramètre qui dépend des arêtes (construction à la main).

Futur :

- faire la méthode d'Hintermüller-Kunisch sur un maillage non régulier,
- faire un maillage et un paramètre automatique.

Merci de votre attention !

Antonin Chambolle et Pierre-Louis Lions. "Image recovery via total variation minimization and related problems". In : *Numerische Mathematik* 76.2 (avr. 1997), p. 167-188

Antonin Chambolle et Thomas Pock. "A First-Order Primal-Dual Algorithm for Convex Problems with Applications to Imaging". en. In : *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 40.1 (mai 2011), p. 120-145

K. Kunisch et M. Hintermüller. "Total Bounded Variation Regularization as a Bilaterally Constrained Optimization Problem". en. In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 64.4 (jan. 2004), p. 1311-1333