Exercices sur les c-transformées

Jeudi 10 mars 2022

Soient X et Y deux espaces polonais. Soient $\psi : X \to \bar{\mathbb{R}}$ et $\phi : Y \to \bar{\mathbb{R}}$. Soit $c : X \times Y \to \mathbb{R}$.

1 C-transformées

Définition 1 (c-transformées)**.** *Soit* $(x, y) \in X \times Y$*,*

$$(\mathrm{P}_c\,\psi)(y) := \inf_{x\in X} \psi(x) + c(x, y),$$

$$(\mathrm{Q}_c\,\phi)(x) := \sup_{y\in Y} \phi(y) - c(x, y).$$

Lien avec le problème dual : Maximiser

$$\int_Y \phi\ d\nu - \int_X \psi\ d\mu,$$

avec $(\psi, \phi) \in \mathcal{A}_c := \{(\psi, \phi) \in L^1(\mu) \times L^1(\nu) \mid \phi(y) - \psi(x) \leq c(x, y)\}$. Une manière de faire pour améliorer le coût du problème dual : augmenter ϕ ou diminuer ψ (tout en restant admissible).

$$(\psi, \phi) \rightsquigarrow (\psi, \mathrm{P_c}\,\psi) \rightsquigarrow (\mathrm{Q_c}\,\mathrm{P_c}\,\psi, \mathrm{P_c}\,\psi) \rightsquigarrow (\mathrm{Q_c}\,\mathrm{P_c}\,\psi, \mathrm{P_c}\,\mathrm{Q_c}\,\mathrm{P_c}\,\psi) \rightsquigarrow \dots$$

$$(\psi, \phi) \rightsquigarrow (\mathrm{Q_c}\,\phi, \phi) \rightsquigarrow (\mathrm{Q_c}\,\phi, \mathrm{P_c}\,\mathrm{Q_c}\,\phi) \rightsquigarrow (\mathrm{Q_c}\,\mathrm{P_c}\,\mathrm{Q_c}\,\phi, \mathrm{P_c}\,\mathrm{Q_c}\,\phi) \rightsquigarrow \dots$$

Propriété 1. *Les transformées* P_c *et* Q_c *sont croissantes.*

Proof. Soient $\psi_1 \leq \psi_2$. Alors, pour tout $y \in Y$,

$$\underbrace{\inf_{x\in X} \psi_1(x) + c(x, y)}_{=:\mathrm{P_c}\,\psi_1(y)} \leq \underbrace{\inf_{x\in X} \psi_2(x) + c(x, y)}_{=:\mathrm{P_c}\,\psi_2(y)}.$$

Donc, $\mathrm{P_c}$ est croissante. □

Propriété 2. $\mathrm{Q}_c\,\mathrm{P}_c\,\psi \leq \psi$ *et* $\mathrm{P}_c\,\mathrm{Q}_c\,\phi \geq \phi$.

Proof. Soit $y \in Y$.

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{P_c}\,\psi)(y) \leq \psi(x) + c(x, y),\ \forall x \in X\\
\Leftrightarrow&(\mathrm{P_c}\,\psi)(y) - c(x, y) \leq \psi(x),\ \forall x \in X\\
\Leftrightarrow&\underbrace{\sup_{y\in Y} \mathrm{P_c}\,\psi(y) - c(x, y)}_{=:\mathrm{Q_c}\,\mathrm{P_c}\,\psi(x)} \leq \psi(x),\ \forall x \in X.
\end{aligned}$$

□

Propriété 3. $\mathrm{P}_c \, \mathrm{Q}_c \, \mathrm{P}_c \, \psi = \mathrm{P}_c \, \psi$ *et* $\mathrm{Q}_c \, \mathrm{P}_c \, \mathrm{Q}_c \, \phi = \mathrm{Q}_c \, \phi$.

Proof. Avec la Propriété 2, on a
$$(\mathrm{P_c}\,\mathrm{Q_c})(\mathrm{P_c}\,\psi) \geq \mathrm{P_c}\,\psi.$$
De plus (Propriété 2), $\mathrm{Q_c}\,\mathrm{P_c}\,\psi \leq \psi$ et comme $\mathrm{P_c}$ est croissante (Propriété 1),
$$(\mathrm{P_c})\,\mathrm{Q_c}\,\mathrm{P_c}\,\psi) \leq \mathrm{P_c}\,\psi.$$
D'où le résultat. □

Lien avec le problème dual :
$$(\psi, \phi) \rightsquigarrow (\psi, \mathrm{P_c}\,\psi) \rightsquigarrow (\mathrm{Q_c}\,\mathrm{P_c}\,\psi, \mathrm{P_c}\,\psi) \rightsquigarrow (\mathrm{Q_c}\,\mathrm{P_c}\,\psi, \mathrm{P_c}\,\mathrm{Q_c}\,\mathrm{P_c}\,\psi) = (\mathrm{Q_c}\,\mathrm{P_c}\,\psi, \mathrm{P_c}\,\psi).$$

$$(\psi, \phi) \rightsquigarrow (\mathrm{Q_c}\,\phi, \phi) \rightsquigarrow (\mathrm{Q_c}\,\phi, \mathrm{P_c}\,\mathrm{Q_c}\,\phi) \rightsquigarrow (\mathrm{Q_c}\,\mathrm{P_c}\,\mathrm{Q_c}\,\phi, \mathrm{P_c}\,\mathrm{Q_c}\,\phi) = (\mathrm{Q_c}\,\phi, \mathrm{P_c}\,\mathrm{Q_c}\,\phi).$$

Propriété 4. ψ *c-convexe* $\Leftrightarrow \psi = \mathrm{Q}_c \, \mathrm{P}_c \, \psi$ *et* ϕ *c-concave* $\Leftrightarrow \phi = \mathrm{P}_c \, \mathrm{Q}_c \, \phi$.

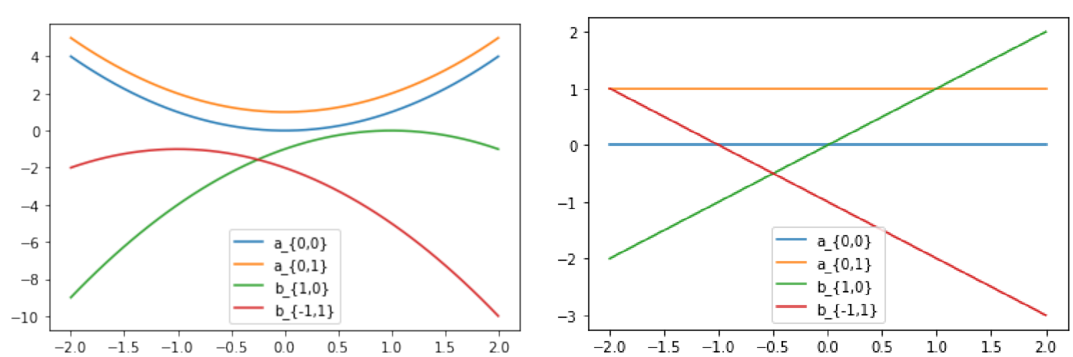
Proof. On suppose que ψ est c-convexe i.e. $\exists \phi : Y \to \bar{\mathbb{R}}$ t.q. $\psi = \mathrm{Q_c}\,\phi$. Alors (Propriété 3)
$$\mathrm{Q_c}\,\mathrm{P_c}\,\psi = \mathrm{Q_c}\,\mathrm{P_c}\,\mathrm{Q_c}\,\phi = \mathrm{Q_c}\,\phi = \psi.$$
Réciproquement, on suppose $\mathrm{Q_c}\,\mathrm{P_c}\,\psi = \psi$. Montrons que ψ est c-convexe. On pose $\phi := \mathrm{P_c}\,\psi$. Alors,
$$\psi = \mathrm{Q_c}\,\mathrm{P_c}\,\psi = \mathrm{Q_c}\,\phi.$$
D'où le résultat. □

Propriété 5.
$$\mathrm{P}_c \, \psi \equiv +\infty \Leftrightarrow \psi \equiv +\infty \Leftrightarrow \exists y \in Y,\ \mathrm{P}_c \, \psi(y) = +\infty,$$
$$\mathrm{Q}_c \, \phi \equiv -\infty \Leftrightarrow \phi \equiv -\infty \Leftrightarrow \exists x \in X,\ \mathrm{Q}_c \, \phi(x) = -\infty.$$

Proof. Evident. □

2 Les sous/sur-différentielles

Définition 2. *Soient* $(x, y) \in X \times Y$ *et* $M \in \mathbb{R}$,
$$a_{x,M} := M + c(x, \cdot),$$
$$b_{y,M} := M - c(\cdot, y).$$



(a) (b)

Figure 1: Exemple avec $c(x, y) = (x - y)^2$ (gauche) et $c(x, y) = -x \cdot y$ (droite).

Propriété 6. $a_{x,M} \geq \phi \Leftrightarrow M \geq \mathrm{Q}_c\,\phi(x)$ *et* $b_{y,M} \leq \psi \Leftrightarrow M \leq \mathrm{P}_c\,\psi(y)$.

Proof.

$$\begin{aligned} a_{x,M} \geq \phi &\Leftrightarrow M + c(x,y) \geq \phi(y),\ \forall y \\ &\Leftrightarrow M \geq \phi(y) - c(x,y),\ \forall y \\ &\Leftrightarrow M \geq \underbrace{\sup_{y \in Y} \phi(y) - c(x,y)}_{=:\mathrm{Q}_c\,\phi(x)}. \end{aligned}$$

□

Définition 3 (Sous-différentielles)**.** *Soit* $(x,y) \in X \times Y$,

$$\partial_c \psi(x) := \{y \in Y \mid \mathrm{P}_c\,\psi(y) = \psi(x) + c(x,y)\},$$

$$\partial_c \phi(y) := \{x \in X \mid \mathrm{Q}_c\,\phi(x) = \phi(y) - c(x,y)\}.$$

Sous-différentielles car dans le cas où $c(x,y) = -x \cdot y$ et ψ differentiable en x, $\partial_c \psi(x) = \{\nabla \psi(x)\}$.

Propriété 7.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{x,M} \geq \phi \\ a_{x,M}(y) = \phi(y) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} M = \mathrm{Q}_c\,\phi(x) \\ x \in \partial_c \phi(y) \end{array} \right. ,$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{y,M} \leq \psi \\ b_{y,M}(x) = \psi(x) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} M = \mathrm{P}_c\,\psi(y) \\ y \in \partial_c \psi(x) \end{array} \right. .$$

Proof.

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} a_{x,M} \geq \phi \\ a_{x,M}(y) = \phi(y) \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} M + c(x,z) \geq \phi(z),\ \forall z \in Y \\ M + c(x,y) = \phi(y) \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} M \geq \phi(z) - c(x,z),\ \forall z \in Y \\ M = \phi(y) - c(x,y) \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} M \geq \sup_{z \in Y} \phi(z) - c(x,z) \\ M = \phi(y) - c(x,y) \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} M = \mathrm{Q}_c\,\phi(x) \\ x \in \partial_c \phi(y) \end{array} \right. . \end{aligned}$$

□

Exemple 1 : Dans $\mathbb{R}$, $\phi(y) = -y^2$ et $c(x,y) = -x\,y$. On cherche x et M lorsque $y = 1$. Avec la Propriété précédente,

$$\begin{aligned} \partial_c \phi(1) &:= \{x \in X \mid \mathrm{Q}_c\,\phi(x) = \phi(1) - c(x,1)\} \\ &= \{x \in X \mid \sup_{z \in \mathbb{R}} -z^2 + z\,x = -1 + x\} \\ &= \{x \in X \mid \frac{x^2}{4} = x - 1\} = \{2\}. \end{aligned}$$

Soit $x \in \partial_c \phi(1)$.

$$\mathrm{Q}_c\,\phi(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}} -y^2 + y = 1.$$

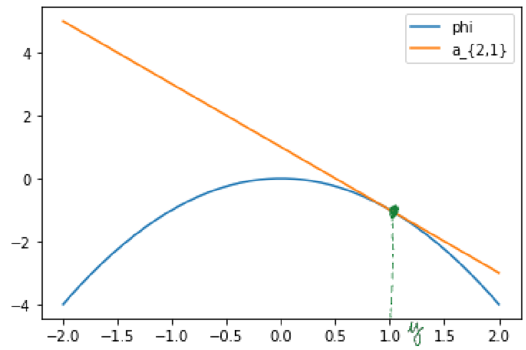


Figure 2: Exemple avec $c(x,y) = -x \cdot y$, $\phi(y) = -y^2$.

Propriété 8.

$$\mathrm{P}_c\,\mathrm{Q}_c\,\phi = \inf\{a_{x,M} \mid (x,M) \in X \times \mathbb{R} \ \ et\ a_{x,M} \geq \phi\},$$
$$\mathrm{Q}_c\,\mathrm{P}_c\,\psi = \sup\{b_{y,M} \mid (y,M) \in Y \times \mathbb{R} \ \ et\ b_{y,M} \leq \psi\}.$$

Proof. Soit $y \in Y$.

$$\begin{aligned}
\inf\{a_{x,M} \mid (x,M) \in X \times \mathbb{R} \text{ et } a_{x,M} \geq \phi\} &= \inf_{x \in X} \inf_{M \geq \mathrm{Q_c}\,\phi(x)} M + c(x,y) \\
&= \inf_{x \in X} c(x,y) + \mathrm{Q_c}\,\phi(x) \\
&= \mathrm{P_c}\,\mathrm{Q_c}\,\phi(y).
\end{aligned}$$

□

Propriété 9.

$$\mathrm{P}_c\,\psi \not\equiv -\infty \Leftrightarrow \exists (y,M) \in Y \times \mathbb{R},\ \psi \leq b_{y,M},$$
$$\mathrm{Q}_c\,\phi \not\equiv +\infty \Leftrightarrow \exists (x,M) \in X \times \mathbb{R},\ \phi \geq a_{x,M}.$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P_c}\,\psi \not\equiv -\infty &\Leftrightarrow \exists (y,M) \in Y \times \mathbb{R},\ \psi(x) + c(x,y) \leq M,\ \forall x \in X \\
&\Leftrightarrow \exists (y,M) \in Y \times \mathbb{R},\ \psi(x) \leq \underbrace{M - c(x,y)}_{=:b_{y,M}(x)},\ \forall x \in X.
\end{aligned}$$

□

Propriété 10. *Soit $y \in Y$ t.q. $\phi(y) < +\infty$, alors*

$$\partial_c\phi(y) = \{x \in X \mid \exists M \in \mathbb{R},\ a_{x,M} \geq \phi \ \ et\ a_{x,M}(y) = \phi(y)\}.$$

Soit $x \in X$ t.q. $\psi(x) > -\infty$, alors

$$\partial_c\psi(x) = \{y \in Y \mid \exists M \in \mathbb{R},\ b_{y,M} \leq \psi \ \ et\ b_{y,M}(x) = \psi(x)\}.$$

Proof. Soit $y \in Y$ t.q. $\phi(y) < +\infty$. Avec la Propriété 7,

$$\begin{aligned}
\{x \in X \mid \exists M \in \mathbb{R},\ a_{x,M} \geq \phi \text{ et } a_{x,M}(y) = \phi(y)\} &= \{x \in X \mid \underbrace{\mathrm{Q_c}\,\phi(x) < +\infty}_{\text{toujours vrai car } \phi(y) < +\infty} \text{ et } x \in \partial_c\phi(y)\} \\
&= \partial_c\phi(y).
\end{aligned}$$

□